ББК 65.05
Ч-52

Рецензент д-р экон. наук В. М. Усоскин

Четыркин Е. М., Васильева Н. Е.
Ч-52 Финансово-экономические расчеты: Справочное пособие. — М.: Финансы и статистика, 1990. — 302 с.: ил.
ISBN 5-279-00530-4.

Справочное пособие содержит систематизированный набор методов, формул и таблиц, необходимых для решения широкого класса финансово-экономических проблем, относящихся как к внутренней, так и к внешнеэкономической деятельности (вычисление процентов, конверсия задолженности, сравнение контрактов и т. д.) Без этих методов нельзя оценить действительную эффективность хозяйственных операций.

Для специалистов, занимающихся финансовыми, кредитными, валютными операциями во внутренней и внешнеэкономической деятельности.

Ч $\frac{0605010204-110}{010(01)-90}$ 35—91 ББК 65.05

Справочное издание

Четыркин Евгений Михайлович, Васильева Наталья Евгеньевна

ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ

Редактор *Л. Н. Вылегжанина*
Мл. редакторы *Л. Г. Захарко, А. В. Хворостяная*
Худож. редактор *С. Л. Витте*
Техн. редакторы *И. В. Завгородняя, И. В. Юдинцева*
Корректоры *Г. В. Хлопцева, Г. А. Башарина, М. А. Синяговская*
Переплет художника *Е. К. Самойлова*

ИБ № 2632

Сдано в набор 19.03.90. Подписано в печать 01.08.90. Формат 60×88 1/16. Бум. офсетная. Гарнитура «Литературная». Печать офсетная. Усл. п. л. 18,62. Усл. кр.-отт. 18,62. Уч.-изд. л. 21,5. Тираж 15 000 экз. Заказ 267. Цена 1 р. 40 к.

Издательство «Финансы и статистика», 101000, Москва, ул. Чернышевского, 7.

Типография им. Котлякова издательства «Финансы и статистика»
Государственного комитета СССР по печати
195273, Ленинград, ул. Руставели, 13.

ISBN 5-279-00530-4

РЕДИСЛОВИЕ

По-видимому, излишне обосновывать важность финансово-кономических расчетов и их роль в подготовке и реализации экономических решений, повышении их эффективности. Потребность в подобного рода анализе неизбежно будет расти по мере укрепления хозяйственной самостоятельности предприятий, усиления конкурентных начал в их деятельности, в том числе внешнеэкономической.

Хозрасчет немыслим без строгого количественного учета различных факторов. В торговых и иных коммерческих операциях такими факторами являются условия поставки товаров (услуг), размеры, сроки и конкретные нормативы производства платежей. Множественность влияющих в каждом случае факторов приводит к тому, что их совместный результат часто неочевиден и требует количественного анализа, выходящего за рамки элементарных расчетов.

Несколько слов о термине «количественный финансовый анализ». Он не является общеупотребительным, хотя, вероятно, наиболее точно выражает суть рассматриваемого направления анализа. В силу сложившейся традиции в практике нашли применение более привычные, но, на наш взгляд, менее емкие названия — финансовые расчеты, финансовые вычисления (в дореволюционных финансовых работах — высшие финансовые вычисления). За рубежом соответствующая дисциплина часто называется «финансовая математика». В книге термин «финансово-экономические расчеты» используется в широком смысле как синоним количественного финансового анализа.

Финансово-экономические расчеты нацелены на решение широкого круга задач: от элементарных, связанных с начислением процентов, и до сложных финансовых, кредитных и коммерческих проблем в различных их постановках, зависящих от конкретных условий. К ним, в частности, можно отнести:

измерение конечных финансовых итогов производственно-хозяйственной деятельности или коммерческой сделки для каждой из участвующих сторон;

выявление зависимости конечных результатов финансово-кредитной операции от основных ее параметров и условий; определение взаимосвязи этих параметров, их предельных (допустимых) значений;

нахождение параметров эквивалентного (безубыточного) изменения условий сделки;

разработка планов реализации финансово-кредитных операций

Цель настоящего справочного пособия — восполнить пробел в отечественной литературе в указанной области и снабдить экономиста систематизированным набором методов и соответствующих формул, которые могут быть применены в финансово-экономических расчетах, относящихся как к внутренней экономике, так и к внешнеэкономической деятельности.

Справочное пособие содержит два раздела и обширные приложения. В первом разделе приведены сведения о методах начисления процентов и различного рода расчетах, связанных с процентными ставками. Рассматриваются методы как для отдельных разовых платежей, так и их последовательностей (потоков платежей, «кассовых» потоков, финансовых рент). Материал первого раздела носит общий характер и может быть использован при подготовке и выполнении многих финансовых расчетов, разработке контрактов и т. д.

Назначение второго раздела — снабдить читателя методикой финансово-экономических расчетов, выполняемых при решении конкретных проблем: разработке планов погашения долгосрочной задолженности, анализе и сравнении условий контрактов, наконец, измерении эффективности различных финансово-кредитных и коммерческих операций. Каждая из упомянутых проблем рассматривается для ряда вариантов постановки соответствующих задач. Справочное пособие в основном содержит «классические» методы финансово-экономических расчетов (некоторые из них у нас, к сожалению, забыты). Вместе с тем он содержит и новый материал, в том числе полученный авторами.

Для удобства работы главы построены по единой схеме: определение основных понятий, список обозначений, принятых при написании формул в этой главе, сами формулы и необходимые краткие комментарии к ним (ограничения, некоторые требования и условия применения и т. д.), примеры расчетов. Последние не только иллюстрируют методику расчетов — в ряде случаев они имеют самостоятельную познавательную ценность. Назначение книги не позволило включить в нее формальные доказательства некоторых неочевидных соотношений.

В приложении приведены таблицы и некоторые сведения из математики. Таблицы содержат значения различных величин, используемых в количественном финансовом анализе. Их применение существенно сокращает трудоемкость расчетов. Таблицы приводятся с различной степенью детализации. Чем больше предполагаемая интенсивность использования табличных данных, тем более подробна шкала входных параметров. В кратком математическом приложении представлен различный по своему содержанию материал, в основном относящийся к численным методам математики. Авторы надеются, что он окажется полезным при работе с данным справочным пособием

Раздел I. НАЧИСЛЕНИЕ ПРОЦЕНТОВ

Глава 1. РАСЧЕТЫ С ПРОСТЫМИ ПРОЦЕНТНЫМИ СТАВКАМИ

1.1. ОСНОВНЫЕ ВИДЫ ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК

Под *процентными деньгами,* или, кратко, *процентами*, в финансовых расчетах понимают сумму доходов от предоставления денег в долг в любой форме: единовременная ссуда, помещение денег на сберегательный счет, покупка сберегательного сертификата и облигации, учет векселя и т. д. При заключении финансового или кредитного соглашения стороны (кредитор и заемщик) договариваются о размере *процентной ставки* (ссудного процента)—отношения суммы процентных денег, выплачиваемых за фиксированный отрезок времени, к величине ссуды. Интервал, за который начисляют проценты, называют *периодом начисления*. Сумму процентных платежей определяют исходя из размера ссуды, общего ее срока, уровня процентной ставки. Ставка измеряется в процентах в виде десятичной или натуральной дроби. В последнем случае она фиксируется в контрактах с точностью до $^1/_{16}$ или даже $^1/_{32}$.

Начисление процентов, как правило, производится дискретно (дискретные проценты), причем в качестве периодов начисления принимают год, полугодие, квартал, месяц. Иногда практикуют ежедневное начисление, а в ряде случаев (например, в анализе долгосрочных инвестиционных операций) удобно применять непрерывные проценты.

Проценты выплачиваются кредитору по мере их начисления или присоединяются к сумме долга. Процесс увеличения суммы денег в связи с присоединением процентов к сумме долга называют *наращением,* или *ростом* первоначальной суммы.

В финансовом количественном анализе процентная ставка применяется не только как инструмент наращения суммы долга, но и в более широком смысле — как измеритель степени доходности (эффективности) финансовой операции или коммерческо-хозяйственной деятельности вне зависимости от того, имел или нет место непосредственный процесс передачи денежных сумм и нарастания суммы денег.

В практике, особенно зарубежной, существуют различные способы начисления процентов, зависящие от условий контрактов, формы осуществления операций или сделок. Соответственно применяют различные виды процентных ставок. Основное отличие — по моменту времени, на который производится начисление процентов, что равнозначно различию по выбору исходной базы (суммы) для их начисления. Так, проценты могут начисляться на первоначальную исходную сумму долга или на сумму с начисленными за предшествующие периоды процентами. В этом случае будем говорить о *ставках процентов*. При другом методе (начислении и удержании процентов из суммы кредита в начале срока операции) применяют *учетные ставки*.

Ставки процентов могут применяться к одной и той же начальной сумме на протяжении всего срока ссуды (*простые процентные ставки*) или к сумме с начисленными в предыдущем периоде процентами (*сложные процентные ставки*). Аналогично применяются учетные ставки. Соответственно различают четыре основных вида процентных ставок: простые и сложные ставки процентов, простые и сложные учетные ставки.

В условии контракта оговаривается фиксированное значение процентной ставки. В зарубежной практике помимо фиксированных применяют и «плавающие» ставки. В последнем случае в контракте указывается некоторая базовая ставка (изменяющаяся во времени ставка денежного рынка, например ставка «либор», устанавливаемая банками Лондона) плюс фиксированная надбавка — *маржа*. Таким образом, в целом ставка, по которой начисляются проценты, изменяется вместе с изменением базы. В контракте может быть предусмотрен и изменяющийся во времени размер маржи.

В главах 1, 2 приводятся формулы, применяемые в количественном анализе единичных разовых платежей при выдаче и погашении ссуды, кредита в виде разового платежа. Основные задачи такого анализа сводятся к расчету наращенной суммы платежа и его современной величины, определению срока ссуды или процентной ставки по остальным условиям ссуды.

Для записи приведенных в главе формул приняты следующие обозначения:

I — проценты за весь срок ссуды;
K — продолжительность года в днях (временная база);
P — первоначальная сумма ссуды;
S — сумма на конец срока ссуды;
i — ставка процентов;
d — простая учетная ставка;
n — продолжительность ссуды в годах;
δ — число дней ссуды.

Дополнительные символы поясняются в каждом отдельном случае.

1.2. НАРАЩЕНИЕ ПО ПРОСТЫМ ПРОЦЕНТАМ

Под *наращенной суммой* ссуды (инвестированных средств, какого-либо платежного обязательства и т. д.) понимается первоначальная ее сумма вместе с начисленными на нее процентами к концу срока. Наращенная сумма определяется умножением первоначальной суммы ссуды на *множитель наращения*, который показывает, во сколько раз наращенная сумма больше первоначальной суммы ссуды. Формула расчета множителя наращения зависит от вида применяемой процентной ставки и условий наращения. Формулы наращения для простых процентных ставок:

наращенная сумма (простая постоянная ставка)

$$S = P(1 + ni), \tag{1.1}$$

где $n = д/K$; $(1+ni)$ — множитель наращения;

проценты за весь срок ссуды

$$I = S - P. \tag{1.2}$$

В практике используются различные способы измерения числа дней ссуды ($д$) и продолжительности года (*временной базы* для расчета процентов) в днях (K). Так, $д$ определяется точно (фактическое число дней ссуды) или приближенно (продолжительность любого полного месяца принимается равной 30 дням). И в том и другом случае дата выдачи ссуды и дата ее погашения считается за один день. Временная база K равна фактической продолжительности года — 365 или 366 (в этом случае получают точные проценты) или приближенно 360 дням (обыкновенные проценты). Соответственно применяют следующие варианты начисления простых процентов.

а. **Точные проценты с фактическим числом дней ссуды.** Этот вариант дает самые точные результаты. При расчетах за полугодие срок ссуды приравнивается к 182 дням. Данный способ начисления процентов применяется многими центральными и крупными коммерческими банками.

б. **Обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды.** Этот вид начисления дает несколько больший результат, чем применение точных процентов. Когда число дней ссуды превышает 360, данный способ измерения времени приводит к тому, что сумма начисленных процентов будет больше, чем предусматривается годовой ставкой; например, если $д = 364$ дня, то $n = 364/360 = 1{,}011$, и множитель наращения за этот период будет равен $1 + 1{,}011i$.

в. **Обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды.** Поскольку точное число дней ссуды в большинстве случаев (но не всегда) больше приближенного, то проценты с точным числом дней обычно больше, чем с приближенным.

Точное число дней в периоде определяют по таблице «Порядковые номера дней в году» (см. табл. П.1): из номера, соответствующего дню окончания ссуды, вычитают номер первого ее дня.

Между точными и обыкновенными процентами (при продолжительности ссуды, равной 360 дням или меньшей 360), существуют следующие соотношения:

временная база $K = 365$ дней

$$\frac{I_0}{I_т}=\frac{365}{360}=1{,}013889; \qquad (1.3) \qquad \frac{I_т}{I_0}=\frac{360}{365}=0{,}986301; \qquad (1.4)$$

$K = 366$ дней

$$\frac{I_0}{I_т}=\frac{366}{360}=1{,}016667; \qquad (1.5) \qquad \frac{I_т}{I_0}=\frac{360}{366}=0{,}983606, \qquad (1.6)$$

где $I_о$ — обыкновенные проценты, $I_т$ — точные проценты.

Приведенные соотношения характеризуют финансовые последствия от выбора временно́й базы для наращения процентов. Они могут быть использованы при определении *эквивалентных процентных ставок* (см. 1.5), т. е. ставок, приносящих одинаковые проценты при разных временных базах:

$$i_{360} = 0{,}986301 i_{365}; \qquad (1.7) \qquad i_{365} = 1{,}013889 i_{360}. \qquad (1.8)$$

Например, ставка в 10% годовых при начислении процентов при временно́й базе $K=360$ (обыкновенные проценты) дает тот же результат, что и ставка $i_{365}=1{,}013879\cdot10=10{,}139$, начисляемая для временно́й базы $K=365$ (точные проценты).

Пример 1.1. Ссуда в размере 100 тыс. руб. выдана 20.01 до 05.10 включительно под 8% годовых, год невисокосный. Необходимо найти размер погасительного платежа. Точное число дней ссуды составит 278—20=258 (порядковый номер 05.10 равен 278, см. табл. П.1), приближенное — 255 (восемь полных месяцев по 30 дней плюс 11 дней января и 5 дней октября минус один день). Применяя три метода определения продолжительности ссуды, получим:

а) точные проценты с точным числом дней ссуды

$$S = 100\,000\ (1+\frac{258}{365}0{,}08) = 105654{,}79 \text{ руб.};$$

б) обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды

$$S = 100\,000(1+\frac{258}{360}0{,}08) = 105733{,}33 \text{ руб };$$

в) обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды

$$S = 100\,000(1 + \frac{255}{360}0{,}08) = 105666{,}67 \text{ руб.}$$

Пример 1.2. Начисленная за 10 дней ссуды сумма процентов составила 15 тыс. руб. (временная база 360 дней). Необходимо определить аналогичную сумму при условии начисления точных процентов (временная база $K=365$ дней). Согласно (1.4) находим

$$I_т = 0{,}986301 \cdot 15 = 14{,}79 \text{ тыс. руб.}$$

Применяемые при начислении процентов ставки могут изменяться во времени. В этом случае

наращенная сумма (простые переменные ставки)

$$S = P(1 + n_1 i_1 + n_2 i_2 + ...) = P(1 + \sum_t n_t i_t), \qquad (1.9)$$

где i_t, n_t — ставка простых процентов и продолжительность периода ее начисления в периоде t.

Пример 1.3. Контракт предусматривает следующий порядок начисления процентов: первый год — 6%, в каждом следующем полугодии ставка повышается на 0,5%. Необходимо определить множитель наращения за 2,5 года. Находим

$$(1 + \sum n_t i_t) = 1 + 0{,}06 + 0{,}5 \cdot 0{,}065 + 0{,}5 \cdot 0{,}07 + \\ + 0{,}5 \cdot 0{,}075 = 1{,}165.$$

Операция по инвестированию средств под простые проценты может предусматривать последовательное неоднократное ее повторение (реинвестирование) в пределах некоторого общего срока N.

Наращенная сумма при реинвестировании

$$S = P(1 + n_1 i_1)(1 + n_2 i_2) \ ..., \qquad (1.10)$$

где $n_1, n_2 ...$ — продолжительности периодов наращения; $\sum n_t = N$; i_1, i_2 — ставки, по которым производится реинвестирование.

Пример 1.4. На сумму 10 тыс. руб. в течение месяца начисляются простые проценты по ставке 10% годовых. Какова будет наращенная сумма, если эта операция будет повторена в течение первого квартала года? По формуле (1.10) находим

$$S = 10(1 + \frac{31}{365}0{,}1)(1 + \frac{28}{365}0{,}1)(1 + \frac{31}{365}0{,}1) = 10{,}251 \text{ тыс. руб.}$$

Близкий результат даст в этом примере и приближенное измерение времени (по 30 дней в месяце):

$$S = 10(1 + \frac{30}{365}0{,}1)^3 = 10{,}249 \text{ тыс. руб.}$$

Множитель наращения может быть определен и на основе простой учетной ставки (см. 1.3). В этом возникает необходимость, в частности, при определении суммы, которую надо проставить в бланке векселя, если заданы текущая сумма долга, его срок и учетная ставка.

Наращенная сумма (простая учетная ставка)

$$S = P\frac{1}{1-nd}. \tag{1.11}$$

Здесь $1/(1-nd)$ — множитель наращения; n — продолжительность ссуды в годах. При определении n берется точное число дней, а временная база обычно принимается равной 360 дням ($K=360$).

При $n = 1/d$ расчет по формуле (1.11) лишен смысла, так как наращенная сумма становится бесконечно большим числом.

Простая учетная ставка дает более быстрый рост суммы ссуды, чем аналогичная по величине ставка простых процентов. Иллюстрация приведена в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Множители наращения по простой ставке процентов и учетной ставке ($i = d = 10\%$)

Вид ставки	n, лет				
	1/12	1/4	1/2	1	2
i	1,0083	1,025	1,05	1,1	1,2
d	1,0084	1,0256	1,0526	1,1111	1,25

Пример 1.5. Найти наращенную сумму для данных примера 1.1 при условии, что проценты начисляются по простой учетной ставке, равной 8%. По формуле (1.11) находим:

$$S = 100\,000 \cdot 1/(1 - \frac{258}{360}0{,}08) = 106082{,}04 \text{ руб.}$$

1.3. ДИСКОНТИРОВАНИЕ И УЧЕТ ПО ПРОСТЫМ ПРОЦЕНТНЫМ СТАВКАМ

В финансовой практике часто сталкиваются с задачей, обратной определению наращенной суммы: по заданной сумме S, которую следует уплатить через некоторое время n, необходимо определить сумму полученной ссуды P. Такая ситуация может возникнуть, например, при разработке условий контракта. Кроме того, задача расчета P по S возникает и тогда, когда проценты с суммы S удерживаются непосредственно при выдаче ссуды. В этом случае говорят, что сумма S дисконтируется, сам процесс начисления и удержания процентов вперед называют *учетом*, а разность $S-P=D$ — *дисконтом*. Необходимость дисконтирования возникает, например, при покупке банком или другим финансовым учреждением краткосрочных платежей, обязательств (векселей, тратт и т. д.), расчет по которым производится в будущем. Термин дисконтирование употребляется и в более широком смысле — как средство определения любой стоимостной величины на некоторый момент времени при условии, что в будущем она составит величину S, вне зависимости от того, действительно имела место финансовая операция (кредитование, выдача денег в долг и т. д.), предусматривающая начисление процентов, или нет. Такой расчет часто называют *приведением* стоимостного показателя к заданному моменту времени. Величину P, найденную дисконтированием S, называют часто *современной*, или *приведенной*, величиной S. Это понятие является одним из важнейших в количественном анализе финансовых операций, поскольку именно с помощью дисконтирования учитывается такой фактор, как время.

Исходя из целей дисконтирования и вида процентной ставки применяют два способа расчета: *математическое дисконтирование* и *банковский учет*.

Математическое дисконтирование (простая ставка процентов)

$$P=S\cdot\frac{1}{1+ni}, \qquad (1.12)$$

где $1/(1+ni)$ — дисконтный множитель, $n=д/K$.

Пример 1.6. Через 180 дней с момента подписания контракта должник уплатит 31 тыс. руб. Кредит предоставлен под 6% годовых. Определить, какую сумму получит должник и сумму дисконта. По (1.12) при условии, что временная база равна 365 дням, находим

$$P=\frac{31000}{1+\frac{180}{365}0{,}06}=30109{,}1 \text{ руб.};\ D=S-P=890{,}9 \text{ руб.}$$

Банковский учет (простая учетная ставка)

$$P=S(1-nd), \qquad (1.13)$$

где $(1-nd)$ — дисконтный множитель.

Данный вид учета, называемый также *коммерческим*, применяют при покупке (учете) векселей и других краткосрочных обязательств. Суть операции заключается в том, что банк или какое-либо иное финансовое учреждение до наступления срока платежа по векселю покупает его у владельца по цене, меньшей той суммы, которая должна быть выплачена по нему в конце срока, т. е. приобретает (или учитывает) его с дисконтом. Получив при наступлении срока векселя деньги, банк таким образом реализует дисконт. Владелец векселя, с помощью его учета, имеет возможность получить деньги ранее указанного на нем срока.

Дисконтирование по учетной ставке чаще всего производится при условии, что временная база равна 360 дням, а число дней кредита обычно берется точным.

Применение учетной ставки для дисконтирования при относительно большом сроке уплаты по векселю и значительной учетной ставке ($n \geqslant 1/d$) может привести к нулевой или даже отрицательной сумме P. Например, при $d = 0{,}2$ уже пятилетний срок векселя достаточен для того, чтобы его владелец ничего не получил при учете. Такая ситуация не может возникнуть при математическом дисконтировании.

Пример 1.7. Тратта (переводный вексель) выдана на сумму 100 тыс. руб. с уплатой 17.11. Владелец документа учел его в банке 23.09 по учетной ставке 8%.

Так как оставшийся до погашения обязательства период равен 55 дням, то полученная при учете сумма (без уплаты комиссионных) составит

$$P = 100\,000\left(1 - \frac{55}{360}\,0{,}08\right) = 98777{,}78 \text{ руб.}$$

Операции начисления простых процентов и дисконтирования по учетной ставке могут совмещаться, например, при учете платежного обязательства, предусматривающего начисление простых процентов.

Учет платежного обязательства с начислением простых процентов

$$P_2 = P_1(1 + n_1 i)(1 - n_2 d), \qquad (1.14)$$

где P_1 — первоначальная сумма ссуды; P_2 — сумма, получаемая при учете обязательства; n_1 — общий срок платежного обязательства (срок начисления процентов); n_2 — срок от момента учета обязательства до даты погашения долга, $n_2 \leqslant n_1$.

Пример 1.8. Обязательство уплатить через 180 дней 30 тыс. руб. с процентами (6% годовых) было учтено в банке за 120 дней до наступления срока, учетная ставка 7,5%. Полученная при учете сумма без комиссионных составит

$$P_2 = 30\left(1 + \frac{180}{365}\,0{,}06\right)\left(1 - \frac{120}{360}\,0{,}075\right) = 30{,}115 \text{ тыс. руб.}$$

Учет портфеля векселей (операция «а форфэ» — целиком, общей суммой) с последовательными сроками уплаты по ним рассматривается в 4.3, 7.4.

1.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ ССУДЫ И УРОВНЯ ПРОЦЕНТНОЙ СТАВКИ

При разработке условий контрактов иногда возникает необходимость в определении срока ссуды или уровня процентной ставки при всех прочих заданных условиях.

Формулы для расчета продолжительности ссуды в годах и днях:

срок ссуды в годах

$$n = \frac{S-P}{Pi}; \qquad (1.15) \qquad\qquad n = \frac{S-P}{Sd}; \qquad (1.16)$$

срок ссуды в днях

$$\partial = \frac{S-P}{Pi}K; \qquad (1.17) \qquad\qquad \partial = \frac{S-P}{Sd}K. \qquad (1.18)$$

Простые процентные ставки определяются следующим образом:

ставка процентов

$$i = \frac{S-P}{Pn} = \frac{S-P}{P\partial}K; \qquad (1.19)$$

учетная ставка

$$d = \frac{S-P}{Sn} = \frac{S-P}{Sd}K, \qquad (1.20)$$

где K — временна́я база начисления процентов, $K=365$ (366) или 360.

Пример 1.9. Какова должна быть продолжительность ссуды в днях для того, чтобы долг, равный 10 тыс. руб., вырос до 10,5 тыс. руб. при условии, что на сумму долга начисляются простые проценты ($K=365$) по ставке 8%?

По формуле (1.17) находим

$$\partial = \frac{10{,}5-10}{10\cdot 0{,}08}365 = 228{,}1 \approx 228 \text{ дней.}$$

Пример 1.10. В контракте предусматривается погашение долга через 120 дней в сумме 12 тыс. руб., первоначальная сумма долга — 11,5 тыс. руб. Необходимо определить величину учетной ставки. По формуле (1.20) получим

$$d = \frac{12-11{,}5}{12\cdot 120}360 = 0{,}125, \text{ т. е. } 12{,}5\%.$$

1.5. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ПРОСТЫХ ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК

Эквивалентными считаются такие значения различающихся по своему виду процентных ставок, применение которых в однотипных по назначению операциях приводит к одинаковым финансовым результатам. В силу сказанного для участвующих в сделке сторон в принципе не имеет значения, какая из эквивалентных ставок фигурирует в соответствующем контракте.

Понятие эквивалентности ставок положено в основу ряда методов количественного финансового анализа, в частности, при: 1) сравнении ставок, применяемых в различных финансовых сделках, соглашениях; 2) определении эффективности финансово-кредитных операций (в этом случае определяются эквивалентные годовые ставки простых или сложных процентов); 3) безубыточной замене одного вида процентных ставок и метода их начисления другими.

Приведем формулы для определения эквивалентных ставок i и d для случаев, когда срок ссуды измеряется в годах и днях. При измерении срока ссуды в годах (n) и одинаковой временной базе:

$$i = \frac{d}{1 - nd}; \quad (1.21) \qquad d = \frac{i}{1 + ni}. \qquad (1.22)$$

Если временна́я база при применении i и d различается (K=365 и 360 дней), то формулы (1.21) и (1.22) дают несколько смещенные результаты. Точные результаты получаются по формулам (1.25) и (1.26).

Пример 1.11. Определить значение учетной ставки, эквивалентной ставке процентов, равной 10%, при наращении процентов за год.

Находим: d=0,1 : (1+0,1)=0,0909. Отсюда следует, что операция, в которой принята учетная ставка 9,09%, дает для годового периода такой же финансовый результат (например, доход для владельца денег), что и простая ставка процентов, равная 10% годовых.

Для одних и тех же параметров ссуды условие эквивалентности приводит к тому, что $d<i$. Например, при $n=1$ соотношения между эквивалентными ставками i и d при одинаковой временно́й базе характеризуются следующими величинами:

d, %	i, %
5	5,2632
6	6,3830
7	7,5269
8	8,6956
9	9,8901
10	11,1111

i, %	d, %
5	4,7619
6	5,6604
7	6,5421
8	7,4074
9	8,2569
10	9,0909

Как видно из (1.21) и (1.22), соотношения эквивалентных простых ставок зависят от продолжительности ссуды. С ростом

n различие между эквивалентными i и d становится более ощутимым. Например, для $d=10\%$ эквивалентные значения i равны:

n, число лет	0,2	0,5	1	2	3	5
i, %	10,02	10,05	11,11	12,5	14,28	20,0

При измерении срока ссуды в днях используются следующие формулы эквивалентности ставок:

а) если временна́я база при применении ставки процентов и учетной ставки одинакова ($K=360$ дней)

$$i=\frac{360d}{360-\delta d}; \quad (1.23) \qquad d=\frac{360i}{360+\delta i}; \quad (1.24)$$

б) если временна́я база для ставки процентов равна 365, а учетной ставки — 360 дням

$$i=\frac{365d}{360-\delta d}; \quad (1.25) \qquad d=\frac{360i}{365+\delta i}. \quad (1.26)$$

В табл. П.2 содержатся значения i, полученные по формуле (1.25). Эта формула дает возможность определить доходность операции учета в виде годовой ставки простых процентов.

Пример 1.12. Какова доходность, измеренная в виде ставки простых процентов, учета векселя по учетной ставке 10%. Срок уплаты по векселю — 250 дней. Если ставка простых процентов определяется по временно́й базе $K=365$ (точные проценты), то согласно (1.25) находим

$$i=\frac{365\cdot 0{,}1}{360-250\cdot 0{,}1}=0{,}10896, \text{ т. е. } 10{,}896\%.$$

Пример 1.13. Операция учета должна принести 12% дохода (в расчете на год). Срок ссуды 55 дней. Если временна́я база простых процентов 365 дней, то согласно (1.26) искомая учетная ставка составит

$$d=\frac{360\cdot 0{,}12}{365+55\cdot 0{,}12}=0{,}1162, \text{ т. е. } 11{,}62\%.$$

1.6. НАРАЩЕНИЕ ПРОЦЕНТОВ В ПОТРЕБИТЕЛЬСКОМ КРЕДИТЕ (РАВНОМЕРНАЯ ВЫПЛАТА ПРОЦЕНТОВ)

В потребительском кредите проценты, как правило, начисляются на всю сумму кредита и присоединяются к основному долгу в момент выдачи кредита. Погашение долга с процентами производится частями, равномерно на протяжении всего срока кредита.

Наращенная сумма долга

$$S = P(1 + ni);\qquad (1.27)$$

сумма погасительного платежа

$$q = S : nm,\qquad (1.28)$$

где q — сумма погасительного платежа; n — срок кредита в годах; m — число погасительных платежей в году.

В связи с тем что проценты начисляются на первоначальную сумму долга, а фактическая сумма долга систематически уменьшается во времени, действительная процентная ставка (по фактически использованному кредиту) оказывается заметно выше, чем ставка по условию кредита (см. табл. 7.2).

Пример 1.14. Кредит для покупки товара на сумму 1000 руб. открыт на три года, процентная ставка — 4%, погашение в конце каждого месяца. Сумма, которая должна быть погашена за три года, составит $S = 1000(1+3\cdot 0{,}04) = 1120$ руб. Ежемесячный погасительный платеж равен $1120 : (3 \cdot 12) = 31{,}11$ руб.

1.7. ИЗМЕНЕНИЕ УСЛОВИЙ КОНТРАКТОВ (ЗАМЕНА ПЛАТЕЖЕЙ)

При изменении условий контрактов, например при объединении платежей или, наоборот, замене одного платежа несколькими с различными сроками, изменении срока платежа, участвующие в сделке стороны обычно руководствуются принципом *финансовой эквивалентности платежей*. Этот принцип предполагает постоянство финансовых обязательств сторон до и после упомянутых изменений. Эквивалентными считаются такие платежи, которые, будучи приведенными по заданной процентной ставке к одному моменту времени, оказываются равными. Принцип финансовой эквивалентности лежит в основе многих видов финансовых расчетов. Наиболее простыми из них являются задачи, связанные с объединением (консолидацией) платежей при заданном сроке платежа или при определении срока этого платежа при заданной его сумме. Ниже приводятся формулы для решения этих задач при применении простых процентных ставок.

Пусть объединяются платежи $S_1 \dots S_m$ со сроками $n_1 \dots n_m$. Сумма платежа по новому условию — S_0, его срок n_0. Консолидация на основе простой ставки процентов осуществляется следующим образом:

сумма консолидированного платежа ($n_0 \geqslant n_1 \dots n_m$)

$$S_0 = \sum_j S_j(1 + t_j i),\qquad (1.29)$$

где t_j — временной интервал между сроками n_0 и n_j, $t_j = n_0 - n_j$.

Пример 1.15. Два платежа — $S_1 = 100$ тыс. руб. и $S_2 = 50$ тыс. руб. со сроками 150 дней и 180 дней (отсчитываемыми от одной базы) заменяются одним со сроком 200 дней. Если стороны согласились на замену при использовании ставки, равной 6% годовых, то

$$S_0 = 100(1 + \frac{50}{365}0{,}06) + 50(1 + \frac{20}{365}0{,}06) = 150{,}86 \text{ тыс. руб.}$$

Если срок платежа по новому обязательству не меньше n_1, но не больше n_m, то

сумма консолидированного платежа

$$S_0 = \sum_j S_j(1 + t_j i) + \sum_k S_k(1 + t_k i)^{-1}, \qquad (1.30)$$

где S_j — суммы объединяемых платежей со сроками n_j, $n_j \leqslant n_0$; S_k — суммы объединяемых платежей со сроками n_k, $n_k > n_0$. Соответственно $t_j = n_0 - n_j$; $t_k = n_k - n_0$.

При определении t_j и t_k удобно воспользоваться таблицей порядковых чисел дней в году — см. табл. П.1.

Пример 1.16. Решено, использовав простые проценты, консолидировать (объединить) 3 платежа со сроками 15.05, 15.06, 15.08, суммы платежей 10, 20, 15 тыс. руб. Срок консолидированного платежа — 01.08. По условиям задачи $S_1 = 10$, $S_2 = 20$, $S_3 = 15$, $t_1 = 78$, $t_2 = 47$, $t_3 = 14$ дней.

При условии, что ставка простых процентов равна 8%, получим

$$S_0 = 10(1 + \frac{78}{365}0{,}08) + 20(1 + \frac{47}{365}0{,}08) + 15(1 + \frac{14}{365}0{,}08)^{-1} =$$
$$= 45{,}331 \text{ тыс. руб.}$$

При консолидации платежей на основе простой учетной ставки применимы формулы:

сумма консолидированного платежа $(n_0 \geqslant n_j)$

$$S_0 = \sum_j S_j(1 - t_j d)^{-1}; \qquad (1.31)$$

сумма консолидированного платежа $(n_j < n_0 < n_k)$

$$S_0 = \sum_j S_j(1 - t_j d)^{-1} + \sum_k (1 - t_k d). \qquad (1.32)$$

Пример 1.17. Два векселя со сроками 10.06 (10 тыс. руб.) и 01.08 (20 тыс. руб.) заменяются одним с продлением срока до 01.10. При объединении векселей применена учетная ставка 8%. Сроки пролонгации составят 113 и 61 день. Сумма нового векселя согласно (1.31) равна:

$$S_0 = 10(1 - \frac{113}{360}0{,}08)^{-1} + 20(1 - \frac{61}{360}0{,}08)^{-1} = 30{,}532 \text{ тыс. руб.}$$

Продолжительность срока ссуды при консолидации платежей с разными сроками может быть определена для двух вариантов, в первом величина нового платежа равна сумме заменяемых платежей, во втором она задается. Если сумма нового платежа равна сумме заменяемых платежей, то

срок нового платежа ($S_0=\Sigma S_j$)

$$n_0=\frac{\Sigma S_j n_j}{S_0}. \qquad (1.33)$$

Таким образом, срок n_0 не зависит от процентной ставки и равен средней арифметической взвешенной сроков объединяемых платежей. В качестве весов берутся суммы платежей.

Для случая, когда сумма S_0 задается и не равна ΣS_j, срок n_0 определяется по формуле:

срок нового платежа ($S_0 \neq \Sigma S_j$)

$$n_0=\frac{S_0/A-1}{i}, \qquad (1.34)$$

где A — сумма приведенных на базовую дату платежей.

Из (1.34) следует, что величина нового платежа не может быть меньше A.

Пример 1.18. Пусть заменяемые платежи имеют такие же размеры и сроки выплат, как и в примере 1.16. Если по новому соглашению единовременный платеж равен сумме консолидируемых, т. е. 45 тыс. руб., а начало отсчета времени приходится на 31.12 предыдущего года (соответственно $n_1=135$, $n_2=166$ и $n_3=227$ дней), то срок нового платежа приходится на

$$n_0=\frac{10\cdot 135+20\cdot 166+15\cdot 227}{45}\approx 180 \text{ день.}$$

Если же сумма консолидированного платежа задана, скажем, равной 46 тыс. руб., тогда из условия эквивалентности

$$A=10\left(1+\frac{135}{365}0{,}08\right)^{-1}+20\left(1+\frac{166}{365}0{,}08\right)^{-1}+15\left(1+\frac{227}{365}0{,}08\right)^{-1}=$$

$$=43{,}2996\approx 43;$$

так как $A<S_0$, то решение возможно:

$$n_0=\frac{\frac{46}{43{,}3}-1}{0{,}08}=0{,}779 \text{ года, или } 285 \text{ дней.}$$

Для более общих случаев изменений условий контрактов нет готовых формул. Расчет искомой суммы S_0 осуществляется на основе *уравнения эквивалентности*, в котором сумма приведенных платежей по старым условиям контракта равна сумме приведенных на тот же момент времени платежей по новому (измененному) соглашению. Вид этого уравнения определяется конкретным содержанием контрактов, поэтому методику разработки уравнения эквивалентности удобнее показать на примере.

Пример 1.19. Имеются обязательства уплатить 10 тыс. и 5 тыс. руб., даты платежей 01.11 и 01.01. Эти обязательства заменяются новым, условия которого: должник 01.12 уплачивает 6 тыс. руб., остальной долг он гасит 01.03 следующего года. Необходимо найти сумму нового платежа S_0 при условии, что ставка процентов сохраняется на прежнем уровне.

Возьмем в качестве даты приведения 01.01, тогда уравнение эквивалентности имеет вид

$$10\,000\left(1+\frac{61}{365}0{,}06\right)+5000=6000\left(1+\frac{31}{365}0{,}06\right)+\frac{S_0}{1+\frac{59}{365}0{,}06}.$$

В этом случае $S_0=9158$. Если же принять в качестве базовой иную дату, например 01.03, то уравнение эквивалентности примет вид

$$10\,000\left(1+\frac{120}{365}0{,}06\right)+5000\left(1+\frac{59}{365}0{,}06\right)=6000\left(1+\frac{90}{365}0{,}06\right)+S_0.$$

Отсюда $S_0=9157$. Ответ слегка отличается от предыдущего. За базовую можно было бы взять и другую дату. При этом обнаруживается, что сдвиг базовой даты каждый раз несколько изменяет результат[1].

Глава 2. СЛОЖНЫЕ ПРОЦЕНТЫ

2.1. НАЧИСЛЕНИЕ СЛОЖНЫХ ГОДОВЫХ ПРОЦЕНТОВ

В долгосрочных финансово-кредитных операциях, если проценты не выплачиваются сразу после их начисления, а присоединяются к сумме долга, для наращения суммы ссуды применяют *сложные проценты*. База для начисления сложных процентов (в отличие от простых) не остается постоянной — она увеличивается с каждым шагом во времени, и процесс роста первоначальной суммы ссуды (ее наращение) происходит с ускорением. Наращение по сложным процентам можно представить как периодическое реинвестирование средств, вложенных под простой процент на один период начисления.

В практических расчетах в основном применяют так называемые *дискретные проценты*, т. е. проценты, начисляемые за фиксированные одинаковые интервалы времени (год, полугодие, квартал и т. д.). Иначе говоря, время рассматривается как дис-

[1] Замеченная зависимость результата от выбора базовой даты при применении простых процентов объясняется очевидным соотношением $(1+ni)\neq(1+n_1i)(1+n_2i)$, где $n=n_1+n_2$.

кретная переменная. В некоторых случаях — в доказательствах и расчетах, связанных с непрерывными процессами, в общих теоретических построениях, а иногда и на практике — возникает необходимость в применении *непрерывных процентов*. Эти проценты начисляются за бесконечно малые промежутки времени.

В зависимости от условий оценки и контракта ставка сложных процентов может быть постоянной или изменяться во времени.

Для записи приведенных в главе формул используются следующие общие обозначения:

P — первоначальная сумма ссуды;
S — наращенная сумма ссуды;
n — продолжительность ссуды в годах;
m — число начислений процентов в году;
N — общее число периодов начисления процентов;
i (или i_c) — ставка сложных годовых процентов, эффективная ставка процентов;
$i_п$ — ставка простых процентов;
j — номинальная годовая ставка процентов;
d — простая учетная ставка;
d_c — сложная учетная ставка;
f — номинальная годовая учетная ставка;
δ — сила роста (ставка непрерывных процентов);
q — множитель наращения по сложным процентам;
v — дисконтный множитель (дискретные проценты);
μ — множитель наращения (непрерывные проценты);
w — дисконтный множитель (непрерывные проценты);
e — основание натуральных логарифмов;
∂ — число дней ссуды.

Дополнительные обозначения поясняются в каждом отдельном случае.

Постоянная ставка процентов. В этом случае применяется формула

наращенная сумма

$$S = P(1 + i)^n. \tag{2.1}$$

Значения множителя наращения $q^n = (1 + i)^n$ для целых чисел n приведены в таблице сложных процентов (табл. П.3). В этой таблице множители наращения определены для n от 1 до 50, 60, ..., 90, 100 лет. Если значение n, для которого ищут множитель наращения, не содержится в таблице, то искомую величину находят как произведение табличных значений множителя для n_1 и n_2 (для которых эти значения имеются), причем $n = n_1 + n_2$. Например, для $n = 62$ годам находим $(1+i)^{62} = (1+i)^{60}(1+i)^2$.

Для случаев, когда n не является целым числом, множитель наращения определяется двумя способами:

1) по формуле (2.1); в этом случае

$$(1+i)^n = (1+i)^{n_a}(1+i)^{n_b}; \qquad (2.2)$$

2) на основе смешанного метода

$$(1+i)^{n_a}(1+n_b i), \qquad (2.3)$$

где $n = n_a + n_b$, n_a — целое число лет, n_b — дробная часть года.

При выборе метода расчета множителя наращения следует иметь в виду, что величина множителя наращения по второму способу получается больше, чем по первому, т. е.

$$(1+i)^{n_a}(1+n_b i) > (1+i)^n.$$

В практике некоторых финансовых организаций предусматривается начисление процентов только за целые периоды начисления.

Пример 2.1. В какую сумму обратится долг, равный 10 тыс. руб., через 5 лет при росте по сложной ставке 5,5%? По таблице сложных процентов (табл. П.3) находим $1{,}055^5 = 1{,}30696$, откуда $S = 13069{,}6$ руб.

Пусть теперь срок ссуды превышает 50 лет, например $n = 52$ года. В этом случае находим два табличных значения множителя: $1{,}055^{50}$ и $1{,}055^2$. После чего

$$S = 10\,000 \cdot 1{,}055^{52} = 10\,000 \cdot 1{,}055^{50} \cdot 1{,}055^2 =$$
$$= 10\,000 \cdot 14{,}541961 \cdot 1{,}113025 = 161855{,}66 \text{ руб.}$$

Пример 2.2. Кредит в размере 30 тыс. руб. выдан на срок 3 года и 160 дней. Если обусловленная в контракте ставка равна 6,5% и предусмотрен смешанный метод начисления процентов, то сумма долга на конец срока составит

$$S = 30\,000 \cdot 1{,}065^3\left(1 + \frac{160}{365}0{,}065\right) = 37271{,}04 \text{ руб.}$$

Расчет по формуле (2.1) дает

$$S = 30\,000 \cdot 1{,}065^3 \cdot 1{,}065^{160/365} = 37252{,}8 \text{ руб.}$$

Приближенный расчет множителя наращения. При отсутствии необходимых табличных данных или соответствующего калькулятора множитель наращения можно приближенно рассчитать с помощью линейной интерполяционной формулы

$$q^n = q_н^n + \frac{i - i_н}{i_в - i_н}(q_в^n - q_н^n), \qquad (2.4)$$

где q^n — интерполяционная оценка множителя наращения; $i_в$ и $i_н$ — верхнее и нижнее значения ставки процентов; $q_в^7$ и $q_н^n$ — соответствующие верхнее и нижнее табличные значения множителя.

Значение множителя, полученное по интерполяционной формуле (2.4), всегда больше точного, причем чем меньше разность $i_в - i_н$, тем точнее интерполяционная оценка. Интерполяционный метод следует применять лишь при ориентировочных расчетах или в операциях с незначительными исходными денежными суммами.

Поскольку в финансовых вычислениях конечный результат обычно представляет собой денежную сумму, то точность расчетов определяется допустимой степенью ее округления. Как правило, расчет ведется до последней денежной единицы.

Пример 2.3. Определить множитель наращения для $i = 6{,}2\%$, $n = 10$ лет. Ближайшие табличные значения множителя (табл. П. 3) имеются только для $i = 6\%$ и $i = 6{,}25\%$; они равны 1,7908477 и 1,8335358. Соответственно интерполяционное значение множителя наращения для $i = 6{,}2\%$ составит

$$q^n = 1{,}7908477 + \frac{0{,}062 - 0{,}06}{0{,}0625 - 0{,}06}(1{,}8335358 - 1{,}7908477) = 1{,}8249982.$$

Точное значение множителя равно 1,8249256. Расхождение между результатами, полученными по точной и интерполяционной формулам, проявилось здесь в пятом десятичном знаке.

Переменная ставка процентов. Если в условиях контракта предусматривается изменение уровня ставки процентов во времени, то для начисления процентов применяют формулу наращенная сумма

$$S = P(1 + i_1)^{n_1}(1 + i_2)^{n_2} \ldots (1 + i_k)^{n_k}, \tag{2.5}$$

где $i_1, i_2, \ldots, i_k$ — последовательные во времени значения ставок; $n_1, n_2, \ldots, n_k$ — периоды, в течение которых применяются соответствующие ставки.

Пример 2.4. Ставка по ссуде установлена на уровне 8,5% годовых плюс маржа 0,5% в первые два года, 0,75% в следующие три года. Множитель наращения за пять лет в этом случае составит

$$1{,}09^2 \cdot 1{,}0925^3 = 1{,}5492351.$$

Начисление процентов и инфляция. В формулах наращения (2.1), (2.5) все денежные величины измерялись по номиналу, т. е. изменение во времени покупательной способности денег не принималось во внимание. Компенсация инфляции часто осуществляется корректировкой процентной ставки $i = (1 + r)(1 + \tau) - 1 = r + \tau + r\tau$.

Множитель наращения с поправкой процентной ставки на инфляцию

$$(1+i)^n=(1+r)^n(1+\tau)^n, \qquad (2.6)$$

где i — *ставка-брутто*, ставка процентов, учитывающая инфляцию; r — ставка процентов, характеризующая реальную доходность ссудной операции; τ — годовой темп инфляции.

Инфляция, если она относится к прошлому, может быть охарактеризована общим индексом инфляции $I_{\text{ин}}$, тогда вместо $(1+\tau)^n$ берется значение этого индекса за соответствующий период. Найденное по формуле (2.6) значение i полностью компенсирует влияние инфляции в ссудной операции.

На практике часто применяют приближенное определение ставки с учетом инфляции:

$$i=r+\tau. \qquad (2.7)$$

Формула (2.7) дает приемлемые результаты только при небольших значениях r и τ. Реальная доходность ссудной операции определяется как $r=\frac{1+i}{1+\tau}-1$, приближенно $r=i-\tau$.

Пример 2.5. Сумма ссуды $P=10$ тыс. руб., реальная доходность ссудной операции определена в размере 5%, срок 10 лет. Наращенная сумма в этом случае $S=10\,000\cdot 1{,}05^{10}=16288{,}95$. Если общий темп инфляции за период равен $I_{\text{ин}}=1{,}5$, то множитель наращения с компенсацией инфляции составит $1{,}05^{10}\cdot 1{,}5=2{,}44334$, соответственно необходимо получить $S=24433{,}42$.

Пример 2.6. Пусть в условиях примера 2.5 ожидается, что ежегодный темп инфляции будет равен 6% в год. Тогда точное значение ставки процентов, которые компенсируют потерю покупательной способности денег, равно: $i=0{,}05+0{,}06+0{,}05\times 0{,}06=0{,}113$, т. е. 11,3%, приближенное значение (формула (2.7)) — 11%. Множители наращения за 10 лет составят: $1{,}113^{10}=1{,}9171$ и $1{,}11^{10}=1{,}83942$.

2.2. СООТНОШЕНИЕ РОСТА ПО ПРОСТЫМ И СЛОЖНЫМ ГОДОВЫМ ПРОЦЕНТАМ

Соотношение значений множителей наращения по простым и сложным годовым ставкам процентов при одинаковой абсолютной величине ставок зависит от срока ссуды:

для срока меньше года $(n<1)$

$$(1+ni_{\text{п}})>(1+i_{\text{с}})^n;$$

для срока больше года $(n>1)$

$$(1+ni_{\text{п}})<(1+i_{\text{с}})^n,$$

где $i_{\text{п}}$ и $i_{\text{с}}$ — ставки простых и сложных процентов;

для срока, равного году $(n=1)$, множители наращения равны друг другу при условии, что временная база для начисления простых процентов 365 (366) дней, если же она равна 360 дням, то множитель наращения по простым процентам меньше, чем по сложным. С увеличением срока (при $n>1$) различие в последствиях применения простых и сложных процентов усиливается

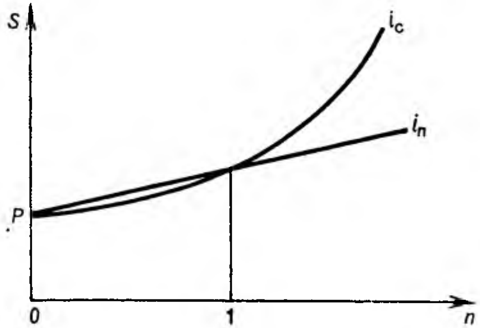

Рис. 2.1. Наращение по сложным (i_c) и простым (i_n) ставкам процентов

(рис. 2.1). Для иллюстрации в табл. 2.1 приводятся множители наращения по простым и сложным ставкам для разных сроков ссуды.

Таблица 2.1

Сравнение множителей наращения ($i_n = i_c = 8\%$)

Множители наращения *	Срок ссуды						
	30 дней	180 дней	1 год	5 лет	10 лет	50 лет	100 лет
$1 + ni_n$	1,00657	1,0394	1,08	1,4	1,8	5,0	9,0
$(1 + i_c)^n$	1,00635	1,087	1,08	1,1693	2,1589	46,9	2199,8

* Множители наращения определены для временно́й базы $K = 365$ дней.

Формулы удвоения. Влияние ставки процентов на процесс наращения наглядно можно представить, сопоставив числа лет

Таблица 2.2

Числа лет, необходимые для удвоения первоначальной суммы при сложных и простых процентах

Ставка процентов, %	Число лет	
	сложные проценты	простые проценты
2	35	50
5	14,2	20
8	9,0	12,5
10	7,3	10

(табл. 2.2), необходимые для удвоения первоначальной суммы. Для определения этих чисел применяют *формулы удвоения*:

1) удвоение по простым процентам $n=1/i_п$;

2) удвоение по сложным процентам $n=\log 2/\log(1+i_с)$.

Формулы эквивалентности простых и сложных процентных ставок приведены в 2.7.

2.3. НАЧИСЛЕНИЕ СЛОЖНЫХ ПРОЦЕНТОВ m РАЗ В ГОДУ

Начисление сложных процентов часто осуществляется не один, а m раз в году. В этом случае в контракте оговаривается *номинальная ставка процентов* j — годовая ставка, исходя из которой определяется величина ставки, применяемая в каждом периоде начисления. Если проценты начисляют m раз в году, то в каждом периоде применяют ставку j/m. С увеличением m процесс наращения суммы ссуды ускоряется.

Наращенная сумма (начисление процентов m раз в году)

$$S=P(1+j/m)^N. \tag{2.8}$$

Если количество периодов начисления N — целое число, то при определении величины множителя наращения $(1+j/m)^N$ можно воспользоваться таблицей сложных процентов (табл. П. 3). В этом случае берется то табличное значение множителя, которое соответствует значению $i=j/m$, а вместо n — общее число периодов начисления N. Например, для $j=12\%$ и поквартальном начислении процентов в течение 5 лет находят табличное значение для $i=\frac{12}{4}=3\%$ и $N=4\cdot5=20$, которое равно $1{,}03^{20}$.

Пример 2.7. Первоначальная сумма ссуды 10 тыс. руб., срок 5 лет, проценты начисляются в конце каждого квартала, номинальная годовая ставка 5%. Требуется определить наращенную сумму. По условиям задачи $P=10\,000$, $j=0{,}05$, $m=4$, $n=5$, откуда $S=10\,000(1+0{,}05/4)^{4\cdot5}=12820{,}37$ руб., или, используя табл. П.3, находим множитель наращения для $i=5/4=1{,}25\%$ и $N=4\cdot5=20$, он равен 1,282037.

Пусть теперь срок кредита не 5, а 16 лет, в этом случае $N=4\cdot16=64$, и необходимое значение множителя наращения составит $1{,}0125^{60}\cdot1{,}0125^{4}=2{,}214532$.

В случае когда срок ссуды характеризуется дробным числом периодов начисления: $N=mn+l$, где l — дробная часть периода начисления, применяют два метода:

$$1)\quad S=P(1+j/m)^N=P(1+j/m)^{mn}(1+j/m)^l; \tag{2.9}$$

$$2)\quad S=P(1+j/m)^{mn}(1+lj/m). \tag{2.10}$$

Во втором варианте используется смешанный метод: для целого числа периодов применяются сложные проценты, а для дробного — простые.

Пример 2.8. Во что обратится сумма, равная 10 тыс. руб., через 25 месяцев, если проценты начисляются ежеквартально. Номинальная ставка равна 6%. По условиям задачи $N = 25 : : 3 = 8\frac{1}{3}$, причем $mn=2 \cdot 4=8$, $l=1/3$. Откуда $S = 10\,000 \times \times (1 + 0{,}06/4)^8 \cdot (1 + 0{,}06/4)^{1/3} = 10\,000 \cdot 1{,}126493 \cdot 1{,}004975 = = 11320{,}97$ руб.

Начисление процентов за один месяц (или $1/3$ квартала) дало дополнительное увеличение суммы почти на 0,5%. На основе смешанного метода получим $S = 10\,000(1 + 0{,}06/4)^8(1 + 1/3 \times \times 0{,}06/4) = 11321{,}25$ руб.

2.4. ДИСКОНТИРОВАНИЕ ПО СЛОЖНОЙ СТАВКЕ ПРОЦЕНТОВ

К дисконтированию по сложным процентным ставкам денежных величин — платежей, размеров задолженности и т. д. — прибегают в тех же случаях, что и при дисконтировании на основе простых ставок (см. 1.3). Приведем формулы для дисконтирования по сложным ставкам процентов один и m раз в году.

Дисконтирование при сложной годовой ставке процентов

$$P = Sv^n, \tag{2.11}$$

где v^n — дисконтный множитель за n лет.

$$v^n = \frac{1}{(1+i)^n} = (1+i)^{-n}. \tag{2.12}$$

Значения дисконтных множителей для целого числа лет приведены в табл. П. 4. Если необходимое значение n не содержится в этой таблице, то дисконтный множитель находится как произведение двух табличных значений множителя — для n_1 и n_2, причем $n_1+n_2=n$. При отсутствии необходимых табличных данных дисконтный множитель можно оценить с помощью линейной интерполяции, см. формулу (2.4), где q заменяется на v.

Величину P, полученную дисконтированием S, часто называют современной (приведенной) величиной $\cdot S$. Она характеризует ту исходную (базовую) сумму, начисление процентов на которую даст величину S. (О роли современной величины в финансово-экономическом анализе см. 1.3.) Современная величина может быть определена на любой момент до выплаты суммы S. Разность $S - P$ в случае, когда P определено по (2.11), называют *дисконтом*.

Пример 2.9. Необходимо определить современную величину 50 тыс. руб., которые будут выплачены через 5 лет. При расчете применяется ставка сложных процентов, равная 5%.

Величину дисконтного множителя находим по табл. П. 4: $1{,}05^{-5}=0{,}78353$. Откуда

$$P = 50 \cdot 1{,}05^{-5} = 50 \cdot 0{,}78353 = 39{,}176 \text{ тыс. руб.}$$

Если на эту сумму наращивать сложные проценты (5%), то к концу пятилетия она увеличится до 50 тыс. руб.

Пусть теперь срок ссуды не 5, а 52 года. Тогда, используя данные табл. П. 4, получим

$$P = 50 \cdot 1{,}05^{-50} \cdot 1{,}05^{-2} = 50 \cdot 0{,}087204 \cdot 0{,}907029 =$$
$$= 3{,}955 \text{ тыс. руб.}$$

Дисконтирование по сложной ставке процентов m раз в году

$$P = Sv^N; \tag{2.13}$$

$$v^N = (1 + j/m)^N, \tag{2.14}$$

где v^N — дисконтный множитель за N периодов.

С увеличением значения m процесс дисконтирования ускоряется. Значения дисконтного множителя v^N, если N — целое число, можно найти в табл. П. 4, где приведены величины множителя v^n. Для этого отыскивается табличное значение множителя, которое соответствует $i=j/m$, вместо n берется общее число периодов $N=mn$. Например, если определяется v^{mn} для $j=12\%$, $m=4$ и $n=5$, то находится табличное значение дисконтного множителя для $i=3\%$ и $n=20$, т. е. $(1+0{,}03)^{-20}$.

Соотношения дисконтных множителей (простая и сложная ставки процентов). Названные соотношения зависят от срока сделки:

для срока меньше года

$$(1 + ni_{\text{п}})^{-1} < (1 + i_{\text{с}})^{-n};$$

для срока больше года

$$(1 + ni_{\text{п}})^{-1} > (1 + i_{\text{с}})^{-n}.$$

С увеличением срока различие в величине дисконтных множителей усиливается.

2.5. ОПЕРАЦИИ СО СЛОЖНОЙ УЧЕТНОЙ СТАВКОЙ

В практике учетных операций иногда используют *сложную учетную ставку*. В этих случаях процесс дисконтирования происходит с замедлением, так как на каждом шаге во времени учетная ставка применяется не к первоначальной сумме (как при учете по простой учетной ставке (см. 1.3)), а к сумме, уменьшенной на величину дисконта, определенного на предыдущем шаге.

Дисконтирование по сложной годовой учетной ставке

$$P = S(1 - d_c)^n. \qquad (2.15)$$

Значения дисконтных множителей при дисконтировании по сложной годовой учетной ставке приведены в табл. П. 15.

П р и м е р 2.10. Какова сумма дисконта при продаже финансового инструмента на сумму 5 тыс. руб., если срок до его погашения равен 2,5 года, а покупатель применил сложную годовую учетную ставку, равную 8%?

$$P = 5 \cdot (1 - 0{,}08)^{2,5} = 5 \cdot 0{,}8118 = 4{,}059 \text{ тыс. руб.}$$

Дисконт составит 5 — 4,059=0,941 тыс. руб.

Соотношения дисконтных множителей (простая и сложная учетные ставки). Указанные соотношения зависят от срока операций. При сроке меньше года сложная учетная ставка дает больший дисконт, чем простая. За пределами года дисконт по сложной учетной ставке меньше, чем по простой. При увеличении срока различие между результатами применения простой и сложной учетных ставок увеличивается. Сказанное иллюстрируется на рис. 2.2 и в табл. 2.3, где сравниваются дисконтные мно-

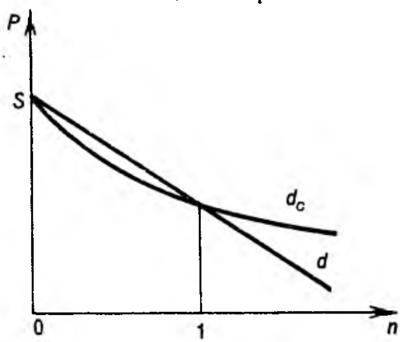

Рис. 2.2. Дисконтирование по сложным (d_c) и простым (d) учетным ставкам

жители, полученные по простым и сложным учетным ставкам (8% годовых) для разных сроков.

Т а б л и ц а 2.3

Сравнение дисконтных множителей ($d = d_c = 8\%$) *

Дисконтные множители	Срок ссуды					
	30 дней	180 дней	1 год	5 лет	10 лет	50 лет
$(1 - nd)$	0,9933	0,96	0,92	0,6	0,2	—
$(1 - d_c)^n$	0,9931	0,9592	0,92	0,6591	0,4344	0,0155

* Временная база при определении дисконтных множителей равна 365 дням

Дисконтирование m раз в году. В этом случае применяют *номинальную учетную ставку f*. В каждом периоде дисконтирование осуществляется по ставке f/m.

Дисконтирование по сложной учетной ставке m раз в году

$$P = S(1 - f/m)^N, \qquad (2.16)$$

где N — общее число периодов дисконтирования.

Дисконтирование не один, а m раз в году замедляет этот процесс и, следовательно, уменьшает сумму дисконта при всех прочих равных условиях.

Пример 2.11. Продолжим пример 2.10. Пусть дисконтирование по сложной учетной ставке производится не один, а 4 раза в году, тогда $m=4$, $f=0{,}08$, $N=2{,}5 \cdot 4=10$ и $P=5(1-0{,}8/4)^{10}=4{,}085$ тыс. руб. Сумма дисконта в этом случае составит $5-4{,}085=0{,}915$ тыс. руб.

Наращение по сложным учетным ставкам. Множитель наращения может быть определен на основе сложных учетных ставок. В этом случае

наращение по сложной годовой учетной ставке

$$S = P\frac{1}{(1-d_c)^n}. \qquad (2.17)$$

Значения множителя наращения $(1-d_c)^{-n}$ для широкого диапазона d_c и n помещены в табл. П.7.

Пример 2.12. Найти наращенную сумму долга, первоначальная сумма которого 10 тыс. руб., срок погашения – 1,5 года. В контракте предусматривается сложная учетная ставка в размере 10%.

$$S = 10\frac{1}{(1-0{,}1)^{1{,}5}} = 11{,}712 \text{ тыс. руб.}$$

Наращение по сложной учетной ставке m раз в году:

$$S = P\frac{1}{(1-f/m)^N}. \qquad (2.18)$$

Значения множителя наращения для некоторых величин f и N можно определить по табл. П.7. При этом находят то табличное значение множителя, которое соответствует $d_c=f/m$ и $n=N$.

Пример 2.13. Если в условиях предыдущего примера наращение по учетной ставке осуществляется не один, а 4 раза в году, то $f=0{,}1$, $m=4$, $N=4 \cdot 1{,}5=6$. По формуле (2.18) получим

$$S = 10\frac{1}{\left(1-\frac{0{,}1}{4}\right)^6} = 11{,}64 \text{ тыс. руб.}$$

2.6. НЕПРЕРЫВНОЕ НАРАЩЕНИЕ И ДИСКОНТИРОВАНИЕ (НЕПРЕРЫВНЫЕ ПРОЦЕНТЫ)

В практических финансово-кредитных операциях непрерывные процессы наращения денежных сумм, т. е. наращение за бесконечно малые промежутки времени, применяются редко. Существенно большее значение непрерывное наращение имеет в количественном финансово-экономическом анализе сложных производственных и хозяйственных объектов и явлений, например при обосновании и выборе инвестиционных решений. Необходимость в применении непрерывного наращения (или непрерывных процессов) определяется прежде всего тем, что многие экономические явления по своей природе непрерывны, поэтому аналитическое описание с помощью непрерывных процентов более адекватно, чем на основе дискретных. Немаловажное значение имеет и то, что с помощью непрерывных процентов удается учесть сложные закономерности процесса наращения, например ввести в расчет изменяющиеся по определенному закону процентные ставки и т. д. Применение непрерывных и дискретных процентов приводит к одинаковым результатам, если используются эквивалентные процентные ставки (см. 2.7). При непрерывном наращивании применяют особый вид процентной ставки — *силу роста*. Сила роста характеризует относительный прирост наращенной суммы в бесконечно малом промежутке времени, ее можно рассматривать и как номинальную ставку процентов (см. 2.3) при $m=\infty$. Она может быть постоянной или изменяться во времени.

Постоянная на всем сроке ссуды сила роста. Для расчета применяются формулы:

наращенная сумма (непрерывная ставка процентов)

$$S = Pe^{\delta n}. \tag{2.19}$$

Значение множителя наращения $e^{\delta n}$ можно найти по табл. П.8 или подсчитать, используя величину e^{δ}. Табличные значения этой функции содержатся в математических справочниках. Величину e^{δ} можно найти с любой степенью точности, непосредственно используя разложение

$$e^{\delta} = 1 + \delta + \frac{\delta^2}{2!} + \frac{\delta^3}{3!} + \ldots \tag{2.20}$$

Поскольку δ меньше 1 (обычно меньше 0,2), то для практических целей достаточно ограничиться тремя – пятью членами этого ряда.

Пример 2.14 Найти значение $e^{\delta n}$, где $\delta=0{,}072$, $n=10$. Находим значение e^{δ}, используя три, четыре, пять членов разложения (2.20):

$$e_3^{0,072} = 1 + 0,072 + \frac{0,072^2}{2} = 1,074592;$$

$$e_4^{0,072} = 1,074592 + \frac{0,072^3}{2 \cdot 3} = 1,0746542;$$

$$e_5^{0,072} = 1,0746542 + \frac{0,072^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 1,0746553.$$

Нижний индекс у e^δ указывает на число суммируемых членов разложения. Окончательно имеем множитель наращения

$$e^{0,072 \cdot 10} = 1,0746553^{10} = 2,0544324.$$

Если сумма ссуды $P=1$ млн. руб., то наращенная ее величина составит $S = 1 \cdot e^{0,072 \cdot 10} = 2,054$ млн. руб.

Непрерывное дисконтирование (δ=const)

$$P = Se^{-\delta n}. \qquad (2.21)$$

Значения дисконтного множителя $e^{-\delta n}$ приведены в табл.П.9. Их можно подсчитать, используя разложение функции

$$e^{-\delta} = 1 - \delta + \frac{\delta^2}{2!} - \frac{\delta^3}{3!} + \ldots + (-1)\frac{\delta^n}{n!} + \ldots \qquad (2.22)$$

Поскольку δ обычно меньше 0,2, то для практических целей достаточно ограничиться тремя — пятью членами ряда.

Переменная сила роста. Процессы наращения и дисконтирования могут предусматривать изменяющуюся во времени непрерывную процентную ставку (силу роста). В этом случае наращенная сумма

$$S = Pe^{\int_0^n \delta_t dt}; \qquad (2.23)$$

дисконтированная величина платежа

$$P = Se^{-\int_0^n \delta_t dt}. \qquad (2.24)$$

Степени множителя наращения и дисконтного множителя определяются заданным законом изменения ставки δ_t во времени. Ниже приводятся формулы для расчета множителя наращения и дисконтного множителя при условии, что сила роста дискретно изменяется во времени, представляет собой линейную функцию от времени и изменяется по геометрической прогрессии.

Если сила роста дискретно изменяется во времени и принимает значения $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$ в интервалах $n_1, n_2, \ldots, n_k$, тогда

$$\int_0^n \delta_t dt = \sum_1^K \delta_t n_t,$$

где $n = \sum_1^K n_t$ — общий срок ссуды.

Множитель наращения (сила роста дискретно изменяется во времени)

или $$\begin{cases} \mu = e^{\sum_1^K \delta_t n_t} & (2.25) \\ \mu = e^{\bar{\delta} n}, & (2.26) \end{cases}$$

где $\bar{\delta}$ — среднее значение силы роста, $\bar{\delta} = (\sum \delta_t n_t) : n$.

Пример 2.15. Предусматривается непрерывное начисление процентов на сумму ссуды, причем сила роста изменяется дискретно: первые два года проценты начисляются по ставке 8%, следующие три года — по 9%, далее в течение 5 лет — по 10%. Для определения множителя наращения находим:

$$\sum \delta_t n_t = 0{,}08 \cdot 2 + 0{,}09 \cdot 3 + 0{,}1 \cdot 5 = 0{,}93.$$

Искомый множитель $\mu = e^{0,93} = 2{,}5345$.

Дисконтный множитель (сила роста дискретно изменяется во времени)

или $$\begin{cases} w = e^{-\sum_0^K \delta_t n_t} & (2.27) \\ w = e^{-\bar{\delta} n}. & (2.28) \end{cases}$$

Символы δ_t, n_t, $\bar{\delta}$ и n имеют тот же смысл, что и в формулах (2.24), (2.25).

Пример 2.16. Дисконтный множитель для условий примера 2.15 составит $w^n = e^{-0,93} = 0{,}39455$.

Если сила роста изменяется во времени по линейному закону $\delta_t = \delta_0 + at$, где δ_0 — величина силы роста для $t=0$, a — годовой прирост (он может быть как положительным, так и отрицательным), тогда

$$\int_0^n \delta_t \mathrm{d}t = \int_0^n (\delta_0 + at)\,\mathrm{d}t = \delta_0 n + \frac{an^2}{2};$$

множитель наращения ($\delta_t = \delta_0 + at$)

$$\mu = e^{\delta_0 n + an^2/2}. \tag{2.29}$$

Пример 2.17. Пусть начальное значение силы роста равно 8%, ежегодный абсолютный прирост 2%. Найти множитель наращения. В этих условиях $\delta_0 = 0{,}08$ и $a = 0{,}02$. Если $n = 5$, то искомый множитель находится так:

$$\mu = e^{0{,}08 \cdot 5 + \frac{0{,}02 \cdot 5^2}{2}} = e^{0{,}65} = 1{,}91554;$$

дисконтный множитель ($\delta_t = \delta_0 + at$)

$$w = e^{-\left(\delta_0 n + \frac{an^2}{2}\right)}. \qquad (2.30)$$

Пример 2.18. Дисконтный множитель для условий примера 2.17 равен $w = e^{-0{,}65} = 0{,}52204$.

Если сила роста изменяется по геометрической прогрессии $\delta_t = \delta_0 a^t$, где δ_0 — начальное значение процентной ставки (значение силы роста для $t = 0$), a — знаменатель геометрической прогрессии (годовой коэффициент роста), то (см. приложение 2)

$$\int_0^n \delta_t dt = \frac{\delta_0}{\ln a} (a^n - 1);$$

множитель наращения ($\delta_t = \delta_0 a^t$)

$$\mu = e^{\frac{\delta_0}{\ln a}(a^n - 1)}. \qquad (2.31)$$

Пример 2.19. Начальный уровень силы роста равен 8%. Предполагается, что процентная ставка ежегодно увеличивается на 20% ($a = 1{,}2$), срок ссуды 5 лет. Множитель наращения в этом случае составит

$$\mu = e^{\frac{0{,}08}{1{,}2}(1{,}2^5 - 1} = e^{0{,}653053} = 1{,}921397;$$

дисконтный множитель ($\delta_t = \delta_0 a^t$)

$$w = e^{\frac{-\delta_0}{\ln a}(a^n - 1)}. \qquad (2.32)$$

Если закон изменения силы роста задан в виде $\delta_t = \delta_0 e^{\gamma t}$, где γ — непрерывный темп изменения процентной ставки, то

$$\int_0^n \delta_t dt = \delta_0 \int_0^n e^{\gamma t} dt = \frac{\delta_0}{\gamma} (e^{\gamma n} - 1);$$

множитель наращения ($\delta_t = \delta_0 e^{\gamma t}$)

$$\mu = e^{\frac{\delta_0}{\gamma}(e^{\gamma n} - 1)}. \qquad (2.33)$$

Этот множитель даст такой же результат, что и вычисленный по формуле (2.31) при условии, что $\gamma = \ln a$.

Дисконтный множитель ($\delta_t = \delta_0 e^{\gamma t}$)

$$w = e^{\frac{-\delta_0}{\gamma}(e^{\gamma n} - 1)}. \qquad (2.34)$$

2.7. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК

Понятие эквивалентности ставок раскрыто в 1.5. Там же приведены формулы эквивалентности простых процентных и и учетных ставок. Ниже представлены формулы эквивалентности простых и сложных процентных ставок различного вида. Замена в контракте одного вида ставки на эквивалентную ей ставку при сохранении всех остальных условий не приводит к изменению отношений участвующих в сделке сторон.

Эквивалентность дискретных простых и сложных ставок. Для расчетов используются формулы:

простая и сложная годовые ставки процентов

$$i_п = \frac{(1 + i_с)^n - 1}{n}, \quad (2.35) \qquad i_с = \sqrt[n]{1 + ni_п} - 1, \quad (2.36)$$

где $i_п$ и $i_с$ — простая и сложная годовые ставки процентов;

простая номинальная ставка сложных процентов (начисление процентов раз в году)

$$i_п = \frac{(1 + j/m)^N - 1}{n}, \quad (2.37) \qquad j = m(\sqrt[N]{1 + ni_п} - 1). \quad (2.38)$$

Пример 2.20. Кредит предоставляется из 6 сложных годовых процентов. Какова эквивалентная ставка простых процентов при сроках кредита а) 10 лет, б) 160 дней?

$$а)\ i_п = \frac{1{,}06^{10} - 1}{10} = 0{,}07908, \text{ или } 7{,}908\%;$$

$$б)\ i_п = \frac{1{,}06^{160/365} - 1}{160/365} = 0{,}05902, \text{ или } 5{,}902\%.$$

Пример 2.21. Контракт предусматривает начисление сложных процентов по номинальной ставке $j=0{,}08$, начисление поквартальное, срок ссуды 2 года. Эквивалентная этим условиям ставка простых процентов согласно (2.35) равна:

$$i_п = \frac{(1 + 0{,}08/4)^{4 \cdot 2} - 1}{2} = 0{,}08582, \text{ или } 8{,}582\%;$$

простая учетная ставка и ставка сложных годовых процентов

$$d = \frac{360}{\partial}\left[1 - (1 + i)^{-n}\right], \quad (2.39)$$

$$i = \frac{1}{\sqrt[n]{1 - \frac{\partial}{360} d} - 1}. \quad (2.40)$$

Пример 2.22. Какова доходность, выраженная в годовой ставке процентов, от учета векселя (без выплат комиссионных)

по простой учетной ставке 8%? Срок оплаты векселя наступит через 120 дней. Здесь $d = 0{,}08$, $\partial = 120$, $n = 120 : 365$.
По формуле (2.40) находим:

$$i = \frac{1}{\sqrt[120/365]{1 - \frac{120}{360} 0{,}08}} - 1 = 0{,}08569, \text{ или } 8{,}57\,\%.$$

Простая учетная ставка и номинальная ставка сложных процентов (начисление m раз в году)

$$d = \frac{360}{\partial} [1 - (1 + j/m)^{-N}]; \tag{2.41}$$

$$j = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{\partial}{360} d}} - 1. \tag{2.42}$$

Эквивалентность дискретных сложных ставок. Для расчетов используются формулы:

годовая и номинальная ставки (начисление m раз в году)

$$i = (1 + j/m)^m - 1; \tag{2.43}$$

$$j = m(\sqrt[m]{1 + i} - 1). \tag{2.44}$$

Для случаев когда $m = 2$, 4 и 12, значения i, определяемые по формуле (2.43), приведены в табл. П.5.

Значения номинальной ставки в зависимости от m и i даются в табл. П.6.

Доходность финансовой операции обычно измеряется в виде *эффективной ставки процентов*, под которой понимается годовая ставка сложных процентов. В связи с этим все приведенные выше формулы для определения эквивалентной годовой ставки сложных процентов (i или i_c) являются формулами расчета эффективной ставки.

Пример 2.23. Банк начисляет на депозиты 8% номинальных. Какова реальная доходность вкладов (эффективная ставка) при начислении процентов: а) по полугодиям: б) поквартально; в) ежемесячно; г) ежедневно? На основе (2.43) находим:

а) $i = (1 + 0{,}08/2)^2 - 1 = 0{,}0816;$

б) $i = (1 + 0{,}08/4)^4 - 1 = 0{,}0824;$

в) $i = (1 + 0{,}08/12)^{12} - 1 = 0{,}083;$

г) $i = (1 + \frac{0{,}08}{365})^{365} - 1 = 0{,}0834.$

Пример 2.24. Какая должна быть установлена номинальная ставка процентов, обеспечивающая годовую доходность на уровне 9%? Начисление процентов ежемесячное. Здесь $m=12$, $i=0{,}09$, откуда

$$j = 12(\sqrt[12]{1{,}09} - 1) = 0{,}08649, \text{ или } 8{,}65\%.$$

Сложные годовые учетная ставка и ставка процентов

$$d_c = \frac{i}{1+i}; \tag{2.45}$$

$$i = \frac{1}{1-d_c}. \tag{2.46}$$

Сложная годовая учетная ставка и номинальная ставка процентов (начисление m раз в году)

$$d_c = 1 - 1/(1 + j/m)^m; \tag{2.47}$$

$$j = m(\sqrt[m]{1-d_c} - 1). \tag{2.48}$$

Пример 2.25. Каков уровень сложной годовой учетной ставки, которая может безубыточно заменить поквартальное начисление процентов при номинальной ставке 8%? Здесь $j=8\%$, $m=4$, откуда $d_c = 1 - 1 : 1{,}02^4 = 0{,}07615$, или 7,615%.

Номинальная учетная и годовая ставки сложных процентов

$$f = m(1 - \sqrt[m]{1/(1+i)}); \tag{2.49}$$

$$i = [1/(1-f/m)^m] - 1. \tag{2.50}$$

Номинальные учетная ставка и ставка процентов (начисление и дисконтирование m раз в году)

$$f = m[1 - 1/(1 + j/m)]; \tag{2.51}$$

$$j = m[1/(1-f/m) - 1]. \tag{2.52}$$

Эквивалентность сложных дискретных ставок и ставок непрерывных процентов. Используются формулы:

сложная годовая ставка и ставка непрерывных процентов

$$i = e^{\delta} - 1; \tag{2.53}$$

$$\delta = \ln(1+i). \tag{2.54}$$

Номинальная сложная процентная ставка и ставка непрерывных процентов

$$j = m(e^{\delta/m} - 1); \tag{2.55}$$

$$\delta = m\ln(1 + j/m). \tag{2.56}$$

Пример 2.26. Какова эффективная ставка при начислении непрерывных процентов, если сила роста $\delta = 0{,}08$? По формуле (2.53) находим $i = e^{0{,}08} - 1 = 0{,}0837871$, или 8,37871%

Сложная годовая учетная ставка и ставка непрерывных процентов

$$d_c = 1 - e^{-\delta}; \qquad (2.57)$$

$$\delta = \ln(1 + d_c)^{-1}. \qquad (2.58)$$

Годовая ставка сложных процентов и изменяющаяся ставка непрерывных процентов

$$i = \sqrt[n]{e^{\bar{\delta}}} - 1; \qquad (2.59)$$

$$i = \sqrt[n]{e^{\delta_0 n + \frac{an^2}{2}}} - 1; \qquad (2.60)$$

$$i = \sqrt[n]{e^{\frac{\delta_0}{\ln a}(a^n - 1)}} - 1. \qquad (2.61)$$

Здесь (2.59) — дискретно изменяющаяся сила роста (см. (2.25)), (2.60) — линейно изменяющаяся сила роста (см. (2.28)), (2.61) — изменяющаяся с постоянным темпом сила роста (см. (2.30)).

Пример 2.27. В примере 2.15 множитель наращения при дискретно изменяющихся непрерывных процентах составил 2,5345. Эквивалентная годовая ставка сложных процентов для этих же условий согласно (2.59) равна:

$$i = \sqrt[10]{e^{0,93}} - 1 = 0,09746.$$

2.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ ССУДЫ И УРОВНЯ ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК ПРИ ПРИМЕНЕНИИ СЛОЖНЫХ И НЕПРЕРЫВНЫХ ПРОЦЕНТОВ

Расчет продолжительности ссуды. Используются формулы: наращение по сложной годовой ставке

$$n = \log \frac{S}{P} : \log(1 + i); \qquad (2.62)$$

наращение по номинальной ставке процентов m раз в году

$$n = \log \frac{S}{P} : \log(1 + j/m)^m; \qquad (2.63)$$

дисконтирование по сложной годовой учетной ставке

$$n = \log \frac{P}{S} : \log(1 - d_c); \qquad (2.64)$$

дисконтирование по номинальной учетной ставке m раз в году

$$n = \log \frac{P}{S} : m\log(1 - f/m); \qquad (2.65)$$

наращение по постоянной ставке непрерывных процентов

$$n = \ln \frac{S}{P} : \delta; \tag{2.66}$$

наращение по изменяющейся ставке непрерывных процентов ($\delta_t = \delta_0 a^t$)

$$n = \frac{\ln\left(\frac{\ln a \ln S/P}{\delta_0} + 1\right)}{\ln a}. \tag{2.67}$$

Пример 2.28. За какой срок (в годах) сумма, равная 75 тыс. руб., достигнет 110 тыс. при условии, что на нее начисляются проценты по ставке 7,25% раз в году и поквартально. По формулам (2.62) и (2.63) находим:

$$n = \log \frac{110}{75} : \log 1{,}075 = 5{,}29 \text{ года};$$

$$n = \log \frac{110}{75} : 4\log\left(1 + \frac{0{,}075}{4}\right)^4 = 5{,}15 \text{ года}.$$

Пример 2.29. Какой срок необходим для удвоения суммы при начислении изменяющейся с постоянным темпом ставки непрерывных процентов? Начальная ставка $\delta_0 = 0{,}1$, годовой темп роста 1,1. По условиям задачи $a = 1{,}1$; $S/P = 2$, откуда

$$n = \frac{\ln\left(\frac{\ln 1{,}1 \cdot \ln 2}{0{,}1} + 1\right)}{\ln 1{,}1} = 5{,}32 \text{ года}.$$

Расчет процентных ставок. Используются формулы:
наращение по сложной годовой ставке

$$i = \sqrt[n]{S : P} - 1; \tag{2.68}$$

наращение по номинальной ставке m раз в году

$$j = m(\sqrt[N]{S : P} - 1); \tag{2.69}$$

дисконтирование по сложной годовой учетной ставке

$$d_c = 1 - \sqrt[n]{P : S}; \tag{2.70}$$

дисконтирование по номинальной учетной ставке m раз в году

$$f = \frac{1}{m}(1 - \sqrt[N]{P : S}); \tag{2.71}$$

наращение по постоянной ставке непрерывных процентов

$$\delta = \ln \frac{S}{P} : n; \tag{2.72}$$

наращение по изменяющейся ставке непрерывных процентов ($\delta_t = \delta_0 a^t$)

$$\delta_0 = \frac{\ln a \cdot \ln S/P}{a^n - 1}. \qquad (2.73)$$

Пример 2.30. Какова должна быть ставка процентов для того, чтобы сумма задолженности удвоилась за 8 лет? Проценты начисляются раз в году и помесячно.

По условию задачи $n=8$, $m=12, S/P=2$, $N=12\cdot 8=96$, по (2.68) и (2.69) находим: $i = \sqrt[8]{2} - 1 = 0{,}09051$; $j = 12(\sqrt[96]{2} - 1) = 0{,}0869$.

Пример 2.31. Вексель выписан на срок 2 года. Какая должна быть сложная учетная ставка, чтобы при учете векселя владелец получил 90% от его суммы? По условию $P:S=0{,}9$, $n=2$, откуда согласно (2.70) $d_c = 1 - \sqrt{0{,}9} = 0{,}0513$.

Пример 2.32. Необходимо определить начальное значение силы роста, если сумма должна удвоиться за 5 лет, а годовой темп роста ставки (дискретный) установлен на уровне 1,1. По формуле (2.73) находим:

$$\delta_0 = \frac{\ln 1{,}1 \cdot \ln 2}{1{,}1^5 - 1} = 0{,}10821.$$

2.9. ИЗМЕНЕНИЕ УСЛОВИЙ КОНТРАКТА (ЗАМЕНА ПЛАТЕЖЕЙ)

Изменение условий производства платежей не может быть произвольным. Общим принципом такого изменения является безубыточность, иначе говоря, финансовые отношения сторон после изменения условий должны сохраниться на прежнем уровне, т. е. новые финансовые обязательства должны быть эквивалентны старым. В простейшем случае, например при пролонгации срока платежа S_0 на n лет, новая сумма равна наращенной по обусловленной ставке процентов за этот срок сумме, т. е. $S_1=S_0(1+i)^n$. Если, допустим, сумма выплачивается досрочно, то она должна быть дисконтирована, т. е. $S_1=S_0 v^n$.

В более сложных случаях применяются специальные формулы или возникает необходимость разработки *уравнения эквивалентности* (содержание этого понятия раскрыто в 1.7). Уравнения эквивалентности дают возможность решать разнообразные задачи по определению сумм платежей в различных ситуациях.

Объединение (консолидация) платежей. При объединении платежей определяется срок нового (заменяющего) платежа, если задана его сумма. Пусть объединяются платежи S_1, ..., S_k со сроками $n_1, ..., n_k$, тогда финансовая эквивалентность достигается при применении формул:

срок заменяющего платежа

$$n_0 = \frac{\log S_0 - \log \Sigma S_j v^{n_j}}{\log(1+i)}, \qquad (2.74)$$

или, если $S_0 = \Sigma S_j$, то

$$n_0 \approx \frac{\Sigma S_j n_j}{S_0}. \qquad (2.75)$$

Здесь S_0 и n_0 — сумма и срок нового платежа; S_j и n_j — суммы и сроки объединяемых платежей.

Для того чтобы существовал искомый срок n_0 (т. е. можно было бы осуществить замену платежей на заданную сумму S_0), необходимо, чтобы отношение $S_0/\Sigma S_j v^{n_j}$ было больше 1. Приближенная формула (2.75) дает результат, который всегда больше точного, причем, чем ниже значение i, тем меньше расхождение между точной и приближенной величиной срока.

Пример 2.33. Два платежа — 10 тыс. руб. (срок 5 лет) и 12 тыс. руб. (срок 10 лет) — заменяются одним платежом $S_0 = 22$ тыс. руб. Найти срок платежа, принимая во внимание, что $i = 0{,}06$. По формуле (2.74) находим:

$$n_0 = \frac{\lg 22\,000 - \lg(10\,000 \cdot 1{,}06^{-5} + 12\,000 \cdot 1{,}05^{-10})}{\lg 1{,}06} =$$

$$= 7{,}546 \approx 7{,}55 \text{ года}.$$

Проверка: современная величина нового платежа равна $22000 \cdot 1{,}06^{-7{,}55} \approx 14\,170$ руб. Сумма современных величин объединяемых платежей составляет примерно такую же величину.

Если воспользоваться приближенной формулой (2.75), поскольку она применима при условии $S_0 = \Sigma S_j$, то получим $n_0 \approx \approx 7{,}73$ года.

Уравнение эквивалентности. В этом уравнении сумма приведенных на один момент времени платежей, предусмотренных старыми условиями контракта, приравнивается аналогичной по содержанию величине платежа по новому контракту. Если приведение осуществляется на начальный момент времени, то уравнение эквивалентности в общем виде записывается как

$$\Sigma S_q v^{n_q} = \Sigma S_k v^{n_k}, \qquad (2.76)$$

где S_k — ряд заменяемых платежей со сроками n_k; S_q — платежи со сроками n_q, предусматриваемые новыми условиями.

Пример 2.34. Допустим, существует обязательство произвести платеж через 5 лет, первоначальная сумма долга $P = 100$ тыс. руб., процент начисляется ежегодно по ставке i. Стороны согласились пересмотреть соглашение. Обязательство будет погашено следующим образом: через 2 года производится выплата 30 тыс. руб., а остальной долг гасится через 4 года. Необходимо определить сумму окончательного платежа.

Ответ на поставленный вопрос получим, составив и решив соответствующее уравнение эквивалентности платежей. В качестве момента, на который приводятся платежи, удобно принять: а) начало срока обязательства; б) момент уплаты 30 тыс. руб.; в) момент платежа старого обязательства; г) конец нового обязательства. Пусть в качестве момента времени приведения платежей взято начало срока обязательства. Тогда уравнение эквивалентности запишем как

$$\text{а)}\ 100 = 30v^2 + Sv^6,$$

где S — искомый размер платежа. В левой части этого уравнения находится современная величина старого обязательства ($P = 100$), в правой — сумма современных величин платежей по новому обязательству. Решим уравнение относительно S при условии, что $i = 0{,}05$:

$$S = \frac{100 - 30 \cdot 1{,}05^{-2}}{1{,}05^{-6}} = 97{,}544 \text{ тыс. руб.}$$

Аналогично можно составить уравнения эквивалентности платежей и на другие моменты времени. Так, взяв за базу конец второго года (момент уплаты 30 тыс. руб.), получим следующее уравнение:

$$\text{б)}\ 100(1 + i)^2 = 30 + Sv^4.$$

В левой части уравнения показана величина платежа P с процентами на момент $n = 2$. Решение уравнения относительно S, естественно, даст тот же ответ.

Наконец, напишем уравнения эквивалентности для двух оставшихся моментов времени:

$$\text{в)}\ 100(1 + i)^5 = 30(1 + i)^3 + Sv;$$

$$\text{г)}\ 100(1 + i)^6 = 30(1 + i)^4 + S.$$

Любое из четырех приведенных уравнений легко получить из другого. Например, если уравнение (г) умножить на v^4, то получим уравнение (б), а если его же умножить на v^6, то получим уравнение (а).

Глава 3. КОЛИЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ПОСТОЯННЫХ ДИСКРЕТНЫХ ФИНАНСОВЫХ РЕНТ

3.1. ПОТОКИ ПЛАТЕЖЕЙ И ФИНАНСОВЫЕ РЕНТЫ

Контракты, сделки, коммерческие и производственно-хозяйственные операции часто предусматривают не отдельные, разовые платежи, а множество распределенных во времени выплат и поступлений. Например, получение и погашение долгосрочного кредита, погашение различных видов задолженности, денежные показатели инвестиционного процесса и т. д. можно представить в виде последовательностей (рядов) выплат и поступлений. Такой ряд называют *потоком платежей*. Члены потока платежей могут быть как положительными, так и отрицательными величинами. Причем они могут быть постоянными, изменяться по какому-либо закону (например, с постоянным темпом) или произвольно (нерегулярные потоки).

Поток платежей, все члены которого — положительные величины, а временные интервалы между двумя последовательными платежами постоянны, называют *финансовой рентой*, или *аннуитетом*, вне зависимости от происхождения этих платежей, их назначения и целей. Например, рентой является ряд, состоящий из выплат процентов по выпущенным предприятием облигациям, взносы по погашению потребительского кредита и т. д. Представление последовательности платежей в виде финансовой ренты существенно упрощает количественный анализ, дает возможность использовать набор стандартных формул и табличные значения ряда коэффициентов, содержащихся в этих формулах.

Финансовая рента (или, кратко, рента) описывается следующими основными параметрами: *член ренты* — величина каждого отдельного платежа, *период ренты* — временной интервал между двумя платежами, *срок ренты* — время, измеренное от начала финансовой ренты до конца последнего ее периода, *процентная ставка* — ставка, используемая при наращении или дисконтировании платежей, из которых состоит рента. При характеристике отдельных видов финансовых рент применяются дополнительные параметры: число платежей в году, число начислений процентов, моменты производства платежей и др.

Виды финансовых рент. В практике применяются разнообразные по условиям формирования ренты. В зависимости от продолжительности периода ренты делят на годовые и p-срочные (p характеризует число выплат на протяжении года). В анализе инвестиционного процесса иногда применяются ренты с периодом выплат, превышающим год. Все перечисленные виды рент называют *дискретными*. В финансово-экономическом анализе встречаются и с последовательностями платежей, которые производятся так часто, что практически их можно рассматривать как непрерывные. Такие платежи описываются *непрерывными* рентами.

По числу начислений процентов различают ренты с начислением процентов один раз в году, m раз или непрерывно. Моменты начисления процентов могут совпадать с моментами выплаты членов ренты, но это необязательно.

По величине членов различают ренты *постоянные* (с равными членами) и *переменные*. Члены переменных рент могут изменяться во времени, следуя какому-либо закону, например арифметической или геометрической прогрессии и т. д., или несистематично.

По вероятности выплаты членов ренты делятся на *верные* и *условные*. Верные ренты подлежат безусловной выплате, например, при погашении кредита. Выплата условной ренты ставится в зависимость от наступления некоторого случайного события. Поэтому число ее членов заранее неизвестно.

По числу членов различают ренты с *конечным числом членов*, или *ограниченные*, и *бесконечные*, или *вечные*. Вечная рента не является абстракцией, на практике иногда сталкиваются с такого рода случаями. Например, с вечной рентой встречаются в ряде долгосрочных финансовых расчетов, когда предполагается, что период функционирования соответствующей финансовой деятельности, производственно-хозяйственной системы и т. д. весьма продолжителен и не оговаривается какими-либо конкретными сроками. В качестве вечной ренты можно рассматривать и выплаты по облигационным займам с неограниченными сроками.

По соотношению начала срока ренты и какого-либо фиксированного момента времени (начало действия контракта, время оценки ренты и т. д.) ренты делятся на *немедленные* и *отложенные* (*отсроченные*). Срок немедленных рент начинается сразу, т. е. оба указанных момента времени совпадают. У отложенных рент начало срока запаздывает относительно этого момента.

По моменту выплат членов ренты различают ренты: *обыкновенные, обычные* (или *постнумерандо*) и пренумерандо. Первые предполагают, что платежи осуществляются в конце соответствующих периодов (годы, полугодия и т. д.), вторые — в начале этих периодов. На практике чаще всего встречаются обычные ренты. Иногда контракты предусматривают платежи в середине каждого периода.

Обобщающие характеристики потоков платежей. В подавляющем числе практических случаев количественный финансово-экономический анализ потоков платежей предполагает расчет одной из двух обобщающих эти потоки характеристик: наращенной суммы и современной величины. Названные показатели представляют поток платежей за весь срок их выплат с учетом моментов времени, когда они выплачиваются, в виде одного числа.

Наращенная сумма — сумма всех членов последовательности платежей с начисленными на них процентами к концу его срока. Под *современной величиной* потока платежей понимают сумму всех его членов, дисконтированных на некоторый момент времени, совпадающий с началом потока платежей или упреждающий его. Конкретный смысл наращенной суммы и современной величины потока платежей (в том числе финансовой ренты) определяется содержанием его членов. Наращенная сумма может представлять собой общую сумму задолженности, итоговый объем инвестиций, накопленный на момент оценки денежный резерв и т. д. Современная величина потока платежей характеризует приведенные издержки, капитализированный доход, чистую приведенную прибыль и т. д. Обобщающие ренту показатели широко применяются в различных финансовых расчетах и методических разработках. Так, на основе упомянутых выше характеристик разрабатываются планы погашения задолженности, сравниваются или безубыточно изменяются условия контрактов, оценивается степень эффективности инвестиций и т. п. Современная величина потока платежей может оказаться полезной при разработке условий компенсационных соглашений или различных долгосрочных контрактов, предусматривающих взаимные обязательства сторон.

Для регулярных потоков платежей, т. е. постоянных или переменных рент с заданными законами изменения членов рент, получены формулы определения наращенных сумм и современных величин, учитывающие особенности соответствующих рядов. Во многих случаях при определении наращенных сумм и современных величин рент можно использовать показатели ряда таблиц приложения 1, что существенно сокращает трудоемкость

Таблица 3.1

Номера формул для расчета наращенных сумм и современных величин постоянных ограниченных финансовых рент

Вид ренты		Номер формулы для расчета	
число платежей в году	число начислений процентов в году	наращенной суммы	современной величины
Годовая	1	(3.1)	(3.25)
p-срочная	1	(3.3)	(3.27)
С периодом больше года	1	(3.7)	(3.29)
Годовая	m	(3.9)	(3.31)
p-срочная ($p \neq m$)	m	(3.13)	(3.34)
p-срочная ($p = m$)	m	(3.17)	(3.37)
Годовая	непрерывно	(3.19)	(3.39)
p-срочная	непрерывно	(3.21)	(3.41)
С периодом больше года	непрерывно	(3.23)	(3.44)

расчетов. В данной главе приведены формулы для ограниченных финансовых рент, члены которых не изменяются во времени (постоянные ренты), платежи производятся раз, p раз в году или через r лет в конце соответствующих периодов, а проценты начисляются один, m раз в году или непрерывно. В гл. 4 рассматриваются методы количественного анализа всех других видов потоков платежей. Для удобства использования формул номера формул для расчета наращенных сумм и современных величин ограниченных постоянных рент приведены в табл. 3.1.

При записи приведенных в гл. 3 формул применены следующие обозначения:

$a_{n;i}$ — коэффициент приведения годовой ренты;
$a_{n;\delta}$ — коэффициент приведения годовой ренты по ставке непрерывных процентов δ;
$a_{n;i}^{(p)}$ — коэффициент приведения p-срочной ренты;
$a_{n;\delta}^{(p)}$ — коэффициент приведения p-срочной ренты по ставке непрерывных процентов δ;
$a_{mn;j/m}^{(p)}$ — коэффициент приведения p-срочной ренты с дисконтированием m раз в году;
${}_t|a_{n;i}$ — коэффициент приведения отложенной на t лет ренты;
i — ставка сложных процентов;
$i_п$ — ставка простых процентов;
j — годовая номинальная ставка сложных процентов;
q — множитель наращения;
m — число раз начислений процентов в году;
n — срок ренты в годах;
p — число платежей (членов ренты) в году;
v — дисконтный множитель;
δ — ставка непрерывных процентов (сила роста);
$s_{n;i}$ — коэффициент наращения годовой ренты;
$s_{n;\delta}$ — коэффициент наращения годовой ренты по ставке непрерывных процентов δ;
$s_{n;i}^{(p)}$ — коэффициент наращения p-срочной ренты;
$s_{n;\delta}^{(p)}$ — коэффициент наращения p-срочной ренты по ставке непрерывных процентов δ;
$s_{mn;j/m}^{(p)}$ — коэффициент наращения p-срочной ренты с дисконтированием m раз в году;
A — современная величина обыкновенной ренты;
A_t — современная величина отложенной ренты;
R — член постоянной ренты (размер годового платежа);
R_r — член ренты, выплачиваемой через r лет;
S — наращенная сумма обыкновенной ренты.

Содержание других символов, использованных в данной главе, раскрывается в каждом отдельном случае.

3.2. НАРАЩЕННЫЕ СУММЫ ПОСТОЯННЫХ ФИНАНСОВЫХ РЕНТ

Наращенная сумма ренты определяется умножением величины члена ренты (R или R_r) на *коэффициент наращения*, который характеризует сумму платежей, равных единице, с начисленными на них процентами за n лет. Этот коэффициент показывает, во сколько раз наращенная сумма больше, чем величина годового платежа. Номера формул наращенной суммы для различных видов рент показаны в табл. 3.1. Во всех приведенных ниже формулах, кроме (3.7), в качестве члена ренты принята годовая сумма платежей. В формуле (3.7) член ренты R_r — сумма, выплачиваемая через r лет.

Ренты с начислением процентов в конце года. Для расчетов используются формулы:

сумма наращения (годовая рента)

$$S = Rs_{n;\,i}; \tag{3.1}$$

коэффициент наращения

$$s_{n;\,i} = \sum_{t=0}^{n-1} (1+i)^t = \frac{(1+i)^n - 1}{i}. \tag{3.2}$$

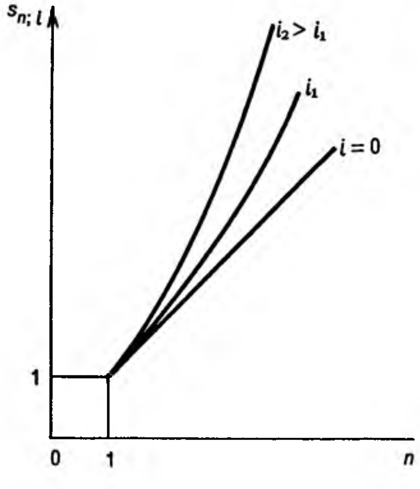

Рис. 3.1. Изменение коэффициента наращения ренты в зависимости от срока и процентной ставки

В табл. П.10 приводятся значения коэффициентов $s_{n;\,i}$ для широкого диапазона сроков и процентных ставок. Свойства коэффициентов даются в 3.4. На рис. 3.1 иллюстрируется зависимость величины коэффициента от срока и процентной ставки.

Наращенная сумма (p-срочная рента)

$$S = Rs_{n;\,i}^{(p)}; \tag{3.3}$$

коэффициент наращения

$$s_{n;\,i}^{(p)} = \frac{(1+i)^n - 1}{p[(1+i)^{1/p} - 1]}. \tag{3.4}$$

Если для заданного срока и процентной ставки i имеется табличное значение коэффициента наращения годовой ренты $s_{n;\,i}$, то коэффициент $s_{n;\,i}^{(p)}$ можно получить как

$$s_{n;\,i}^{(p)} = s_{n;\,i} \cdot K_{p;\,i}, \tag{3.5}$$

где

$$K_{p;\,i} = \frac{i}{p[(1+i)^{1/p} - 1]}. \tag{3.6}$$

Поскольку $K_{p;\,i} > 1$, то для одних и тех же значений n и i $s_{n;\,i}^{(p)} > s_{n;\,i}$. Значения коэффициента $K_{p;\,i}$ ($p = 2$, 4, 6 и 12) приведены в табл. П.12.

Наращенная сумма (рента с периодом больше года)

$$S = R_r \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^r - 1} = R_r \frac{s_{n;\,i}}{s_{r;\,i}}; \tag{3.7}$$

коэффициент наращения

$$s_{r;\,i} = \frac{(1+i)^r - 1}{i}, \tag{3.8}$$

где r — период ренты в годах.

Для получения точного результата по формуле (3.7) необходимо, чтобы отношение n/r было целым числом. В случаях когда r — целое число, значение коэффициента $s_{n;\,i}$ можно получить по табл. П.10.

Пример 3.1. Во сколько раз наращенная сумма постоянной ренты ($n=6$ лет) будет больше годового взноса, если на платежи начисляются годовые проценты по ставке 6,25%. Платежи производятся: а) раз в конце года; б) поквартально.

Решение заключается в определении соответствующих коэффициентов наращения. По формулам (3.2) и (3.4) находим:

$$\text{а)}\quad s_{6;\,6,25} = \frac{1{,}0625^6 - 1}{0{,}0625} = 7{,}019;$$

$$\text{б)}\quad s_{6;\,6,25}^{(4)} = \frac{1{,}0625^6 - 1}{4 \cdot (1{,}0625^{1/4} - 1)} = 7{,}182.$$

Если же суммы платежей будут, допустим, удвоены, но выплачиваются через 2 года, то коэффициент наращения составит по (3.7) величину

$$\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^r-1}=\frac{1{,}065^6-1}{1{,}065^2-1}=3{,}421.$$

Пример 3.2. В течение 5 лет в фонд выплачивается по 15 тыс. руб., на которые начисляются проценты по ставке 8% годовых. Необходимо найти итоговую сумму на момент последнего взноса при условии, что взносы делаются: а) раз в конце года; б) в конце каждого месяца.

Данная последовательность платежей представляет собой финансовую ренту с условиями: $R=15$; $n=5$; $i=8\%$. По формулам (3.1) — (3.3) получим:

$$\text{а) } S=15\cdot\frac{(1+0{,}08)^5-1}{0{,}08}=88{,}00 \text{ тыс. руб.},$$

или, найдя табличное значение $s_{5;\,8}=5{,}8666$, получим $S=15\cdot5{,}8666=88{,}00$ тыс. руб.

$$\text{б) } S=15\cdot\frac{1{,}08^5-1}{12\cdot(1{,}08^{1/12}-1)}=91{,}18 \text{ тыс. руб.},$$

или, найдя по табл. П.10 и П.12 величины $s_{5;\,8}=5{,}8666$ и $K_{12;\,8}=1{,}0361$, находим $S=15\cdot5{,}8666\cdot1{,}0361=91{,}18$ тыс. руб.

Ренты с начислением процентов m **раз в году.** Для расчетов используются формулы:

наращенная сумма (годовая рента)

$$S=R\bar{s}_{mn;\,j/m};\tag{3.9}$$

коэффициент наращения

$$\bar{s}_{mn;\,j/m}=\frac{(1+j/m)^{mn}-1}{(1+j/m)^m-1}=\frac{s_{mn;\,j/m}}{s_{m;\,j/m}},\tag{3.10}$$

где

$$s_{mn;\,j/m}=\frac{(1+j/m)^{mn}-1}{j/m},\tag{3.11}$$

$$s_{m;\,j/m}=\frac{(1+j/m)^m-1}{j/m};\tag{3.12}$$

наращенная сумма (p-срочная рента, $p\neq m$)

$$S=Rs^{(p)}_{mn;\,j/m};\tag{3.13}$$

коэффициент наращения

$$s^{(p)}_{mn;\,j/m}=\frac{(1+j/m)^{mn}-1}{p[(1+j/m)^{m/p}-1]}.\tag{3.14}$$

Если m/p — целое число, то

$$s^{(p)}_{mn,\,j/m}=\frac{s_{mn,\,j/m}}{ps_{m/p,\,j/m}},\tag{3.15}$$

где

$$s_{m/p;\,j/m} = \frac{(1 + j/m)^{m/p} - 1}{j/m}. \tag{3.16}$$

Коэффициент наращения $s_{mn;\,j/m}$ определяется по формуле (3.11).

Наращенная сумма (p-срочная рента, $p=m$)

$$S = R\,\frac{s_{mn;\,j/m}}{m}; \tag{3.17}$$

коэффициент наращения

$$\frac{s_{mn;\,j/m}}{m} = \frac{(1 + j/m)^{mn} - 1}{j}. \tag{3.18}$$

Значения указанных выше коэффициентов наращения $s_{mn;\,j/m}$, $s_{m;\,j/m}$ и $s_{m/p;\,j/m}$ можно получить по табл. П. 10. При этом общее число членов ренты принимается равным mn, m и m/p, а ставка процентов — j/m. Например, если проценты начисляются 4 раза, а выплаты производятся 2 раза в году, срок ренты 5 лет, номинальная ставка 8%, то находят табличные значения: $s_{mn;\,j/m} = s_{20;\,2}$; $s_{m,\,j/m} = s_{4;\,2}$; $s_{m/p;\,j/m} = s_{2;\,2}$.

При отсутствии табличных значений (например, для дробных величин процентных ставок) коэффициенты наращения находятся непосредственно по приведенным формулам.

Пример 3.3. Для создания резервного фонда ежегодно выделяется по 4 тыс. руб. На аккумулируемые средства начисляются сложные проценты по ставке 6%. Необходимо определить общую сумму фонда через 5 лет для следующих вариантов поступления средств и начисления процентов: а) поступление в конце года, начисление процентов по полугодиям; б) поступление в конце квартала, начисление процентов по полугодиям; в) квартальное поступление и начисление процентов.

По условиям задачи $R=4000$, $n=5$, $i=j=0{,}06$.

а) здесь по условию $m=2$, $j/m=0{,}03$. Табличные значения коэффициентов наращения: $s_{10;\,3}=11{,}463879$; $s_{2;\,3}=2{,}03$. По формуле (3.13) получим:

$$S = 4000 \cdot \frac{11{,}463879}{2{,}03} = 22588{,}92 \text{ руб.};$$

б) в этом варианте $p=4$, $m=2$, $j/m=0{,}03$. Поскольку $m/p < 1$, то табличные значения коэффициентов наращения получить нельзя. По формуле (3.14) находим:

$$S = 4000 \cdot \frac{1{,}03^{10} - 1}{4 \cdot (1{,}03^{2/4} - 1)} = 23098{,}45 \text{ руб.};$$

в) здесь по условию $p=m=4$, $j/m=0{,}015$. Табличное значение коэффициента $s_{20;\,1,5}=23{,}123667$, откуда по формуле (3.17) получим:

$$S = 4000 \cdot \frac{23{,}123667}{4} = 23123{,}67 \text{ руб.}$$

Ренты с непрерывным начислением процентов. Наращенная сумма ренты при непрерывном начислении процентов по ставке δ равна аналогичной характеристике при дискретном начислении процентов по ставке i, если δ определено по формулам (2.54), (2.56), характеризующим взаимосвязь δ и i (j).

Наращенная сумма (годовая рента)

$$S = Rs_{n;\delta}; \tag{3.19}$$

коэффициент наращения

$$s_{n;\delta} = \frac{e^{\delta n} - 1}{e^{\delta} - 1}; \tag{3.20}$$

наращенная сумма (p-срочная рента)

$$S = Rs^{(p)}_{n;\delta}; \tag{3.21}$$

коэффициент наращения

$$s^{(p)}_{n;\delta} = \frac{e^{\delta n} - 1}{p\,(e^{\delta/p} - 1)}. \tag{3.22}$$

Значения $e^{\delta n}$ приведены в табл. П. 8.

Наращенная сумма (рента с периодом больше года)

$$S = R_r s^{(r)}_{n;\delta}; \tag{3.23}$$

коэффициент наращения

$$s^{(r)}_{n;\delta} = \frac{e^{\delta n} - 1}{e^{\delta r} - 1}. \tag{3.24}$$

Пример 3.4. Условия контракта предусматривают ежегодные выплаты в сумме 40 тыс. руб. в течение 5 лет. Необходимо определить накопленную к концу срока сумму при непрерывном начислении процентов по ставке (сила роста) δ, равной 6%, при условии, что выплаты производятся: а) раз в конце года; б) по полугодиям; в) поквартально.

По данным задачи имеем ренты с условиями $R=40$; $n=5$; $\delta = 0{,}06$ и $p = 1$, 2 и 4. Коэффициенты наращения для этих рент: $s_{5;6}$, $s^{(2)}_{5;6}$ и $s^{(4)}_{5;6}$. По формуле (3.20) находим

$$\text{а)}\quad s_{5;6} = \frac{e^{0{,}06 \cdot 5} - 1}{e^{0{,}06} - 1} = 5{,}6578$$

и по формуле (3.22)

$$\text{б)}\quad s^{(2)}_{5;6} = \frac{e^{0{,}06 \cdot 5} - 1}{2\,(e^{0{,}06/2} - 1)} = 5{,}7439, \qquad \text{в)}\quad s^{(4)}_{5;6} = \frac{e^{0{,}06 \cdot 5} - 1}{4\,(e^{0{,}06/4} - 1)} =$$

$$= 5{,}7874$$

Для соответствующих условий выплат получим $S_а=226{,}31$; $S_б=229{,}76$ и $S_в=231{,}49$ тыс. руб.

Несколько изменим условия. Пусть теперь проценты начисляются непрерывно, но ставка δ непосредственно не задается. Она определяется исходя из дискретной ставки 6% годовых. Тогда $\delta=\ln 1{,}06=0{,}0582689$ и $s_{5;\,5{,}82689}=5{,}63709$; $s^{(2)}_{5;\,5{,}82689}=5{,}72042$; $s^{(4)}_{5;\,5{,}82689}=5{,}76239$.

В итоге имеем: $S_а=223{,}31$; $S_б=228{,}82$; $S_в=230{,}49$ тыс. руб. При дискретном начислении процентов по ставке $i=6\%$ получим аналогичные суммы.

Сравнение результатов наращения обычных годовых и *p*-срочных рент с разными условиями. Как это видно из примера 3.4, условия производства платежей и начисления процентов (их частота) заметно влияют на размер наращенной суммы. Ниже приведены соотношения наращенных сумм соответствующих финансовых рент. При сравнении наращенные суммы обозначены как $S(p, m)$: $S(1; 1)$ — годовой ренты с начислением процентов в конце года; $S(1; m)$ — годовой ренты с начислением процентов m раз в году; $S(p, \infty)$ — p-срочной ренты с непрерывным начислением процентов. Для одних и тех же сумм годовых выплат, продолжительности ренты и процентных ставок ($i=j=\delta$) получим соотношения:

$$S(1;\,1) < \underset{m>1}{S(1;\,m)} < S(1;\,\infty) < \underset{p>1}{S(p;\,1)} < \underset{p>m>1}{S(p;\,m)} <$$

$$< \underset{p=m>1}{S(p;\,m)} < \underset{1<p<m}{S(p;\,m)} < S(p;\,\infty).$$

Приведенные неравенства могут быть использованы при разработке условий контрактов, так как позволяют заранее сравнить их конечные результаты. Например, для одной и той же годовой суммы платежей, процентной ставки и общего срока рента с условиями $p=2$ и $m=4$ дает меньшую наращенную сумму, чем с $p=4$ и $m=2$.

Для рент, у которых сумма платежей за год равна 10 тыс. руб., а срок 10 лет, процентная ставка 6%, получим следующие значения наращенных сумм:

	$m=1$	$m=2$	$m=4$	$m=12$	$m=\infty$
$p=1$	131,81	132,37	132,65	132,85	132,95
$p=4$	134,71	135,35	135,67	135,88	135,99

3.3. РАСЧЕТ СОВРЕМЕННЫХ ВЕЛИЧИН ПОСТОЯННЫХ ДИСКРЕТНЫХ ФИНАНСОВЫХ РЕНТ

Современная величина ренты определяется умножением величины члена ренты (R или R_r) на *коэффициент приведения,* который характеризует сумму платежей, равных единице, дисконтированных на момент начала ренты. Этот коэффициент показывает, во сколько раз современная величина ренты больше ее члена. В табл. 3.1 даны номера формул для расчета современных величин различных финансовых рент. Приведенные в этом параграфе формулы разработаны для рент, члены которых не изменяются во времени, платежи производятся раз или p раз в году, через r лет, а проценты начисляются один, m раз в году или непрерывно.

Ренты с начислением процентов в конце года. Для расчетов используются формулы:

современная величина (годовая рента)

$$A = Ra_{n;\,i}; \tag{3.25}$$

коэффициент приведения

$$a_{n;\,i} = \sum_{t=1}^{n} v^t = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = v\,\frac{v^n-1}{v-1} = \frac{1-v^n}{i}. \tag{3.26}$$

Значения коэффициента $a_{n;\,i}$ приведены в табл. П.11. При отсутствии табличных значений (например, для дробных величин процентных ставок) коэффициенты приведения рассчитываются непосредственно по приведенным формулам. Свойства

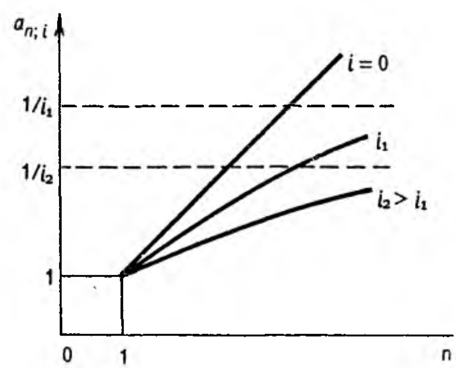

Рис. 3.2. Изменение коэффициента приведения ренты в зависимости от срока и процентной ставки

коэффициентов рассмотрены в 3.4. Графическая иллюстрация зависимости коэффициента от срока и процентной ставки приведена на рис. 3.2.

Современная величина (p-срочная рента)

$$A = Ra_{n;\,i}^{(p)}; \tag{3.27}$$

коэффициент приведения

$$a_{n;\,i}^{(p)} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{p[(1+i)^{1/p}-1]}. \tag{3.28}$$

Если для заданного срока и ставки процентов i имеется табличное значение коэффициента приведения годовой ренты $a_{n;\,i}$, то коэффициент $a_{n;\,i}^{(p)}$ можно получить как

$$a_{n;\,i}^{(p)} = a_{n;\,i} \cdot K_{p;\,i},$$

где коэффициент $K_{p;\,i}$ определяется по формуле (3.6) или по табл. П.12.

Современная величина (рента с периодом больше года)

$$A = R_r a_{n;\,i}^{(r)}; \tag{3.29}$$

коэффициент приведения

$$a_{n;\,i}^{(r)} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^r-1} = \frac{a_{n;\,i}}{s_{r;\,i}}, \tag{3.30}$$

где $s_{r;\,i}$ определяется по формуле (3.8), а в случаях, когда r — целое число, и по табл. П.10. Для получения точного результата необходимо, чтобы отношение n/r было целым числом (r — период ренты в годах).

Пример 3.5. Какая сумма обеспечит периодические годовые выплаты в размере 15 тыс. руб. в течение 5 лет, если на эти вложения будут начисляться проценты ($i=8\%$)? Задача сводится к определению современной величины ренты с параметрами $R=15$ тыс. руб., $n=5$ лет, $i=8\%$. Допустим, выплаты будут производиться: а) раз в конце года; б) ежемесячно.

а) По формуле (3.25) получим

$$A = 15 \cdot \frac{1-1{,}08^{-5}}{0{,}08} = 59{,}89 \text{ тыс. руб.}$$

или, найдя табличное значение $a_{5;\,8}=3{,}9927$, имеем $A=15\times \times 3{,}9927=59{,}89$ тыс. руб.;

б) по формуле (3.27) получим

$$A = 15 \cdot \frac{1-1{,}08^{-5}}{12(1{,}08^{1/12}-1)} = 15 \cdot 4{,}1368 = 52{,}05 \text{ тыс. руб.},$$

или, найдя по табл. П.11 и П.12 значения коэффициентов $a_{5;\,8}= =3{,}9927$ и $K_{12,\,8}=1{,}0361$, имеем $A=15 \cdot 3{,}9927 \cdot 1{,}0361=52{,}05$ тыс. руб.

Пример 3.6. Необходимо сравнить два варианта строительства дороги. Первый требует разовых вложений, равных 4 млн. руб., и капитального ремонта стоимостью 0,9 млн. руб., производимого каждые 5 лет. Второй — 5 млн. руб. и капитального ремонта стоимостью 0,4 млн. руб. каждые 10 лет. Временно́й горизонт, учитываемый в расчете, составит 50 лет. Капитальные и суммарные затраты на ремонт, приведенные к началу строительства (при условии, что $i=10\%$), равны:

$$A_1 = 4 + 0{,}9\,\frac{a_{50;\,10}}{s_{5;\,10}} = 5{,}46 \text{ млн. руб.};$$

$$A_2 = 5 + 0{,}4\frac{a_{50;\,10}}{s_{10;\,10}} = = 5{,}25 \text{ млн. руб.},$$

т. е. второй вариант при принятой для сравнения ставке процентов оказывается немного дешевле.

Ренты с начислением процентов m раз в году. Используются формулы:

современная величина (годовая рента)

$$A = R\overline{a}_{mn;\,j/m}; \tag{3.31}$$

коэффициент приведения

$$\overline{a}_{mn;\,j/m} = \frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{(1+j/m)^m - 1} = \frac{a_{mn;\,j/m}}{s_{m;\,j/m}}, \tag{3.32}$$

где

$$a_{mn;\,j/m} = \frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{j/m}. \tag{3.33}$$

Значения коэффициентов приведения $a_{mn;\,j/m}$ можно найти в табл. П.11. При этом общее число членов (периодов ренты) принимается равным mn, а ставка процентов — j/m. Коэффициент $s_{m;\,j/m}$ определяется по формуле (3.12) и табл. П.10.

Современная величина (p-срочная рента $p \neq m$)

$$A = Ra^{(p)}_{mn;\,j/m}; \tag{3.34}$$

коэффициент приведения

$$a^{(p)}_{mn;\,j/m} = \frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{p[(1+j/m)^{m/p} - 1]}. \tag{3.35}$$

Если m/p — целое число, то

$$a^{(p)}_{mn;\,j/m} = \frac{a_{mn;\,j/m}}{p s_{m/p;\,j/m}}, \tag{3.36}$$

где коэффициенты $a_{mn;\,j/m}$ и $s_{m/p;\,j/m}$ определяются по формулам (3.32) и (3.16).

Современная величина (p-срочная рента, $p=m$)

$$A = R\,\frac{a_{mn;\,j/m}}{m}; \tag{3.37}$$

коэффициент приведения

$$\frac{a_{mn;\,j/m}}{m} = \frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{j}. \tag{3.38}$$

Пример 3.7. Имеется обязательство выплачивать в течение 5 лет по 10 тыс. руб. в год. Какая сумма необходима для того, чтобы вместе с начисляемыми на нее процентами обеспечить указанные платежи? Найдем решения для таких вариантов условий выплат платежей и начислений процентов: а) выплата один раз в конце года, начисление процентов по полугодиям; б) ежеквартальные выплаты и начисление процентов. Решение заключается в определении современных величин соответствующих рент:

а) по условиям задачи $p=1$, $R=10\,000$, $n=5$, $j=0{,}08$, $m=2$, $mn=10$. Откуда по формулам (3.31) и (3.32) находим

$$A = 10\,000\,\bar{a}_{10;\,4} = 10\,000\,\frac{a_{10;\,4}}{s_{2;\,4}} = 10\,000\,\frac{7{,}912718}{2{,}04} = 38787{,}83 \text{ руб.}$$

Значения $a_{10;\,4}$ и $s_{2;\,4}$ получены по табл. П. 11 и П. 10.

б) в этом случае рента характеризуется параметрами: $p = m=4$, $R=10\,000$, $n=5$, $j=0{,}08$; $j/m=0{,}02$, $mn=20$.

По формуле (3.37) получим

$$A = 10\,000\,\frac{a_{20;\,4}}{4} = 10\,000\,\frac{16{,}351433}{4} = 40878{,}58 \text{ руб.}$$

или, применив формулу (3.38), получим

$$A = 10\,000\,\frac{1-1{,}02^{-20}}{0{,}08} = 40878{,}58 \text{ руб.}$$

Ренты с непрерывным начислением процентов. Современные величины дискретных рент при непрерывном дисконтировании по ставке δ равны аналогичным характеристикам при дискретном дисконтировании по ставке i (или j), если δ определено по формулам (2.54), (2.56), характеризующим взаимозависимость δ и $i(j)$.

Современная величина (годовая рента)

$$A = Ra_{n;\,\delta}; \tag{3.39}$$

коэффициент приведения

$$a_{n;\,\delta} = \frac{1-e^{-\delta n}}{e^{\delta}-1}; \tag{3.40}$$

современная величина (p-срочная рента)

$$A = Ra^{(p)}_{n;\,\delta}; \tag{3.41}$$

коэффициент приведения

$$a^{(p)}_{n;\,\delta} = \frac{1-e^{-\delta n}}{p\,(e^{\delta/p}-1)}. \tag{3.42}$$

Значения $e^{-\delta n}$ приведены в табл. П. 9.

Современная величина (рента с периодом больше года)

$$A = R_r a^{(r)}_{n;\delta};\tag{3.43}$$

коэффициент приведения

$$a^{(r)}_{n;\delta} = \frac{1 - e^{-\delta n}}{e^{\delta r} - 1}.\tag{3.44}$$

Пример 3.8. Пусть в примере 3.7 (б) члены ежеквартальной ренты непрерывно дисконтируются по ставке $\delta = 0{,}08$, тогда согласно (3.41) получим современную величину, равную

$$A = 1000 \cdot \frac{1 - e^{-0{,}08 \cdot 5}}{4(e^{0{,}08/4} - 1)} = 40799{,}27 \text{ руб.}$$

При дискретном ежеквартальном дисконтировании по ставке $i = 0{,}08$ находим $A = 40878{,}58$ руб. Если непрерывное дисконтирование осуществлять по ставке $\delta = \ln 1{,}08 = 0{,}07696$, то получим эту же сумму.

Отложенные (отсроченные) ренты. Для определения современной величины любого вида отложенной ренты (см. 3.1) необходимо дисконтировать по принятой ставке процентов современную величину соответствующей немедленной ренты. Дисконтный множитель определяется с учетом периода отсрочки. Например, если современная величина годовой немедленной ренты равна A, то современная величина отложенной на t лет ренты составит $A_t = Av^t$, где v^t — дисконтный множитель за t лет, см. (2.12).

Сравнение современных величин обычных годовых и p-срочных рент с разными условиями. Современная величина ренты существенно зависит от того, как часто производятся платежи и начисляются проценты. Ниже приводятся соотношения современных величин соответствующих финансовых рент. Современные величины обозначены как $A(p;\ m)$: $A(1;\ 1)$ — годовой ренты с начислением процентов в конце года; $A(1, m)$ — годовой ренты с начислением процентов m раз в году, $A(p; \infty)$ — p-срочной ренты с непрерывным начислением процентов и т. д. Для одних и тех же сумм годовых выплат, продолжительности ренты и процентных ставок ($i = j = \delta$) получим соотношения:

$$A(1;\ \infty) < \underset{m>1}{A(1;\ m)} < A(1;\ 1) < \underset{p>1}{A(p;\ \infty)} < \underset{1<p<m}{A(p;\ m)} <$$
$$< \underset{p=m>1}{A(p;\ m)} < \underset{p>m>1}{A(p;\ m)} < \underset{p>1}{A(p;\ 1)}.$$

Приведенные неравенства могут быть использованы при разработке условий контрактов, так как позволяют заранее сравнить их конечные результаты. Например, для одной и той же годовой суммы платежей, процентной ставки и общего срока ренты условия $p = 2$ и $m = 4$ дают меньшую современную величину, чем с $p = 4$ и $m = 2$. Для ренты, которая характеризуется параметрами: $R=10$ тыс. руб., $n=10$ лет, $i=j=\delta=6\%$, получим следующие значения современных величин:

	$m=1$	$m=2$	$m=4$	$m=12$	$m=\infty$
$p=1$	73,60	73,29	73,13	73,02	72,96
$p=4$	75,24	74,94	74,79	74,69	74,64

3.4. ВЗАИМОЗАВИСИМОСТИ ОБОБЩЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК (КОЭФФИЦИЕНТОВ НАРАЩЕНИЯ И ПРИВЕДЕНИЯ) ФИНАНСОВЫХ РЕНТ И ИХ СВОЙСТВА

Взаимозависимости наращенной суммы и современной величины потоков платежей. Наращенная сумма для любого потока платежей легко определяется по значению современной величины этого потока путем наращения ее по соответствующей процентной ставке и, наоборот, современная величина потока платежей может быть вычислена по наращенной сумме путем ее дисконтирования.

Взаимозависимости наращенных сумм и современных величин постоянных дискретных рент описываются следующими формулами:

ренты с начислением процентов в конце года

$$S=A(1+i)^n; \quad (3.45) \qquad A=S(1+i)^{-n}=Sv^n; \quad (3.46)$$

ренты с начислением процентов m раз в году

$$S=A(1+j/m)^{mn}; \quad (3.47) \qquad A=S(1+j/m)^{-mn}. \quad (3.48)$$

Значения $(1+i)^n$ приведены в табл. П. 3, значения v^n — в табл. П. 4.

Пример 3.9. Наращенная сумма потока платежей в примере 3.3 составила 22588,92 руб. Современная величина в этом случае находится как $A=22588{,}92\cdot 1{,}03^{-10}=16808{,}28$ руб.

Ренты с непрерывным начислением процентов

$$S=Ae^{\delta n}; \quad (3.49) \qquad A=Se^{-\delta n}. \quad (3.50)$$

Взаимосвязи коэффициентов наращения и приведения постоянных рент (годовых и p-срочных). Для расчетов используются формулы:

ренты с начислением процентов раз в году

$$s_{n;\,i}=a_{n;\,i}(1+i)^n; \qquad (3.51)$$

$$a_{n;\,i}=s_{n;\,i}v^n; \qquad (3.52)$$

$$\frac{1}{a_{n;\,i}}-\frac{1}{s_{n;\,i}}=i; \qquad (3.53)$$

ренты с начислением процентов m раз в году

$$s_{mn;\, j/m} = a_{mn,\, j/m}(1 + j/m)^{mn}; \qquad (3.54)$$

$$a_{mn,\, j/m} = s_{mn;\, j/m}(1 + j/m)^{-mn}; \qquad (3.55)$$

ренты с непрерывным начислением процентов

$$s_{n;\,\delta} = a_{n;\,\delta} e^{\delta n}; \qquad (3.56)$$

$$a_{n;\,\delta} = s_{n;\,\delta} e^{-\delta n}. \qquad (3.57)$$

Свойства коэффициентов наращения и приведения постоянных рент. Значения коэффициентов для некоторых n и i:

$$s_{\infty;\, i} = \infty, \quad s_{n;\, 0} = n, \quad a_{\infty;\, i} = 1/i,$$

$$a_{n;\, 0} = n, \quad s_{\infty;\, \delta} = \infty, \quad \tilde{s}_{n;\, 0} = n,$$

$$a_{\infty;\, \delta} = 1/\delta, \quad \tilde{a}_{n;\, 0} = n.$$

Производные коэффициентов по n:

$$\frac{\partial s_{n;\, i}}{\partial n} = \frac{\ln(1+i)}{i}(1+i). \qquad (3.58)$$

Поскольку $i > 0$, то $\frac{\partial s}{\partial n} > 0$, т. е. абсолютный прирост коэффициента наращения увеличивается с ростом n.

$$\frac{\partial a_{n;\, i}}{\partial n} = -\frac{\ln(1+i)}{i}(1+i)^{-n}. \qquad (3.59)$$

Поскольку $i > 0$, то $\frac{\partial a_{n;\, i}}{\partial n} < 0$, т. е. абсолютный прирост коэффициента приведения уменьшается по мере роста n.

Для непрерывного наращения процентов:

$$\frac{\partial s_{n;\,\delta}}{\partial n} = e^{\delta n}; \quad (3.60) \qquad \frac{\partial a_{n;\,\delta}}{\partial n} = -e^{-\delta n}. \quad (3.61)$$

Изменение коэффициентов наращения и приведения в зависимости от срока ренты иллюстрируется на рис. 3.1 и 3.2.

3.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗМЕРА ПЛАТЕЖА (ЧЛЕНА РЕНТЫ) И СРОКА ПОСТОЯННОЙ ДИСКРЕТНОЙ РЕНТЫ

При разработке условий контрактов или в ряде задач финансового анализа, например при планировании погашения задолженности, изменении условия контракта и т. д., могут возникнуть случаи, когда заданной является одна из двух обобщающих характеристик — наращенная сумма или современная величина финансовой ренты, и требуется найти размер платежа при известном сроке последовательных платежей или, наоборот, при заданном размере платежей необходимо найти продолжительность ренты.

Определение размера платежа (члена ренты). Возможны два варианта постановки задач в зависимости от того, какая величина является исходной — наращенная сумма или современная величина ренты. Искомый член ренты находится делением наращенной суммы S (см. 3.2) на соответствующий коэффициент наращения или делением современной величины A (см. 3.3) на коэффициент приведения:

годовая рента

$$R = S : s_{n;\, i}; \qquad R = A : a_{n;\, i}; \qquad (3.62),\ (3.63)$$

$$R = S : \bar{s}_{mn;\, j/m}; \quad R = A : \bar{a}_{mn;\, j/m}; \qquad (3.64),\ (3.65)$$

$$R = S : s_{n;\, \delta}; \qquad R = A : a_{n;\, \delta} \qquad (3.66),\ (3.67)$$

p-срочная рента

$$R = S : s^{(p)}_{n;\, i}; \qquad R = A : a^{(p)}_{n;\, i}; \qquad (3.68),\ (3.69)$$

$$R = S : s^{(p)}_{mn;\, j/m}; \qquad R = A : a^{(p)}_{mn;\, j/m}; \qquad (3.70),\ (3.71)$$

$$R = S : s^{(p)}_{n;\, \delta}; \qquad R = A : a^{(p)}_{n;\, \delta}. \qquad (3.72),\ (3.73)$$

Коэффициенты наращения в этих формулах определяются по формулам (3.2), (3.4), (3.10), (3.15), (3.20), коэффициенты приведения — по (3.26), (3.28), (3.32), (3.40), (3.42).

Пример 3.10. Необходимо определить размер равных взносов в конце года для следующих двух ситуаций, в каждой из которых предусматривается начисление на взносы годовых процентов по ставке 8%:

а) создать к концу пятилетия фонд, равный 1 млн. руб.;

б) погасить текущую задолженность, которая равна 1 млн. руб.

а) Приравняем размер создаваемого фонда к наращенной сумме постоянной ренты с параметрами $n = 5$, $i = 8\%$, откуда по формуле (3.62) находим $R = S : s_{5;\, 8} = 10\,000 : 5{,}8666096 = 170456{,}2$ руб. Таким образом, ежегодные взносы в размере 170456,2 руб. достаточны для начисления на них процентов по указанной ставке для накопления 1 млн. руб.

б) Для определения ежегодной суммы погашения текущего долга в 1 млн. руб. приравняем его к современной величине ренты, члены которой погашают долг (подробнее о планах погашения задолженности см. гл. 5). Коэффициент приведения равен $a_{5;\, 8}$. На основе формулы (3.63) находим $R = 1\,000\,000 : a_{5;\, 8} = 1\,000\,000 : 3{,}99271 = 250456{,}46$ руб.

Определение срока ренты. Срок ренты (и соответственно число платежей) может быть определен по основным характеристикам финансовой ренты: наращенной сумме (или современной величине), размеру члена ренты и уровню процентной ставки.

Годовая рента (начисление процентов один раз в году)

$$n=\frac{\log\left(\frac{S}{R}i+1\right)}{\log(1+i)}; \tag{3.74}$$

$$n=\frac{\log\left(1-\frac{A}{R}i\right)^{-1}}{\log(1+i)}; \tag{3.75}$$

p-срочная рента (начисление процентов один раз в году)

$$n=\frac{\log\left(\frac{S}{R}\frac{i}{K_{p;\,i}}+1\right)}{\log(1+i)}; \quad (3.76) \qquad n=\frac{\log\left(1-\frac{A}{R}\cdot\frac{i}{K_{p;\,i}}\right)^{-1}}{\log(1+i)}. \quad (3.77)$$

Коэффициент $K_{p;\,i}$ определяется по формуле (3.6), его значения приведены в табл. П.12.

Годовая рента (начисление процентов m раз в году)

$$n=\frac{\log\left(\frac{S\cdot j}{Rm}s_{m;\,j/m}+1\right)}{m\log(1+j/m)}; \tag{3.78}$$

$$n=\frac{\log\left(1-\frac{A}{R}\frac{j}{m}s_{m;\,j/m}\right)^{-1}}{m\log(1+j/m)}. \tag{3.79}$$

Коэффициент наращения $s_{m;\,j/m}$ определяется по формуле (3.12) и табл. П.10.

p-срочная рента с начислением m раз в году ($p\neq m$)

$$n=\frac{\log\left\{\frac{S}{R}p[(1+j/m)^{m/p}-1]+1\right\}}{m\log(1+j/m)}; \tag{3.80}$$

$$n=\frac{\log\left\{1-\frac{A}{R}p\,[(1+j/m)^{m/p}-1]\right\}^{-1}}{m\log(1+j/m)}. \tag{3.81}$$

p-срочная рента с начислением процентов m раз в году ($p=m$)

$$n=\frac{\log\left(\frac{S}{R}j+1\right)}{m\log(1+j/m)}; \quad (3.82) \qquad n=\frac{\log\left(1-\frac{A}{R}j\right)^{-1}}{m\log(1+j/m)}. \quad (3.83)$$

Годовая рента (непрерывное начисление процентов)

$$n=\frac{\ln\left(\frac{S}{R}\delta+1\right)}{\delta}; \quad (3.84) \qquad n=\frac{\ln\left(1-\frac{A}{R}\delta\right)^{-1}}{\delta}. \quad (3.85)$$

p-срочная (непрерывное начисление процентов)

$$n = \frac{\ln\left[\frac{S}{R}p\,(e^{\delta/p}-1)+1\right]}{\delta}; \tag{3.86}$$

$$n = \frac{\ln\left[1-\frac{A}{R}p\,(e^{\delta/p}-1)\right]^{-1}}{\delta}. \tag{3.87}$$

Примечания. 1. Полученные по формулам (3.74) — (3.87) значения сроков ренты, как правило, будут дробными. В этих случаях в качестве n для годовых рент принимается ближайшее меньшее целое число. Если рента p-срочная, то округлению до ближайшего меньшего числа подлежит число периодов ренты np. Например, если для квартальной ренты получено расчетное значение $n=6{,}28$, то $np=25{,}12$. Эта величина округляется до 25 периодов. Откуда $n=6{,}25$.

2. Поскольку расчетное число лет (или число периодов) округляется до меньшего значения, то наращенные суммы и современные величины соответствующих потоков платежей оказываются меньше заданных. Если это допустимо исходя из содержания финансовой операции, то разность между заданной и полученной по округленному числу лет (числу периодов) обобщающими характеристиками должна быть компенсирована. Например, если речь идет о погашении долга с помощью выплаты постоянной ренты, то компенсация может быть осуществлена соответствующим взносом в начале ренты или повышением величины члена ренты.

3. Из приведенных выше формул для определения n, когда заданной является современная величина ренты A, следует, что продолжительность ренты будет положительным конечным числом только в том случае, когда соблюдаются следующие неравенства: для (3.75): $R>Ai$; для (3.77): $R > A\,\frac{i}{K_{p;\,i}}$; для (3.79): $R > A\,\frac{j}{m}\,s_{m;\,j/m}$; для (3.81): $R > Ap[(1+j/m)^{m/p}-1]$; для (3.83): $R>A_j$; для (3.85): $R>A\delta$; наконец, для (3.87): $R>Ap(e^{\delta/p}-1)$. Иначе говоря, если A — текущее значение долга, погашаемого путем выплаты постоянной финансовой ренты, то долг будет погашен за конечное число платежей только при соблюдении условий, выраженных приведенными неравенствами. Если же условия таковы, что вместо неравенства окажется равенство, например, для (3.75) $R=Ai$, то $n=\infty$, рента окажется вечной и долг теоретически погашается только при бесконечно длительной выплате погасительных платежей. Наконец, если условия ренты предполагают, что $R<Ai$, то это означает, что начисленные на остаток долга проценты превышают размеры пога-

сительных платежей и долг в сумме A не может быть погашен выплатой ренты с членом, равным R.

Пример 3.11. Сумма инвестиций, осуществленных за счет привлеченных средств, равна 10 млн. руб. Предполагается, что отдача от них составит 1 млн. руб. ежегодно (получаемых в конце года). За какой срок окупятся инвестиции, если на долг начисляются проценты по ставке 6% годовых?

Так как $Ai=0{,}6$ млн. руб., т. е. $Ai<R=1$ млн. руб., то долг можно погасить. Однако уже при ставке 10% $Ai=1$ млн. руб., т. е. погашение долга практически невозможно.

По формуле (3.75) находим:

$$n = \frac{\log\left(1-\frac{10}{1}0{,}06\right)^{-1}}{\log 1{,}06} = 15{,}72 \text{ года.}$$

Округляем полученный результат до $n=15$. В этом случае современная величина погасительных платежей составит: $A = 1\,000\,000\ a_{15;6} = 9712249$ руб., т. е. последовательность платежей не полностью обеспечивает погашение долга, поэтому разность 287 751 руб. должна быть выплачена в начале операции или должен быть несколько увеличен размер годового платежа. Тогда по формуле (3.63) находим $R = 10 : a_{15;6} = 1{,}0296286$ млн. руб.

3.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОЦЕНТНОЙ СТАВКИ ФИНАНСОВОЙ РЕНТЫ

Расчетная величина ставки процентов имеет важное значение в финансово-экономическом анализе, например, при оценке эффективности различных операций, с которыми связаны периодические выплаты (получения) денег. Необходимость определения ставки возникает и на стадии подготовки различных контрактов, в том числе и внешнеэкономических, предусматривающих периодические платежи.

Процентную ставку i по заданным остальным характеристикам постоянной финансовой ренты рассчитывают с помощью интерполяционных формул, на основе итерационного метода Ньютона — Рафсона, или метода секущей (см. приложение 2). Значения i могут быть также оценены на основе разложения бинома Ньютона (см. приложение 2) и использования двух-трех первых членов этого разложения, однако если i имеет высокое значение (около 0,1 и выше), то полученные при разложении бинома оценки будут содержать существенные погрешности. Этот метод далее не рассматривается.

Линейная интерполяция. Для оценивания уровня процентной ставки в зависимости от заданного коэффициента наращeния или коэффициента приведения финансовой ренты (3.2 и 3.3) применима следующая интерполяционная формула:

ставка процентов

$$i = i_{н} + \frac{a - a_{н}}{a_{в} - a_{н}} (i_{в} - i_{н}), \tag{3.88}$$

где $a_{в}$ и $a_{н}$ — значения коэффициента наращения или коэффициента приведения для процентных ставок $i_{в}$ и $i_{н}$; a — коэффициент наращения или коэффициент приведения, полученные по исходным данным как S/R и A/R.

Если начисления процентов производятся m раз в году, то необходимо определить значение i по формуле (3.88), а затем, используя соотношение (2.44), найти искомую величину j. Оценить j можно и непосредственно по интерполяционной формуле (3.88).

Оценки i (или j), полученные по интерполяционной формуле, несколько отличаются от точных значений этой величины. Так, если i определяется по исходным A и R, то оценка оказывается несколько преувеличенной. В свою очередь оценка i по S и R немного меньше точной. Погрешности в оценках ставки по интерполяционной формуле сокращаются при уменьшении диапазона $i_{в}$—$i_{н}$, охватывающего искомое значение процентной ставки.

Пример 3.12. За 7 лет необходимо создать фонд, равный 1 млн. руб. Допустим, что для этого выделяется по 100 тыс. руб. ежегодно. Какова должна быть ставка, по которой на взносы начисляются проценты, для того чтобы фонд был создан?

Рассмотрим несколько вариантов условий выплат и начисления процентов.

а) Взносы и начисление процентов в конце года.

Коэффициент наращения, определяемый условиями задачи, — $s_{7;\,i} = 1000 : 100 = 10$. Предполагаем, что значение i находится в диапазоне 11—12%. Таким образом, $i_{в} = 0{,}12$ и $i_{н} = 0{,}11$, соответственно $s_{в} = s_{7;12} = 10{,}089012$, $s_{н} = s_{7;11} = 9{,}783274$. Диапазон для процентных ставок выбран правильно, так как $s_{7;11} < s_{7;\,i} < s_{7;\,12}$.

Согласно (3.88) получим:

$$i = 0{,}11 + \frac{10 - 9{,}783274}{10{,}089012 - 9{,}783274} \cdot (0{,}12 - 0{,}11) = 0{,}11709.$$

Проверка: по формуле (3.2) находим $s_{7,11,709} = 9{,}999$, таким образом ставка 11,709% практически обеспечивает выполнение поставленных условий ($S/R = 10$).

б) Взносы ежегодные, начисление процентов 4 раза в году. В этом случае, использовав полученный выше ответ $i = 0{,}11709$, находим по формуле (2.44) $j = 4(\sqrt[4]{1{,}11709} - 1) = 0{,}11227$. Проверка: по формуле (3.10) находим $s_{mn,\,j/m} = s_{28\;11{,}227/4} = 9{,}9989$.

в) Взносы производятся ежеквартально. Коэффициент наращения по условиям задачи $s^{(4)}_{7;i} = 10$. По формуле (3.5) находим $s_{в} = s^{(4)}_{7;12} = s_{7;12} \cdot K_{4;12} = 10{,}089012 \cdot 1{,}043938 = 10{,}532303$ и $s_{н} = s^{(4)}_{7;11} = s_{7;11} \cdot K_{4;11} = 9{,}783274 \cdot 1{,}040353 = 10{,}178058$. Поскольку $s_{н} > s^{(4)}_{7;i} = 10$, то несколько снизим нижнюю границу интервала для процентной ставки. Пусть теперь $i_{н} = 0{,}10$. Теперь интервал процентных ставок равен 10—11% и, следовательно, $s_{н} = s^{(4)}_{7;10} = s_{7;10} \cdot K_{4;10} = 9{,}487171 \cdot 1{,}036756 = 9{,}835877$. $s_{в} = s^{(4)}_{7;11}$ и $s_{н} = s^{(4)}_{7;10}$, откуда

$$i = 0{,}10 + \frac{10 - 9{,}835877}{10{,}178058 - 9{,}835877}(0{,}11 - 0{,}1) = 0{,}1048.$$

Проверка: $s^{(4)}_{7;10{,}48} = 9{,}9986$. Результат близок к заданному значению коэффициента наращения $s^{(4)}_{7;i} = 10$.

Определение ставки процентов с помощью метода Ньютона — Рафсона. Общая формула итерационного метода Ньютона—Рафсона приведена в приложении 2. Этот метод удобнее применить не для непосредственной оценки ставки i, а для множителя наращения $q = (1 + i)$. Функция, необходимая для оценивания ставок процентов, разработана для двух вариантов (исходных условий): когда заданным является отношение наращенной суммы ренты к годовой сумме платежа $(S : R)$ и отношение современной величины ренты к этой же сумме $(A : R)$. Первое отношение равно коэффициенту наращения $s_{n;i}$ (или $s^{(p)}_{n;i}$), второе — коэффициенту приведения $a_{n;i}$ (или $a^{(p)}_{n;i}$).

Если задано отношение S/R, то на основе метода Ньютона—Рафсона оценивается множитель наращения $q = 1 + i$. Ниже приводятся функции $f(q)$ и их производные, необходимые для применения этого метода при оценке q для годовых и p-срочных рент с платежами в конце периодов и начислением процентов один раз в году:

годовая рента

$$f(q_k) = q_k^n - \frac{S}{R}(q_k - 1) - 1; \quad (3.89) \qquad f'(q_k) = nq_k^{n-1} - \frac{S}{R}; \quad (3.90)$$

p-срочная рента

$$f(q_k) = q_k^n - \frac{S}{R}p(q_k^{1/p} - 1); \quad (3.91)$$

$$f'(q_k) = nq_k^{n-1} - \frac{S}{R}q^{1/p}, \quad (3.92)$$

где q_k — значение q на k-й итерации.

Начальное значение $q_0 = 1 + i_0$ выбирают так, чтобы $s_{n;i_0}$ (или $s^{(p)}_{n;i_0}$) было наиболее близко к заданному отношению $S : R$.

Если рента предусматривает m разовое начисление процентов по номинальной ставке j, то следует оценить годовую ставку и по формуле (2.43) определить j.

Для определения точности оценки i или проверки результата следует рассчитать коэффициент наращения $s_{n;\,i_k}$ (или $s_{n;\,i_k}^{(p)}$) и сравнить с исходной величиной $S:R$.

Пример 3.13. Рассчитаем i для условий примера 3.12 (вариант а). Поскольку задано, что $S:R=10$, то $s_{7;i}=10$. Выбираем q_0 следующим образом: находим табличное значение i (табл. П. 10), при котором $s_{7;\,i}$ будет наиболее близко к 10. Этим значением оказывается 11%. Соответственно $q_0=1{,}11$. Далее находим по (3.89) и (3.90)

$$f(1{,}11) = 1{,}11^7 - 10\cdot(1{,}11-1) - 1 = -0{,}02384;$$

$$f'(1{,}11) = 7\cdot 1{,}11^{7-1} - 10 = 3{,}0929.$$

Откуда

$$q_1 = 1{,}11 - \frac{-0{,}02384}{3{,}0929} = 1{,}1177 \text{ и } i_1 = 11{,}77\%.$$

Проверка: $s_{7;11,77}=10{,}018>10$. Допустим, что такая степень точности нас не удовлетворяет. Тогда выполним вторую итерацию:

$$f(1{,}1177) = 0{,}0021, \quad f'(1{,}1177) = 3{,}6474;$$

$$q_2 = 1{,}1177 - \frac{0{,}0021}{3{,}6474} = 1{,}1171 \text{ и } i_2 = 11{,}71\%.$$

Проверка: $s_{7;11,71}=10{,}0001$. Уже вторая итерация дала высокую степень точности.

Пример 3.14. Пусть, как и в предыдущем примере, $S:R=10$, $n=7$, однако взносы производятся поквартально. Тогда $p=4$ и

$$f(1{,}11) = 1{,}11^7 - 10\cdot 4(1{,}11^{1/4}-1) - 1 = 0{,}0188;$$

$$f'(1{,}11) = 7\cdot 1{,}11^6 - 10\cdot 1{,}11^{1/4-1} = 3{,}8457;$$

$$q_1 = 0{,}11 - \frac{0{,}0188}{3{,}8457} = 0{,}1051.$$

Проверка: $s_{7;\,10,54}^{(4)} = 10{,}0089$.

Вторая итерация

$$f(1{,}1051) = 0{,}0009; \quad f'(1{,}1051) = 3{,}472,$$

$$q_2 = 10{,}0089 - \frac{0{,}0009}{3{,}472} = 0{,}1048.$$

Проверка: $s_{7;\,10,48}^{(4)} = 9{,}9986$.

Если в качестве исходных данных задано отношение A/R, то для оценивания q с помощью метода Ньютона—Рафсона применимы следующие функции $f(q)$:

годовая рента

$$f(q_k) = q_k^{-n} + \frac{A}{R}(q_k - 1) - 1; \tag{3.93}$$

$$f'(q_k) = \frac{A}{R} - nq_k^{-(n+1)}; \tag{3.94}$$

p-срочная рента

$$f(q_k) = q_k^{-n} + \frac{A}{R}p(q_k^{1/p} - 1) - 1; \tag{3.95}$$

$$f'(q_k) = \frac{A}{R}q_k^{1/p-1} - nq_k^{-(n+1)}. \tag{3.96}$$

Начальные значения $q_0=(1+i_0)$ выбираются так, чтобы $a_{n;\,i_0}$ (или $a^{(p)}_{n;\,i_0}$) было близко к заданному отношению $A:R$.

Для определения точности оценки i следует рассчитать коэффициенты приведения $a_{n;\,i_k}$ (3.26) или $a^{(p)}_{n;\,i_k}$ (3.28) и сравнить результат с заданной величиной $A:R$.

Пример 3.15. Какова доходность инвестиций, выраженная в виде годовой процентной ставки, если вложения составили 1 млн. руб., а ежегодные доходы в сумме 100 тыс. руб. поступают: а) в конце каждого года; б) в конце каждого квартала? Общий период поступлений дохода 15 лет.

Сумму инвестиций приравняем к современной величине потока платежей, образованного из показателей дохода, соответственно $A:R=1\,000\,000:100\,000=10$. Первоначальное значение процентной ставки найдем по табличному значению коэффициента приведения, ближайшему к 10. Для срока 15 лет ближайшие к 10 значения $a_{15;\,5,5}=10{,}037$ и $a_{15;\,6}=9{,}71$. Примем $i_0=5{,}6$, откуда $q=1{,}056$.

а) При поступлении доходов в конце года находим по формулам (3.93) и (3.94):

$$f(1{,}056) = 1{,}056^{-15} + 10(1{,}056 - 1) - 1 = 0{,}00161;$$

$$f'(1{,}056) = 10 - 15 \cdot 1{,}056^{-16} = 3{,}7271;$$

$$q_1 = 1{,}056 - \frac{0{,}00161}{3{,}7271} = 1{,}0557; \quad i_1 = 5{,}57\,\%.$$

Проверка: $a_{15;5,57}=9{,}991$. Допустим, что такая точность не отвечает требованиям. Для второй итерации находим: $f(1{,}0557)=0{,}0005$; $f'(1{,}0557)=3{,}6985$; $q_2=1{,}05556$, $i_2=5{,}556$.

Проверка: $a_{15;5,556}=10{,}0003$.

б) Значения функций для этих условий находим по формулам (3.95) и (3.96). Для оценки начального уровня ставки i_0 определим несколько значений $a^{(4)}_{15;\,i}$, см. (3.28). Для $i=5{,}5$ $a^{(4)}_{15;\,5,5}=10{,}24$, для $i=5{,}0$ $a^{(4)}_{15;\,6}=9{,}93$. Так как $a^{(4)}_{15;\,i}=10$, то выбираем значение, которое ближе к $i=6\%$. Пусть $i_0=5{,}9\%$, тогда

$$f(1{,}059)=1{,}059^{-15}+10\cdot 4\,(1{,}059^{1/4}-1)-1=0{,}00059;$$

$$f'(1{,}059)=10\cdot 1{,}059^{1/4-1}-15\cdot 1{,}059^{-16}=3{,}5846;$$

$$q_1=1{,}059-\frac{0{,}00059}{3{,}5846}=1{,}05883;\quad i_1=5{,}883\%.$$

Проверка (см. (3.28)):

$$a^{(4)}_{15;\,5,883}=10{,}0003.$$

Если финансовая рента предусматривает непрерывное начисление процентов или непрерывное дисконтирование по ставке δ (3.2, 3.3), то эту ставку при применении метода Ньютона—Рафсона можно оценить на основе следующих функций, если исходными являются отношения S/R:

годовая рента

$$f(\delta)=e^{\delta n}-\frac{S}{R}(e^{\delta}-1)-1; \quad (3.97) \qquad f'(\delta)=ne^{\delta n}-\frac{S}{R}e^{\delta}; \quad (3.98)$$

p-срочная рента

$$f(\delta)=e^{\delta n}-\frac{S}{R}p\,(e^{\delta/p}-1)-1; \tag{3.99}$$

$$f'(\delta)=ne^{\delta n}-\frac{S}{R}e^{\delta/p}. \tag{3.100}$$

В случаях когда исходными являются отношения A/R, применимы следующие функции:

годовая рента

$$f(\delta)=e^{-\delta n}+\frac{A}{R}(e^{\delta}-1)-1; \tag{3.101}$$

$$f'(\delta)=\frac{A}{R}e^{\delta}-ne^{-\delta n}; \tag{3.102}$$

p-срочная рента

$$f(\delta)=e^{-\delta n}+\frac{A}{R}p\,(e^{\delta/p}-1)-1; \tag{3.103}$$

$$f'(\delta)=\frac{A}{R}e^{\delta/p}-ne^{-\delta n}. \tag{3.104}$$

Начальное значение силы роста δ_0 выбирают так, чтобы $s_{n;\,\delta_0}$ (или $a_{n;\,\delta_0}$) были близки к заданным отношениям S/R (или A/R)

Значения $e^{\delta n}$ и $e^{-\delta n}$ приведены в табл. П.8 и П.9.

Пример 3.16. Необходимо определить доходность инвестиции (см. пример 3.15 вариант а) в виде силы роста.

Примем в качестве начального приближения $\delta_0=5{,}5\%$, тогда

$$f(0{,}055) = e^{-0{,}055\cdot 15} + 10(e^{-0{,}055} - 1) - 1 = 0{,}00364;$$

$$f'(0{,}055) = 10e^{0{,}055} - 15e^{-0{,}055\cdot 15} = 3{,}9919;$$

$$\delta_1 = 0{,}055 - \frac{0{,}00364}{3{,}9919} = 0{,}054088.$$

Проверка: $a_{15;\,5{,}4088}=9{,}9992$. Таким образом, уже на первой итерации получен ответ с высокой степенью точности.

Глава 4. АНАЛИЗ ПОТОКОВ ПЛАТЕЖЕЙ

4.1. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ПОТОКИ ПЛАТЕЖЕЙ

В гл. 3 количественным анализом охвачены постоянные дискретные финансовые ренты с различными способами выплат их членов (годовые и p-срочные) и методами начисления процентов (один и m раз в году, непрерывно). Предусматривалось, что все указанные ренты ограничены во времени. В практических финансовых расчетах встречаются и другие виды потоков платежей. Методы их анализа рассмотрены ниже. Для каждого вида потоков платежей (кроме вечных рент) приводятся формулы расчета наращенных сумм и современных величин, определяются сроки рент, размеры членов и процентных ставок. В данной главе представлены и некоторые варианты постоянных рент: по моменту и способу производства платежей (в начале и середине периодов, непрерывные), по виду применяемых процентных ставок (ренты с простыми ставками, смешанные ренты, предусматривающие начисление простых и сложных процентов), по продолжительности ренты (ограниченные и вечные). Кроме того, даются формулы для переменных потоков платежей (с постоянными абсолютными и относительными приростами платежей). Перечень рассмотренных потоков платежей и номера формул для определения наращенных сумм и современных величин приведены в табл. 4.1.

При записи формул используются следующие символы.

a — постоянный абсолютный годовой прирост членов переменной ренты;

$a_{n;i}$ — коэффициент приведения годовой ренты;

$\tilde{a}_{n;i}$, $\tilde{a}_{n;\delta}$ — коэффициенты приведения непрерывных рент;

e — основание натуральных логарифмов,

Таблица 4.1

Номера формул наращенных сумм и современных величин различных потоков платежей

Вид потока платежей	Номера формул	
	наращенных сумм	современных величин
Ренты пренумерандо	(4.1) — (4.6)	(4.13) — (4.18)
Ренты с выплатой членов в середине периодов	(4.7) — (4.12)	(4.19) — (4.24)
Ренты с простыми ставками:		
простые ставки процентов	(4.41)	(4.42)
простые учетные ставки	—	(4.43)
Смешанные ренты	(4.44)	—
Вечные ренты	—	(4.46) — (4.52)
Нерегулярные потоки платежей	(4.53); (4.54)	(4.55); (4.56)
Переменные ренты с разовыми изменениями членов	(4.57); (4.58)	(4.59); (4.60)
Ренты с постоянным абсолютным приростом платежей	(4.61); (4.63); (4.69)	(4.62); (4.64); (4.70)
Ренты с постоянным относительным изменением платежей	(4.71); (4.73); (4.75)	(4.72); (4.74); (4.76)
Непрерывные постоянные потоки платежей (ограниченные)	(4.77); (4.79)	(4.82); (4.84)
Непрерывные постоянные потоки платежей (вечные)	—	(4.87)
Непрерывные переменные потоки платежей	(4.95)	(4.96); (4.97); (4.102)

i — ставка сложных процентов;
j — номинальная ставка процентов;
g — темп роста членов переменной ренты;
q — множитель наращения;
m — число раз начислений процентов в году;
n — продолжительность ренты;
p — число платежей в году;
r — период между двумя членами ренты;
$s_{n,i}$ — коэффициент наращения годовой ренты;
$\tilde{s}_{n;i}$, $\tilde{s}_{n;\delta}$ — коэффициенты наращения непрерывных рент;
v — дисконтный множитель;
δ — сила роста (ставка непрерывных процентов);
A — современная величина потока платежей;
$\ddot{A}_n$, $A_{1/2}$ — современная величина ренты пренумерандо и ренты с платежами в середине периодов;
A_∞ — современная величина вечной ренты;
S — наращенная сумма потока платежей;

$S_п$, $S_{1/2}$ — наращенные суммы ренты пренумерандо и ренты с платежами в середине периодов;

R — член ренты (постоянная годовая сумма платежа);

R_t — размер переменного члена ренты;

R_r — член ренты с периодом, превышающим год.

Содержание других символов поясняется в каждом отдельном случае.

4.2. РЕНТЫ С ВЫПЛАТОЙ ЧЛЕНОВ РЕНТЫ В НАЧАЛЕ И СЕРЕДИНЕ ПЕРИОДОВ

Приведем расчетные формулы для постоянных дискретных ограниченных рент с начислением процентов в конце года, m раз в году и непрерывно. Отличительная их особенность заключается в том, что члены рент выплачиваются в начале периодов (рента пренумерандо) или в середине периодов. Последний случай встречается в анализе инвестиционных процессов. Общее число членов в указанных рентах равно членам обыкновенных рент, однако каждый член ренты пренумерандо «работает» на один период, а у рент с выплатой в середине периодов — на половину периода больше, чем у обыкновенной ренты.

Наращенная сумма. Для ренты пренумерандо наращенная сумма определяется как аналогичная величина обыкновенной ренты с начисленными на нее процентами за один период, для рент с платежами в середине периодов — с начисленными процентами за половину периода.

Наращенная сумма (годовая рента пренумерандо)

$$S_п = S(1 + i); \quad (4.1) \quad S_п = S(1 + j/m)^m; \quad (4.2)$$

$$S_п = Se^{\delta}. \quad (4.3)$$

Наращенная сумма (p-срочная рента пренумерандо)

$$S_п = S(1 + i)^{1/p}; \quad (4.4) \quad S_п = S(1 + j/m)^{m/p}; \quad (4.5)$$

$$S_п = Se^{\delta/p}. \quad (4.6)$$

Формулы (4.1) и (4.4) предполагают начисление процентов один раз в году, (4.2) и (4.5) — m раз в году, (4.3) и (4.6) — непрерывное начисление. Величины S во всех формулах определяются для соответствующих обыкновенных рент, см. 3.2.

Пример 4.1. Наращенная сумма обыкновенной ренты (см. пример 3.2) при условии, что платежи производятся в конце месяца (вариант б), составила 91,18 тыс. руб. Если бы они выплачивались в начале месяца, то согласно (4.4)

$$S_п = 91{,}18 \cdot 1{,}08^{1/12} = 91{,}77 \text{ тыс. руб.}$$

Наращенная сумма (годовая рента, платежи в середине года)

$$S_{1/2} = S(1+i)^{0,5}; \quad (4.7) \qquad S_{1/2} = S(1+j/m)^{m/2}; \quad (4.8)$$

$$S_{1/2} = Se^{\delta/2}. \quad (4.9)$$

Наращенная сумма (p-срочная рента, платежи в середине периода)

$$S_{1/2} = S(1+i)^{1/2p}; \quad (4.10) \qquad S_{1/2} = S(1+j/m)^{m/2p}; \quad (4.11)$$

$$S_{1/2} = Se^{\delta/2p}. \quad (4.12)$$

Формулы (4.7) и (4.10) предполагают начисление процентов один раз в году, (4.8) и (4.11) — m раз в году, (4.9) и (4.12) — непрерывное начисление. Величины S во всех формулах определяются для соответствующих обыкновенных рент, см. 3.2.

Коэффициенты наращения рассмотренных выше рент равны коэффициентам наращения обыкновенных рент с учетом множителей, приведенных в формулах (4.1) — (4.12). Например, для годовой ренты с выплатами в середине года коэффициент наращения составит $s_{n;\,i}\sqrt{1+i}$. Формулы (4.7) — (4.12) могут также использоваться для приближенного расчета наращенных сумм рент, в которых платежи производятся равномерно на протяжении всего периода.

Пример 4.2. Взносы в фонд производятся на протяжении 5 лет ежегодно по 10 тыс. руб.; на взносы начисляются проценты по ставке $i = 8\%$. Какова наращенная сумма на конец пятилетия, если платежи производятся в середине, а также в конце и в начале каждого года?

При платежах в конце года (обыкновенная рента) получим по формуле (3.1):

$$S = 10\,000 \cdot s_{5;\,8} = 10\,000 \cdot 5{,}866601 = 58666{,}01 \text{ руб.}$$

Для платежей в середине и начале года находим по (4.7) и (4.1):

$$S_{1/2} = 58666{,}01 \cdot 1{,}08^{0,5} = 60967{,}51 \text{ руб.};$$

$$S_{п} = 58666{,}01 \cdot 1{,}08 = 63359{,}29 \text{ руб.}$$

Современная величина. Для ренты пренумерандо современная величина определяется как аналогичная величина обыкновенной ренты с начисленными на нее процентами за один период, для рент с платежами в середине периодов — с начисленными процентами за половину периода.

Современная величина (годовая рента пренумерандо)

$$A_{п} = A(1+i); \quad (4.13) \qquad A_{п} = A(1+j/m)^{m}; \quad (4.14)$$

$$A_п = Ae^{\delta}. \quad (4.15)$$

Современная величина (p-срочная рента пренумерандо)

$$A_п = A(1+i)^{1/p}; \quad (4.16) \quad A_п = A(1+j/m)^{m/p}; \quad (4.17)$$

$$A_п = Ae^{\delta/p}. \quad (4.18)$$

Формулы (4.13) и (4.16) предполагают начисление процентов раз в году, (4.14) и (4.17) — m раз в году, (4.15) и (4.12) — непрерывное начисление. Величины A во всех формулах определяются для соответствующих обыкновенных рент, см. 3.3.

Пример 4.3. Современная величина ренты в примере 3.5 (вариант б) при условии, что $p = 12$, $j = 0{,}08$, равна 52,05 тыс. руб. Если платежи будут поступать в начале месяца, то соответствующая современная величина потока платежей составит согласно (4.16):

$$A_п = 52{,}05 \cdot 1{,}08^{1/12} = 52{,}385 \text{ тыс. руб.}$$

Современная величина (годовая рента, платежи в середине года)

$$A_{1/2} = A(1+i)^{0,5}; \quad (4.19) \quad A_{1/2} = A(1+j/m)^{m/2}; \quad (4.20)$$

$$A_{1/2} = Ae^{\delta/2}. \quad (4.21)$$

Современная величина (p-срочная рента, платежи в середине периода)

$$A_{1/2} = A(1+i)^{1/p}; \quad (4.22) \quad A_{1/2} = A(1+j/m)^{m/2p}; \quad (4.23)$$

$$A_{1/2} = Ae^{\delta/2p}. \quad (4.24)$$

Формулы (4.19) и (4.22) предполагают начисление процентов раз в году, (4.20) и (4.23) — m раз в году, (4.21) и (4.24) — непрерывное начисление. Величины A в этих формулах определяются для соответствующих обыкновенных рент, см. 3.3. Коэффициенты приведения рассмотренных выше рент равны коэффициентам приведения обыкновенных рент с учетом множителей, приведенных в формулах (4.13) — (4.24). Например, для годовой ренты с выплатами в середине года коэффициент приведения составит $a_{n;i}\sqrt{1+i}$.

Формулы (4.19) — (4.24) могут использоваться для приближенного расчета современных величин рент, в которых платежи производятся равномерно на протяжении всего периода.

Пример 4.4. Чему равна капитализированная величина доходов при ставке $i = 8{,}25\%$, если ожидается, что доходы будут поступать на протяжении четырех лет в середине каждого года, причем годовая сумма поступлений оценивается величиной 20 тыс. руб.?

Современную величину обыкновенной ренты с параметрами $R=20$, $n=4$, $i=8{,}25$ получим по (3.25):

$$A = 20 \cdot \frac{1-1{,}0825^{-4}}{0{,}825} = 65{,}875.$$

Для ренты с выплатой в середине года находим

$$A_{1/2} = 65{,}875 \cdot 1{,}0825^{0,5} = 68{,}538 \text{ тыс. руб.}$$

Определение размера платежа. Член ренты может быть рассчитан при условии, что все параметры ренты известны, кроме того, задана величина наращенной суммы ($S_п$, $S_{1/2}$) или современной величины ренты ($A_п$, $A_{1/2}$). Для этого на основе формул (4.1)—(4.12) находят величину наращенной суммы обыкновенной ренты S, далее для расчета члена ренты R используются формулы из 3.6. Аналогично по формулам (4.13) — (4.24) находят современную величину обыкновенной ренты A, далее для расчета R используются формулы из 3.6.

Пример 4.5. За 6 лет должна быть накоплена сумма, равная 12 млн. руб. Платежи для создания фонда выплачиваются в начале каждого месяца, проценты начисляются также помесячно (ставка 8%). Каков размер разового взноса?

По условиям задачи: $S_п=12$ млн. руб., $p=m=12$, $j=0{,}08$. По формуле (4.5) находим $S=12\,000 : (1+\frac{0{,}08}{12})=11920{,}53$ тыс. руб., после чего по формуле (3.70) получим искомую годовую сумму платежей:

$$R = 11920{,}53 : s_{72;\,8}^{(12)} = 11920{,}53 : 7{,}668777 = 1554{,}424 \text{ тыс. руб.}$$

Ежемесячно нужно вносить: $1554{,}424 : 12 = 129{,}535$ тыс. руб.

Определение срока ренты. Срок ренты пренумерандо можно рассчитать по формулам (3.74) — (3.87), полученным для обыкновенных рент, предварительно определив на основе формул (4.1) — (4.6) и (4.13) — (4.18) величины S или A соответственно. В свою очередь для срока ренты с платежами в середине периодов величины S и A находят на основе формул (4.7) — (4.12) и (4.19) — (4.24). Например, срок p-срочной ренты пренумерандо с начислением процентов m раз в году ($p \neq m$), если задана величина наращенной суммы $S_п$, находится по формуле (3.81). Необходимая величина S определяется (см. формулу (4.5)) как $S = S_п : (1 + j/m)^{m/p}$.

Определение ставки процентов. Искомая величина может быть определена или на основе линейной интерполяции (см. (3.88)), или с помощью метода Ньютона—Рафсона (см. 3.7 и приложение 2). Ниже приводятся функции $f(q)$, где $q=1+i$, и их производные, необходимые для применения указанного метода при оценивании ставки процентов рент пренумерандо и рент с выплатами в середине периодов и наращением процентов раз в году. Если исходной является величина наращенной суммы ренты пренумерандо ($S_п$), а проценты начисляются раз в году, то

годовая рента

$$f(q_k) = q_k^n - \frac{S_п}{R}(1 - 1/q_k) - 1; \tag{4.25}$$

$$f'(q_k) = nq_k^{n-1} - \frac{S_п}{Rq_k^2}; \tag{4.26}$$

p-срочная рента

$$f(q_k) = q_k^n - \frac{S_п}{R} p(1 - 1/q_k^{1/p}) - 1; \tag{4.27}$$

$$f'(q_k) = nq_k^{n-1} - \frac{S_п}{R} q_k^{-(1+1/p)}. \tag{4.28}$$

Если исходной является современная величина ренты пренумерандо ($A_п$) с аналогичными условиями начисления процентов, то годовая рента

$$f(q_k) = q_k^{-n} + \frac{A_п}{R}(1 - 1/q_k) - 1; \tag{4.29}$$

$$f'(q_k) = \frac{A_п}{Rq^2} - nq_k^{-(n+1)}; \tag{4.30}$$

p-срочная рента

$$f(q_k) = q_k^{-n} + \frac{A_п p}{R}(1 - 1/q_k^{1/p}) - 1; \tag{4.31}$$

$$f'(q_k) = \frac{A_п}{R} q^{-(1+1/p)} - nq_k^{-(n+1)}. \tag{4.32}$$

Для рент с выплатой членов в середине периодов и начислением процентов раз в году получены следующие функции от q и их производные. Если исходной является наращенная сумма $S_{1/2}$, то

годовая рента

$$f(q_k) = (q_k^n - 1)\sqrt{q_k} - \frac{S_{1/2}}{R}(q - 1); \tag{4.33}$$

$$f'(q_k) = (n + 0,5) q_k^{-(n+0,5)} - \frac{q_k^{-0,5}}{2} - \frac{S_{1/2}}{R}; \tag{4.34}$$

p-срочная рента

$$f(q_k) = (q_k^n - 1)\sqrt{q_k} - \frac{S_п}{R} p(q_k^{1/p} - 1); \tag{4.35}$$

$$f'(q_k) = (n + 0,5) q_k^{n-0,5} - \frac{q_k^{-0,5}}{2} - \frac{S_п}{R} q^{1/p-1}. \tag{4.36}$$

Если исходной является современная величина ренты $A_{1/2}$, то годовая рента

$$f(q_k) = (1 - q_k^{-n}) \sqrt{q_k} - \frac{A_{1/2}}{R} (q - 1); \qquad (4.37)$$

$$f'(q_k) = (n + 0{,}5) q_k^{-(n+0{,}5)} + \frac{q_k^{-0{,}5}}{2} - \frac{A_{1/2}}{R}; \qquad (4.38)$$

p-срочная рента

$$f(q_k) = (1 - q_k^{-n}) \sqrt{q_k} - \frac{A_{1/2}}{R} p (q^{1/2} - 1); \qquad (4.39)$$

$$f'(q_k) = (n + 0{,}5) q_k^{-(n+0{,}5)} + \frac{q_k^{-0{,}5}}{2} - \frac{A_{1/2}}{R} q^{1/p-1}. \qquad (4.40)$$

Пример 4.6. Каков должен быть размер годовой ставки процентов, чтобы накопить за 7 лет сумму, равную 1 млн. руб.? Взносы осуществляются в середине года, их величина — 100 тыс. руб.

В качестве первого приближения примем $i_0 = 0{,}11$. Тогда $q_0 = 1{,}11$, $S_{1/2} : R = 10$ и согласно (4.33) и (4.34) получим:

$$f(1{,}11) = (1{,}11^7 - 1) \sqrt{1{,}11} - 10(1{,}11 - 1) = 0{,}0338;$$

$$f'(1{,}11) = 7{,}5 \cdot 1{,}11^{6{,}5} - \frac{1{,}11^{-0{,}5}}{2} - 10 = 4{,}3049;$$

$$q_1 = 1{,}11 - \frac{0{,}0338}{4{,}3049} = 1{,}1021, \text{ т. е. } i_1 = 10{,}21\,\%.$$

Для второй итерации получим

$f(1{,}1021) = 0{,}00247$, $f'(1{,}1021) = 3{,}6327$, $q_2 = 1{,}1014$, $i_2 = 10{,}14\%$.

Проверка: коэффициент наращения ренты согласно (4.7) равен:

$$s_{n;\,i} \cdot \sqrt{1 + i} = s_{7;\,10{,}14} \cdot \sqrt{1{,}1014} = 9{,}9998 \approx 10.$$

4.3. РЕНТЫ С ПРОСТЫМИ ПРОЦЕНТАМИ И СМЕШАННЫЕ

Рента с начислением простых процентов. Предполагается, что члены ренты одинаковы по размеру, платежи осуществляются через равные интервалы времени в конце каждого периода.

Наращенная сумма

$$S = \sum_{1}^{N} \left[1 + (t - 1) \frac{i}{p}\right] R_a = R_a N \left[1 + \frac{(N - 1) i}{2p}\right]; \qquad (4.41)$$

современная величина (математический учет, см. 1.3)

$$A = R_a \sum_{t=1}^{N} \left(1 + t\frac{i}{p} \right)^{-1}, \qquad (4.42)$$

где R_a — сумма разового платежа; N — общее число платежей; i — годовая ставка простых процентов; p — число платежей в году.

Если для дисконтирования применяются простые учетные ставки d, то

современная величина (банковский учет, см. 1.3)

$$A = \sum_{t=1}^{N} (1 - t\frac{d}{p}) R_a = R_a N (1 - \frac{N+1}{2} \cdot \frac{d}{p}). \qquad (4.43)$$

Необходимость в определении современной величины ренты с простыми процентами возникает, например, во внешнеторговых операциях, когда оплата покупки производится с помощью портфеля векселей, сроки которых равномерно распределены во времени. В этой операции современная величина характеризует сумму, которую получит экспортер при одновременном учете всех векселей (операция «а форфэ»), см. 7.4.

Пример 4.7. Какую сумму получит экспортер при учете портфеля векселей, выданных ему в качестве уплаты за товар? Каждый вексель выписан на 5000 дол., погашение векселей производится последовательно по полугодиям; общее число векселей равно 6. Банк учитывает векселя по учетной ставке 7,75%. Согласно (4.43) получим:

$$A = 5000 \cdot 6 \left(1 - \frac{6+1}{2} \cdot \frac{0,0775}{2}\right) = 25931,25 \text{ дол.}$$

Смешанные ренты. В инвестиционной практике при расчете наращенных сумм иногда применяется особый способ начисления процентов для p-срочных рент. Наращенная сумма таких рент в пределах года определяется по простым процентам, а за целые годовые периоды — по сложным. В этом случае

наращенная сумма за платежи в пределах года

$$R_{\text{год}} = R_a (p + \frac{n-1}{2} i). \qquad (4.44)$$

Величина $R_{\text{год}}$ представляет собой член годовой ренты, выплачиваемой в течение n лет, R_a — сумма разового платежа.

Наращенная сумма за весь срок ренты

$$S = R_{\text{год}} s_{n;i}. \qquad (4.45)$$

Коэффициент наращения $s_{n;i}$ рассчитывается по формуле (3.1).

Пример 4.8. Пусть в начале каждого месяца на счет вносится сумма, равная 1 тыс. руб. Определить накопленную сумму через 3 года при условии, что проценты начисляются по ставке

7%, причем в пределах года на поступающие суммы начисляются простые проценты, а за целые годовые периоды — сложные. Поток платежей имеет параметры: $R_a = 1000$, $n = 3$, $p = 12$, $i = 7\%$, $s_{3;7} = 3{,}2149$ (см. табл. П. 10). Согласно (4.44) и (4.45) получим:

$$R_{\text{год}} = 1000\left(12 + \frac{12-1}{2}\,0{,}07\right) = 12\,385 \text{ руб.};$$

$$S = 12\,385 \cdot 3{,}2149 = 39816{,}5 \text{ руб.}$$

4.4. ВЕЧНЫЕ РЕНТЫ

Наращенная сумма вечной ренты (см. 3.1) при любых ее параметрах равна бесконечно большой величине, в то же время ее современная величина имеет конкретное конечное значение. Современная величина вечной ренты оказывается полезной характеристикой в ряде финансовых расчетов, например, при замене некоторых потоков платежей с большой протяженностью единовременным платежом, оценке финансовых инвестиций, в страховых расчетах. Ниже приводятся формулы для расчета величины вечной ренты при разных условиях выплат ее членов и начисления процентов. Формулы, разработанные для вечных рент, применимы и в случаях, когда поток платежей на самом деле не является бесконечным. Однако они дают приемлемые приближенные результаты, если платежи производятся длительное время. Ошибка при высокой процентной ставке будет в этом случае незначительна.

Современная величина вечной ренты при начислении процентов раз и m раз в году. Для расчетов используются формулы:

годовая рента

$$A_\infty = R \cdot \lim_{n\to\infty} a_{n;\,i} = R : i. \tag{4.46}$$

Платежи, производимые в достаточно отдаленном будущем, оказывают весьма малое влияние на значение коэффициента приведения ограниченной ренты $a_{n;i}$, с ростом n увеличение $a_{n;i}$ будет все время замедляться и в пределе $a_{\infty;\,i} = 1 : i$ (см. рис. 3.2). В табл. 4.2 приведены значения $a_{n;\,i}$ и $a_{\infty;\,i}$ для $i = 6\%$ и разной продолжительности ренты.

Таблица 4.2

Коэффициенты приведения годовой ренты для различных сроков

Продолжительность ренты, лет	10	50	100	200	Вечная рента
Значения коэффициента приведения	7,3601	15,7619	16,6175	16,6665	16,6667

Формула (4.46) применяется при капитализации постоянных доходов, при этом предполагается, что доход в сумме R будет поступать неопределенно долго в конце каждого года, а ставка равна i.

p-срочная рента

$$A_\infty = \frac{R}{p[(1-i)^{1/p}-1]} = R\frac{K_{p;\,i}}{i}. \tag{4.47}$$

Коэффициент $K_{p;i}$ определяется по формуле (3.6), его значения приводятся в табл. П.12.

Рента с периодом, превышающим год,

$$A_\infty = \frac{R_r}{(1+i)^r-1} = \frac{R_r i}{s_{r;\,i}}. \tag{4.48}$$

Коэффициент $s_{r;i}$ определяется по формуле (3.8).

Пример 4.9. Требуется выкупить (погасить единовременным платежом) вечную ренту, член которой (10 тыс. руб.) выплачивается в конце каждого полугодия, процент начисляется раз в году, ставка $i=5\%$. Современная величина вечной ренты согласно (4.47) составит:

$$A_\infty = \frac{10}{2[(1+0{,}05)^{1/2}-1]} = 202{,}47 \text{ тыс. руб.}$$

Иначе говоря, сумма, равная 202,47 тыс., обеспечит бесконечно долгую выплату платежей по полугодиям (по 5 тыс. руб.) при условии, что на остаток будет начисляться процент по указанной ставке.

p-срочная вечная рента, начисление процентов m раз в году ($p=m$)

$$A_\infty = R:j. \tag{4.49}$$

Пример 4.10. Если в примере 4.9 начисление процентов производится по той же ставке не один, а два раза в году (т. е. $p=m=2$), то $j=0{,}05$ и $A_\infty=10:0{,}05=200$ тыс. руб.

Непрерывное начисление процентов. Для расчетов используются формулы:

годовая рента

$$A_\infty = R:(e^\delta-1); \tag{4.50}$$

p-срочная рента

$$A_\infty = R:p(e^{\delta/p}-1); \tag{4.51}$$

рента с периодом, превышающим год,

$$A_\infty = R_r:(e^{\delta r}-1). \tag{4.52}$$

Пример 4.11. Необходимо определить современную величину вечной ренты примера 4.9 при условии, что проценты начисляются непрерывно. По формуле (4.51) находим $A_\infty = \frac{10}{2(e^{0{,}05/2}-1)} = 197{,}51$ тыс. руб.

4.5. ПЕРЕМЕННЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ ПОТОКИ ПЛАТЕЖЕЙ

В практике часто сталкиваются с потоками платежей, члены которых изменяются во времени. Обычно такие изменения связаны с какими-либо обстоятельствами производственного или коммерческого характера, например планируется, что в связи с увеличением производственных мощностей периодические поставки продукции увеличиваются с какого-то момента времени в будущем. Условия поставок могут предусматривать и обратный процесс — их сокращение. Эти и многие другие последовательности платежей можно представить в виде переменных потоков платежей. Частным случаем такого потока является *переменная рента,* т. е. рента, члены которой изменяются в соответствии с каким-либо заданным законом развития. Если такого закона нет, то соответствующая последовательность платежей представляет собой *нерегулярный поток платежей.*

Ниже рассмотрены следующие переменные дискретные потоки платежей: нерегулярный, переменная рента с разовыми изменениями размера члена ренты, переменные ренты с постоянным абсолютным приростом члена ренты и с постоянным темпом роста члена ренты. Поскольку переменные потоки платежей встречаются относительно редко, их анализ дан здесь менее детально, чем постоянных (гл. 3).

Нерегулярный поток платежей. Обобщающие характеристики таких потоков (см. 3.1) можно получить только путем прямого счета. Временны́е интервалы между двумя соседними членами в нерегулярном потоке платежей могут быть любыми.

Наращенная сумма (начисление процентов раз в году)

$$S = \sum_t R_t (1 + i)^{n-t}; \qquad (4.53)$$

наращенная сумма (непрерывные проценты)

$$S = \sum_t R_t e^{\delta(n-t)}; \qquad (4.54)$$

современная величина (начисление процентов раз в году)

$$A = \sum_t R_t v^t; \qquad (4.55)$$

современная величина (непрерывные проценты)

$$A = \sum_t R_t e^{-\delta t}, \qquad (4.56)$$

где t — время от начала потока платежей до момента выплаты. Значение множителей наращения $(1+i)^n$, $e^{\delta n}$ и дисконтных множителей приведены в табл. П.2; П.3; П.5 и П.6.

Пример 4.12. График предусматривает следующий порядок выдачи ссуд во времени: 01.07 1990 г. — 50 тыс. руб., 01.01

1991 г. — 150 тыс. руб., 01.01 1993 г. — 180 тыс. руб. Необходимо найти сумму задолженности на 01.01 1994 г. при условии, что кредит выдан под 8% годовых.

Находим $S = 50 \cdot 1{,}08^{3,5} + 150 \cdot 1{,}08^3 + 180 \cdot 1{,}08 = 448{,}813$ тыс. руб.

Современная величина этого потока на 01.07 1990 г. равна:

$$A = 50 + 150 \cdot 1{,}08^{-0,5} + 180 \cdot 1{,}08^{-2,5} = 342{,}833 \text{ тыс. руб.},$$

или, используя соотношение (3.46):

$$A = 448{,}813 \cdot 1{,}08^{-3,5} = 342{,}833 \text{ тыс. руб.}$$

Переменная рента с разовыми изменениями членов ренты. Пусть общая продолжительность ренты равна n, этот срок разбит на k участков (подпериодов), в каждом из которых член ренты постоянен и равен R_t $(t=1, ..., k)$. Приведем формулы только для случаев, когда проценты начисляются раз в году.

Наращенная сумма (годовая рента)

$$S = R_1 s_{n_1;\,i}(1+i)^{n-n_1} + R_2 s_{n_2;\,i}(1+i)^{n-(n_1+n_2)} + \ldots + \\ + R_k s_{n_k;\,i}. \tag{4.57}$$

В частном случае, когда $k=2$,

наращенная сумма (годовая рента)

$$S = R_1 s_{n_1;\,i}(1+i)^{n_2} + R_2 s_{n_2;\,i}. \tag{4.58}$$

Коэффициенты наращения годовой ренты $s_{n;\,i}$ определяются по формуле (3.2), значения этих коэффициентов приводятся в табл. П.10.

Современная величина (годовая рента)

$$A = R_1 a_{n_1;\,i} + R_2 a_{n_2;\,i} v^{n_1} + \ldots + R_k a_{n_k;\,i} v^{n-n_k}. \tag{4.59}$$

В частном случае, когда $k=2$,

современная величина (годовая рента)

$$A = R_1 a_{n_1;\,i} + R_2 a_{n_2;\,i} v^{n_1}. \tag{4.60}$$

Коэффициенты приведения годовой ренты $a_{n;\,i}$ определяются по формуле (3.26), значения этих коэффициентов приводятся в табл. П.11.

Формулы (4.57)—(4.60) могут применяться и тогда, когда ставка процента изменяется одновременно с изменением члена ренты. В этом случае в каждом слагаемом этих формул берется соответствующее значение i_k. Кроме того, они применимы и для p-срочных рент (см. § 1), в этом случае вместо коэффициентов $s_{n;\,i}$ и $a_{n;\,i}$ следует использовать $s^{(p)}_{n;\,i}$ и $a^{(p)}_{n;\,i}$ (см. (3.4) и (3.28)).

Пример 4.13. По условиям соглашения производятся периодические взносы, причем общий срок выплат (5 лет) делится на два периода. В первом из них (3 года) выплачивается по

100 тыс. руб. в конце каждого полугодия, во втором — по 120 тыс. руб. Ставка процента в первом периоде — 6% годовых, во втором — 8%. Необходимо найти наращенную сумму.

По условиям задачи $n=5$, $n_1=3$, $n_2=2$, $p=2$, $i_1=0{,}06$, $i_2=0{,}08$; $R_1/2=100$, $R_2/2=120$.

Данная рента p-срочная, поэтому в формуле (4.58) вместо $s_{n;i}$ используем $s_{n;i}^{(p)}$ и получаем:

$$S = 100 \cdot 2s_{3;6}^{(2)}(1+0{,}06)^2 + 120 \cdot 2s_{2;8}^{(2)} =$$
$$= 200 \cdot 3{,}230658 + 240 \cdot 2{,}120799 = 1156{,}08 \text{ тыс. руб.}$$

Ренты с постоянным абсолютным приростом платежей. Пусть члены ренты изменяются равномерно — с постоянным абсолютным приростом (арифметическая прогрессия). Если рента годовая (выплаты в конце года), то размеры последовательных платежей составят величины R_1, R_1+a, R_1+2a, ..., $R_1+(n-1)a$. Величина t-го члена ренты равна $R_1+(t-1)a$. При наращении процентов раз в году применимы следующие формулы для определения обобщающих характеристик рент (см. 3.1):

наращенная сумма

$$S = \left(R_1 + \frac{a}{i}\right)s_{n;i} - \frac{na}{i}; \tag{4.61}$$

современная величина

$$A = \left(R_1 + \frac{a}{i}\right)a_{n;i} - \frac{nav^n}{i}. \tag{4.62}$$

Коэффициенты наращения и приведения постоянных ренты $s_{n;i}$ и $a_{n;i}$ определяются по формулам (3.2) и (3.26), значения этих коэффициентов приведены в табл. П. 10 и П. 11, значение дисконтного множителя v^n — в табл. П. 4.

Пример 4.14. Предполагается выплачивать платежи таким образом, что каждый год они увеличиваются на 1 тыс. руб. Первая уплата равна 5 тыс. руб. Ставка равна 6% годовых, срок выплат — 8 лет. Платежи и начисление процентов производятся раз в конце года. Необходимо найти современную величину и наращенную сумму данной ренты.

По условиям задачи имеем: $R_1=500$, $a=100$, $i=0{,}06$, $n=8$. Табличные значения коэффициентов: $a_{8;6}=6{,}20979$ и $v^8=1{,}06^{-8}=0{,}62741$; $1{,}06^8=1{,}59385$. Откуда по формуле (4.62):

$$A = \left(500 + \frac{100}{0{,}06}\right)6{,}20979 - \frac{8 \cdot 100 \cdot 0{,}62741}{0{,}06} = 5089{,}07 \text{ руб.}$$

Для определения S воспользуемся соотношением (3.45):

$$S = 5089{,}07 \cdot 1{,}06^8 = 8111{,}21 \text{ руб.}$$

Пусть условия остаются без изменения за исключением того, что члены ренты не увеличиваются, а уменьшаются во времени, скажем, $a = -50$. Тогда

$$A = (500 - \frac{50}{0,06})6,20979 + \frac{8 \cdot 50 \cdot 0,62741}{0,06} = 2112,80;$$

$$S = 2112,80 \cdot 1,59385 = 3367,49.$$

Если рассматриваемый вид переменной ренты предусматривает выплаты членов ренты p раз в году (p-срочная рента), то последовательные выплаты равны

$$R_1,\ R_1 + \frac{a}{p},\ R_1 + \frac{2}{p}a,\ \ldots,\ R_1 + \frac{pn-1}{p}a \text{ или } R_t = R_1 + \frac{t-1}{p}a,$$

где t — номер члена ренты, $t = 1, \ldots, pn$. При наращении процентов один раз в году применимы следующие формулы:

наращенная сумма

$$S = \sum_{1}^{pn}[R_1 + \frac{a}{p}(t-1)]q^{n-t/p}; \qquad (4.63)$$

современная величина

$$A = \sum_{1}^{pn}(R_1 + \frac{a}{p}t)v^{t/p}, \qquad (4.64)$$

где t — порядковый номер платежа, $t = 1, \ldots, pn$; t/p — период от начала ренты до момента производства платежа R_t.

Пример 4.15. Платежи в течение двух лет увеличиваются поквартально на 25 тыс. руб., первый платеж 500 тыс. руб., проценты начисляются по годовой ставке 6%. По условиям задачи $R_1 = 500$, $a/p = 25$, $i = 0,06$, $n = 2$, $pn = 8$.

Наращенная сумма к концу двухлетнего срока составит

$$S = \sum_{1}^{8}[500 + 25(t-1)]1,06^{2-t/4} = 4257,5 \text{ тыс. руб.}$$

При разработке условий соглашения о платежах, реализуемых в виде ренты, изменяющейся по арифметической прогрессии, может возникнуть потребность в определении размера первого платежа R_1 при заданном значении прироста платежа a или, наоборот, — в определении a при заданном R_1. И в том и в другом случае заданными будут также n, i, A или S. С подобного рода ситуациями сталкиваются в случаях, когда известна текущая сумма долга (ее приравнивают A) или сумма платежа в будущем (ее приравнивают S) и требуется погасить этот долг с помощью ренты. Расчеты производятся по формулам:

первый член ренты

$$R_1 = \frac{A + \frac{nav^n}{i}}{a_{n;i}} - \frac{a}{i}; \quad (4.65) \qquad R_1 = \frac{S + \frac{na}{i}}{s_{n;i}} - \frac{a}{i}; \quad (4.66)$$

абсолютный прирост

$$a = \frac{(A - R_1 a_{n;\,i})i}{a_{n;\,i} - nv^n}; \quad (4.67) \qquad a = \frac{(S - R_1 S_{n;\,i})i}{S_{n;\,i} - n}. \quad (4.68)$$

Если абсолютный прирост равен первому ее члену, т. е. $a = R_1$, то

наращенная сумма

$$S = R_1 \frac{(1 + i)S_{n;\,i} - n}{i}; \qquad (4.69)$$

современная величина

$$A = R_1 \frac{1 - v^n + a_{n;\,i} - nv^n}{i}. \qquad (4.70)$$

Пример 4.16. Текущая задолженность равна 180 тыс. руб. Решено погасить ее путем периодических платежей в течение 8 лет по схеме возрастающей ренты, причем абсолютный прирост равен первому члену. Платежи и начисление процентов на остаток долга производятся в конце года, ставка — 6% в год. Определить последовательные размеры платежей.

По условиям задачи сумма текущей задолженности $A = 180\,000$, $n = 8$, $i = 0{,}06$. Для получения ответа решим уравнение (4.69) относительно R_1. Величины $a_{n;\,i}$ и v^n имеют следующие значения: $a_{8;\,6} = 6{,}2097$; $v^n = 1{,}06^{-8} = 0{,}627412$. Откуда

$$R_1 = \frac{180\,000 \cdot 0{,}06}{1 + 6{,}209794 - (8 + 1) \cdot 0{,}627412} = 6909{,}41.$$

Базируясь на полученном результате, составим план погашения задолженности (табл. 4.3):

Таблица 4.3

Номер платежа	Сумма платежа	Дисконтированная величина платежа
1	6909,41	6518,3
2	13818,82	12298,7
3	20728,23	17403,8
4	27637,64	21891,6
5	34547,05	25815,6
6	41456,46	29225,2
7	48365,87	32166,1
8	55275,28	34680,4
Итого	—	179999,7

Ренты с постоянным относительным изменением платежей. Если платежи вносятся в конце каждого года и изменяются с постоянным темпом роста, то члены ренты представляют собой ряд, изменяющийся по геометрической прогрессии: R_1, R_1g, R_1g^2, ..., R_1g^{n-1}. Величина t-го члена ренты равна R_1g^{t-1}.

Для определения наращенной суммы и современной величины ренты при наращении процентов раз в году применяются следующие формулы:

наращенная сумма

$$S = R_1 \frac{g^n - (1+i)^n}{g - (1+i)}; \tag{4.71}$$

современная величина

$$A = R_1 \frac{g^n v^n - 1}{g - (1+i)} = \frac{1 - \left(\frac{1+k}{1+i}\right)^n}{i - k}, \tag{4.72}$$

где k — темп прироста члена ренты, $k = g - 1$.

Пример 4.17. По условиям соглашения предполагается в конце каждого года выплачивать платежи, первый из них равен 200 тыс. руб., следующие платежи увеличиваются каждый раз на 20%. Срок — 6 лет. Найти современную величину и наращенную сумму такой ренты. Ставка процента — 5,5% годовых.

Здесь $R_1 = 200$, $g = 1{,}2$; $v^n = 1{,}055^{-6} = 0{,}72524$; $(1+i)^n = 1{,}055^6 = 1{,}37883$. По формулам (4.72) и (3.45) находим:

$$A = 200 \frac{1{,}2^6 \cdot 0{,}72524 - 1}{1{,}2 - 1{,}055} = 1607{,}69;\ S = 1607{,}69 \cdot 1{,}37883 = 2216{,}75.$$

Пусть платежи производятся не один, а p раз в году, причем каждый раз они изменяются с постоянным темпом роста g, а проценты начисляются раз в году. Тогда последовательность платежей представляет собой геометрическую прогрессию R_1, $R_1g, \ldots, R_1g^{np-1}$, расчеты делают по формулам:

наращенная сумма

$$S = R_1 \frac{g^{np} - (1+i)^n}{g - (1+i)^{1/p}}; \tag{4.73}$$

современная величина

$$A = R_1 \frac{g^{np} v^n - 1}{g - (1+i)^{1/p}}. \tag{4.74}$$

Пример 4.18. Введем в условия предыдущего примера изменение: пусть член ренты выплачивается не один, а два раза в году, причем первый член равен 200 : 2, остальные условия остаются те же. В этом случае $p = 2$ и согласно (4.74) и (3.45):

$$A = \frac{200}{2} \cdot \frac{1{,}2^{12} \cdot 0{,}72524 - 1}{1{,}2 - 1{,}055^{1/2}} = 3162{,}13;\ S = 3162{,}13 \cdot 1{,}055^6 = 4360{,}08.$$

Изменение размера платежей может начинаться с первого члена их последовательности. Годовая рента представляет собой ряд $R_0 g$, $R_0 g^2$, ..., $R_0 g^t$, ..., $R_0 g^n$, где R_0 — базовый размер члена ренты. В этом случае

наращенная сумма

$$S = R_0 \frac{g^{n+1} v - (1+i)^n}{gv - 1}; \tag{4.75}$$

современная величина

$$A = R_0 \frac{(gv)^{n+1} - 1}{gv - 1}. \tag{4.76}$$

4.6. НЕПРЕРЫВНЫЕ ПОСТОЯННЫЕ ПОТОКИ ПЛАТЕЖЕЙ

Во всех рассмотренных выше рентах предполагалось, что члены потока платежей поступают дискретно — один или p раз в году. Что же касается начисления процентов, то в основном рассматривались ситуации, когда этот процесс также дискретен. Только в одном случае (гл. 3) предполагалось, что проценты начисляются непрерывно, см. (3.49), (3.50). Вместе с тем дискретные процессы, особенно в производственных системах, не являются единственно возможными. В ряде случаев более адекватное описание финансовых явлений достигается, когда поток платежей без большой потери точности воспринимается как непрерывный процесс. В таких ситуациях, например, когда отдача от инвестиций происходит так часто, что в целом этот поток платежей можно рассматривать как непрерывный, применяют непрерывные ренты. Концепция непрерывности в определенных условиях увеличивает возможности анализа как в отношении его глубины, так и по охвату различных проблем и ситуаций.

Суммы платежей за фиксированные интервалы времени (например, годовые периоды) в непрерывных потоках могут быть постоянными (непрерывные постоянные ренты), а также могут изменяться по какому-либо закону или в каком-либо заданном порядке (непрерывные переменные ренты). Наращение процентов или дисконтирование в таких рентах осуществляется по процентной ставке, начисляемой за некоторый период, или по непрерывной ставке — силе роста (см. 2.5).

Наращенная сумма. Приведем формулы для расчета наращенных сумм величин непрерывных постоянных рент — по годовой ставке процентов i и по силе роста δ.

Наращенная сумма (годовая ставка процентов)

$$S = R\tilde{s}_{n;i}; \tag{4.77}$$

коэффициент наращения

$$\tilde{s}_{n;i} = \frac{(1+i)^n - 1}{\ln(1+i)}. \tag{4.78}$$

Коэффициенты наращения непрерывной ренты за год приближенно можно найти как $\tilde{s}_{1;i} = (1+i)^{1/2}$.

Наращенная сумма (непрерывные проценты)

$$S = R\tilde{s}_{n;\delta};\tag{4.79}$$

коэффициент наращения

$$\tilde{s}_{n;\delta} = \int\limits_0^n e^{\delta t} dt = \frac{e^{\delta n} - 1}{\delta}.\tag{4.80}$$

Значения коэффициентов наращения $\tilde{s}_{n;\delta}$ приведены в табл. П.8. Формулы (4.77) и (4.79) дают одинаковые результаты, когда ставки δ и i эквивалентны, т. е. $\delta = \ln(1+i)$. Влияние перехода от дискретной к непрерывной ренте с годовыми процентами измеряется соотношением

$$\tilde{s}_{n;i} = \frac{i}{\ln(1+i)} s_{n;i},\tag{4.81}$$

где $s_{n;i}$ — коэффициент наращения дискретной ренты, см. (3.21).

Пример 4.19. Ожидается, что доходы от эксплуатации месторождения полезных ископаемых составят 1 млн. руб. в год, продолжительность разработки 10 лет, доходы поступают непрерывно и равномерно в пределах года и на протяжении всего периода.

Общая наращенная сумма поступлений при начислении на них процентов из расчета 8% в год составит по формуле (4.77)

$$S = 1\,\frac{1{,}08^{10} - 1}{\ln 1{,}08} = 15{,}06 \text{ млн. руб.}$$

Аналогичный результат получим на основе непрерывного процента, если силу роста найдем из условия эквивалентности $\delta = \ln 1{,}08 = 0{,}076961$. Откуда по формуле (4.79)

$$S = 1\,\frac{e^{0{,}076961 \cdot 10} - 1}{0{,}076961} = 15{,}06 \text{ млн. руб.}$$

Если бы эти поступления были дискретны (например, в конце каждого года), то согласно (3.1) получим $S = 1 \cdot s_{10;8} = 14{,}486$ млн. руб. Таким образом, непрерывный поток поступлений вместо платежей в конце года увеличивает наращенную сумму в $\frac{i}{\ln(1+i)} = \frac{0{,}08}{\ln 1{,}08} = 1{,}0395$ раза, т. е. почти на 4%.

Немного изменим условие — пусть теперь предусматривается, что наращение производится по непрерывной ставке $\delta = 0{,}08$. В этом случае по табл. П.13 находим $\tilde{s}_{10;8} = 15{,}319262$ и

$$S = 1 \cdot 15{,}319 = 15{,}319 \text{ млн. руб.}$$

Современная величина. Для расчетов используют формулы: современная величина (годовые проценты)

$$A = R\tilde{a}_{n;\,i}; \tag{4.82}$$

коэффициент приведения

$$\tilde{a}_{n;\,i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{\ln(1+i)}. \tag{4.83}$$

Коэффициенты приведения непрерывной ренты за год приближенно можно найти как $\tilde{a}_{1;\,i} \approx (1+i)^{-1/2}$.

Современная величина (проценты непрерывные)

$$A = R\tilde{a}_{n;\,\delta}; \tag{4.84}$$

коэффициент приведения

$$\tilde{a}_{n;\,\delta} = \int_0^n e^{-\delta t}\,dt = \frac{1-e^{-\delta n}}{\delta}. \tag{4.85}$$

Значения коэффициентов приведения $\tilde{a}_{n;\,\delta}$ содержатся в табл. 1.14.

Формулы (4.82) и (4.84) дают одинаковые результаты, когда ставки δ и i эквивалентны, т. е. $\delta = \ln(1+i)$.

Влияние перехода от дискретной годовой ренты к непрерывному равномерному потоку платежей с годовыми процентами измеряется соотношением

$$\tilde{a}_{n;\,i} = \frac{i}{\ln(1+i)}\,a_{n;\,i}, \tag{4.86}$$

где $a_{n;\,i}$ — коэффициент приведения дискретной ренты.

Современная величина вечной (см. 3.1) непрерывной ренты (проценты непрерывные)

$$A = R : \delta. \tag{4.87}$$

Формулы взаимосвязи коэффициентов наращения и приведения непрерывных рент

$$\tilde{a}_{n;\,i} = \tilde{s}_{n;\,i}(1+i)^{-n}; \tag{4.88}$$

$$\tilde{a}_{n;\,\delta} = \tilde{s}_{n;\,\delta}\,e^{-\delta n}. \tag{4.89}$$

Пример 4.20. Современная величина дохода при непрерывном его поступлении (см. пример 4.19) при применении годовой ставки $i = 8\%$ составит

$$A = 1\,\frac{1-1{,}08^{-10}}{\ln 1{,}08} = 6{,}975 \text{ млн. руб.}$$

К такому же результату приводит дисконтирование по эквивалентной ставке δ. Находим $\delta = \ln 1{,}08$, откуда

$$A = 1 \frac{1 - e^{-\ln 1{,}08 \cdot 10}}{\ln 1{,}08} = 6{,}975 \text{ млн. руб.}$$

Если же $\delta = 0{,}08$, то по табл. П.14 находим $\tilde{a}_{10;8} = 6{,}88339$ откуда $A = 6{,}883$ млн. руб.

Определение члена ренты. Размер члена непрерывной ренты (годовую сумму платежей) легко рассчитать, если заданы все остальные ее параметры, на основе формул (4.77), (4.79), (4.82) и (4.84).

Определение срока ренты. Исходной величиной при определении срока ренты является отношение наращенной за этот срок суммы ренты или современной ее величины к годовой сумме платежей (S/R или A/R). Приведем формулы для расчета при условии, что проценты начисляются по годовой ставке i или силе роста δ:

срок ренты (годовая ставка i)

$$n = \frac{\ln\left[\frac{S}{R}\ln(1+i) + 1\right]}{\ln(1+i)}; \tag{4.90}$$

$$n = \frac{-\ln\left[1 - \frac{A}{R}\ln(1+i)\right]}{\ln(1+i)}; \tag{4.91}$$

срок ренты (сила роста δ)

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S}{R}a\delta + 1\right)}{\delta}; \quad (4.92) \qquad n = \frac{-\ln\left(1 - \frac{A}{R}\delta\right)}{\delta}. \quad (4.93)$$

Пример 4.21. За какой срок наращенная сумма вырастет в 5 раз по сравнению с годовой суммой взноса, если последние осуществляются непрерывно и равномерно? На взносы начисляются непрерывные проценты, сила роста равна 8%.

Здесь $S/R = 5$, $\delta = 0{,}08$, откуда

$$n = \frac{\ln(5 \cdot 0{,}08 + 1)}{0{,}08} = 4{,}21 \text{ года.}$$

Определение ставки процентов. Величину ставки процентов i или δ для непрерывной постоянной ренты в зависимости от заданной величины коэффициента наращения или коэффициента приведения можно приближенно определить по формуле линейной интерполяции (3.88), а также с помощью метода Ньютона — Рафсона (см. приложение 2). В случае когда для непрерывной ренты применяются ставки непрерывных процентов δ, оценка δ осуществляется по следующей итерационной формуле, полученной на основе метода Ньютона — Рафсона:

сила роста

$$\delta_{k+1} = \delta_k - \frac{1 - e^{-\delta_k n} - \frac{A\delta_k}{R}}{n e^{-\delta_k n} - \frac{A}{R}} = \delta_k \left(1 - \frac{\tilde{a}_{n;\,\delta_k} - A/R}{n e^{-\delta_k n} - A/R} \right), \quad (4.94)$$

где δ_k — значение силы роста на k-й итерации. Для того чтобы $\delta > 1$, необходимо соблюдение условия $n > \frac{A}{R}$. Первоначальное значение силы роста можно оценить, если нет других предварительных оценок, как $\delta_0 = R/A - 1/2n$.

Итеративный процесс продолжается до тех пор, пока разность $A - A\delta_k$ не станет пренебрежимо мала, т. е. $|A - A_{\delta_k}| \leqslant \varepsilon$, где A_{δ_k} — современная величина ренты, определенная для $\delta = \delta_k$.

Пример 4.22. Какова доходность инвестиций (в виде δ), равных 1 млн. руб., если отдача от них составляет ежегодно 200 тыс. руб.? Ожидается, что поступления равномерные, срок — 8 лет.

Зададимся допустимой ошибкой современной величины: $\varepsilon = 0{,}5$ тыс. руб. Оценим первое значение силы роста $\delta_0 = 200/1000 - 1/2 \cdot 8 = 0{,}14$. По формуле (4.94) находим:

$$\delta_1 = 0{,}14 - \frac{1 - e^{-0{,}14 \cdot 8} - 5 \cdot 0{,}14}{8 \cdot e^{-0{,}14 \cdot 8} - 5} = 0{,}13.$$

Аналогичным образом получим δ_2: 0,13—0,0016=0,1284. Проверка: по формуле (4.84) для $\delta = 0{,}1284$ получим $A = 4999{,}9$ тыс. руб., т. е. заданная степень точности достигнута.

4.7. НЕПРЕРЫВНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ ПОТОКИ ПЛАТЕЖЕЙ

Поток денежных поступлений (выплат) может существенно изменяться во времени (см. 4.5). Если этот поток непрерывен и описывается некоторой функцией $R_t = f(t)$, то общая сумма поступлений за время n равна $\int_0^n f(t)\,dt$. В этом случае наращенная по непрерывной ставке за период от 0 до n сумма составит:

$$S = \int_0^n f(t)\, e^{\delta(n-t)} dt. \quad (4.95)$$

Современная величина такого потока равна:

$$A = \int_0^n f(t)\, e^{-\delta t} dt. \quad (4.96)$$

Для того чтобы найти величины S и A, необходимо определить конкретный вид функции распределения платежей и значения ее параметров. Ниже приводятся формулы для расчета современных величин двух видов функции распределения платежей — изменяющихся по линейному и экспоненциальному законам. Наращенные суммы этих рент легко получить, применив соотношение $S=Ae^{\delta n}$.

Линейно изменяющийся поток непрерывных платежей. Используются формулы:

функция потока платежей

$$R_t = R_0 + at, \tag{4.97}$$

где R_0 — начальная (базовая) величина платежа, выплачиваемого за единицу времени, в которой измеряется срок ренты.

Современная величина

$$A = \int_0^n (R_0 + at)e^{-\delta t}dt = R_0 \frac{1 - e^{-\delta n}}{\delta} + \frac{a}{\delta}\left(\frac{1 - e^{-\delta n}}{\delta} - ne^{-\delta n}\right) =$$

$$= \left(R_0 + \frac{a}{\delta}\right)\tilde{a}_{n;\,\delta} - \frac{ne^{-\delta n}}{\delta}a, \tag{4.98}$$

где $\tilde{a}_{n;\,\delta}$ — коэффициент приведения постоянной непрерывной ренты, см. (4.85).

Пример 4.23. Намечается в течение трех лет увеличивать выпуск продукции на 1 млн. руб. ежегодно. Базовый уровень выпуска — 10 млн. руб. Необходимо определить суммарный стоимостный объем выпуска с начисленными по ставке $\delta = 0{,}08$ процентами. По формулам (4.98) и (3.49) находим:

$$A = \left(10 + \frac{1}{0{,}08}\right)\tilde{a}_{3;\,8} - \frac{3e^{-0{,}08\cdot 3}}{0{,}08} = 29{,}5 \text{ млн. руб.};$$

$$S = 29{,}5 \cdot e^{0{,}08\cdot 3} = 37{,}5 \text{ млн. руб.}$$

При постоянной величине платежей ($R=R_0=10$) современная величина составит по формуле (4.84): $A=10\cdot 2{,}667=26{,}67$ млн. руб.

Ставку процентов можно определить, если заданы все остальные параметры, с помощью метода Ньютона — Рафсона (см. приложение 2). Необходимые для применения метода функции имеют следующий вид:

$$f(\delta) = R_0(1 - e^{-\delta n}) + \frac{1 - e^{-\delta n}}{\delta} - ane^{-\delta n} - A; \tag{4.99}$$

$$f'(\delta) = n(R_0 + an)e^{-\delta n} + \frac{a}{\delta}\left[ne^{-\delta n} - \left(\frac{1 - e^{-\delta n}}{\delta}\right)\right]. \tag{4.100}$$

Пример 4.24. Капиталовложения оцениваются в сумме 1 млн. руб., начальная отдача составит 300 тыс. руб. в год, она непрерывно увеличивается в течение 5 лет (по 10 тыс. в год). Какова доходность инвестиций, измеренная в виде непрерывной процентной ставки?

По условиям задачи: $A=1000$ тыс. руб., $R_0=300$ тыс. руб., $a=10$ тыс. руб., $n=5$. Пусть первая оценка ставки $\delta_0=0{,}16$. По формулам (4.99) и (4.100) находим: $f(0{,}16)=17{,}5$ и $f'(0{,}16)=-288{,}4$, откуда

$$\delta_2 = 0{,}2195 - \frac{17{,}5}{-288{,}4} = 0{,}2195.$$

Выполним еще одну итерацию: $f(0{,}2195)=-5{,}94$, $f'(0{,}2195)=$ $=-478{,}3$ и

$$\delta_2 = 0{,}2195 - \frac{-5{,}94}{-478{,}3} = 0{,}2071.$$

Проверка: определим современную величину ренты при условии, что сила роста $\delta=0{,}2071$. Получим по формуле (4.98) $A=998{,}9$. Допустим, такая точность нас не удовлетворяет. На следующей итерации находим: $f(0{,}2071) = -0{,}225$, $f'(0{,}2071) =$ $=-443{,}3$ и $\delta=0{,}2071-0{,}005=0{,}2066$. В этом случае $A=999{,}98$. Таким образом, показатель эффективности инвестиции в виде силы роста равен 20,66%. Показатель эффективности в виде годовой процентной ставки находим по (2.53) как $i=e^{0{,}2066}-1=$ $=0{,}2249$, т. е. 22,49%.

Экспоненциальный поток платежей. Для расчетов используются формулы:

функция потока платежей

$$R_t = R_0 e^{\gamma t}, \tag{4.101}$$

где R_0 — начальная (базовая) величина платежа; выплачиваемая в единицу времени, в которой измеряется срок ренты; γ — непрерывный темп прироста $\gamma=\ln g$.

Современная величина

$$A = R_0 \int_0^n e^{\gamma t} e^{-\delta t} dt = R_0 \frac{e^{(\gamma-\delta)n}-1}{\gamma-\delta} R_0 \tilde{a}_{n;\,\gamma-\delta}, \tag{4.102}$$

где $\gamma-\delta$ — разность непрерывного темпа прироста и непрерывной процентной ставки; $\gamma-\delta=\ln[(1+g):(1+i)]$. Значение коэффициента приведения $\tilde{a}_{n;\,\gamma-\delta}$ можно найти по табл. П.14.

Пример 4.25. Ожидается, что инфляция в будущем составит 5% в год. Какова современная величина потока платежей, члены которого определяются с поправкой на инфляцию? Параметры потока: $R_0=100$ тыс. руб., $i=7$, $n=3$ года.

Из условий задачи следует

$$\gamma-\delta = \ln\frac{1{,}05}{1{,}07} = -0{,}018868;$$

$$A = 100\frac{e^{-0{,}018868\cdot 3}-1}{0{,}018868} = 291{,}67 \text{ тыс. руб.}$$

Без корректировки платежей на инфляцию получим

$$\delta = \ln 1{,}07 \text{ и } A = 100\,\frac{1 - e^{-(\ln 1{,}07)^5}}{\ln 1{,}07} = 271{,}51 \text{ тыс. руб.}$$

Ставка непрерывных процентов рассчитывается по итеративной формуле

$$\delta_{k+1} = \delta_k - \frac{e^{(\gamma-\delta_k)n} - \frac{A}{R_0}(\gamma - \delta) - 1}{\frac{A}{R_0} - ne^{(\gamma-\delta_k)n}}. \qquad (4.103)$$

Первоначальное значение ставки можно принять на уровне $\delta_0 = R_0/A + \gamma - 1/(n+1)$.

Пример 4.26. Непрерывный поток платежей (отдача от инвестиций) характеризуется параметрами $R_0 = 300$ тыс. руб., $\gamma = 5\%$, $n = 5$ лет. Необходимо определить процентную ставку, которая уравнивает поток и капиталовложения в 1 млн. руб. Приняв $A = 1$ млн. руб. и установив первоначальное значение ставки на уровне $\delta_0 = 0{,}3 + 0{,}05 - 0{,}167 = 0{,}183$, находим

$$\delta_1 = 0{,}183 - \frac{e^{(0{,}05-0{,}183)5} - \frac{1000}{300}(0{,}05 - 0{,}183) - 1}{\frac{1000}{300} - 5e^{(0{,}05-0{,}183)5}} = 0{,}239.$$

При данном уровне ставки $A = 9793$ тыс. руб., т. е. существенно меньше исходных 1 млн. руб., следующие итерации дают: $\delta_2 = 0{,}2256$, $\delta_3 = 0{,}2249$. Последняя оценка дает хорошее приближение, так как в этом случае $A = 999{,}98$.

Раздел II. ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ КОЛИЧЕСТВЕННОГО ФИНАНСОВОГО АНАЛИЗА

Глава 5. ПЛАНИРОВАНИЕ ПОГАШЕНИЯ ДОЛГОСРОЧНОЙ ЗАДОЛЖЕННОСТИ

5.1. РАСХОДЫ ПО ОБСЛУЖИВАНИЮ ДОЛГА

Планирование погашения задолженности (ссуд) заключается в определении периодических расходов по займу, или, как их иногда называют, *срочных уплат*, *сумм по обслуживанию долга*. Срочные уплаты охватывают как текущие процентные платежи, так и средства, предназначенные для погашения (амортизации) основного долга. Методы определения размера срочных уплат зависят от условий займа (долгосрочного кредита, ссуды). Эти условия предусматривают срок, продолжительность льготного периода, уровень процентной ставки, метод погашения и уплаты процентов и основной суммы долга. Проценты обычно выплачиваются на протяжении всего срока займа. Однако иногда они начисляются и присоединяются к основной сумме долга. Основная сумма долга чаще всего погашается частями (равными или изменяющимися срочными уплатами, равными суммами погашения долга и т. д., иногда в конце срока). В льготном периоде основная сумма долга не погашается, проценты обычно выплачиваются, а иногда присоединяются к основной сумме долга. В главе приводятся формулы для расчета срочных уплат по займам, предусматривающим различные способы погашения. При написании этих формул приняты следующие обозначения:

D — сумма задолженности;

D_t — остаток задолженности на начало t-го периода;

L — продолжительность льготного периода;

M — абсолютный размер грант-элемента;

N — период создания погасительного фонда;

W_t — сумма погашенного долга на год t;

$a_{n;i}$ — коэффициент приведения постоянной годовой ренты;

$a^{(p)}_{n;i}$ — коэффициент приведения постоянной ренты с платежами p раз в году;

d_t — размер погашения основной суммы долга в t-м периоде;

i — ставка процентов, начисляемых на средства погасительного фонда;

g — ставка процентов, начисленных на сумму задолженности;

n — срок займа в годах;

p — число платежей в году;

$s_{n;\,i}$ — коэффициент наращения постоянной годовой ренты;

$s^{(p)}_{N;\,i}$ — коэффициент наращения постоянной ренты с платежами p раз в году;

α — постоянная сумма взносов в погасительный фонд;

α_t — сумма взносов в погасительный фонд в периоде t;

γ — постоянная срочная уплата (выплата процентов и погашение основной суммы долга);

γ_t — переменная срочная уплата в t-м периоде;

ω — относительный грант-элемент.

5.2. ПОГАШЕНИЕ ДОЛГА ЕДИНОВРЕМЕННЫМ ПЛАТЕЖОМ

Пусть задолженность погашается единовременным платежом в обусловленный момент времени. В такой ситуации должник часто прибегает к созданию *погасительного (амортизационного) фонда*. Необходимость создания погасительного фонда иногда оговаривается в договоре выдачи займа. На периодические взносы в этот фонд начисляются проценты по ставке i. Если взносы в фонд постоянны, то такими же оказываются срочные уплаты:

срочная уплата (проценты периодически выплачиваются кредитору)

$$\gamma = Dg + \alpha, \tag{5.1}$$

где

$$\alpha = D : s_{N;\,i}. \tag{5.2}$$

Здесь Dg — периодически выплачиваемый процент; α — ежегодная сумма взносов в погасительный фонд; N — период создания погасительного фонда. Значения коэффициента наращения ренты определяются по формуле (3.2).

Формула (5.2) предполагает взносы в погасительный фонд в конце года. Если взносы осуществляются p раз в году, то вместо $s_{N;\,i}$ берется коэффициент наращения p-срочной ренты $s^{(p)}_{N;\,i}$, см. (3.4). Чем чаще производятся взносы, тем меньше их годовая сумма.

Если проценты на сумму долга не выплачиваются кредитору, а присоединяются к основной сумме долга, то срочная уплата состоит из одного элемента:

срочная уплата (проценты присоединяются к сумме долга)

$$\gamma = \frac{D(1+g)^n}{s_{N;i}}. \qquad (5.3)$$

Погашение долга разовым платежом выгодно для должника при условии, когда средства погасительного фонда размещаются по процентной ставке, превышающей ставку, по которой взят долг, т. е. $i>g$. Если срок создания фонда равен сроку займа ($N=n$), то формула (5.3) дает величину срочной уплаты, которая меньше, чем расходы, определяемые формулой (5.1), при $g<i$. В случаях когда $g=i$, указанные методы приводят к одинаковым результатам.

Пример 5.1. Долг в сумме 100 тыс. руб. выдан под 5% годовых на 5 лет. Для его погашения единовременным платежом создается фонд. На размещаемые в нем средства начисляются проценты (6% годовых). Необходимо найти ежегодные расходы должника (срочные уплаты). Пусть погасительный фонд создается одновременно с получением ссуды, причем в погасительный фонд ежегодно вносятся равные суммы.

Такая операция характеризуется следующими параметрами: $D=100$, $g=5\%$, $i=6\%$, $n=N=5$, $s_{5;6}=5{,}637093$. Если взносы выплачиваются ежегодно, то срочные расходы на протяжении пяти лет составят:

$$\gamma = 100 \cdot 0{,}05 + \frac{100}{5{,}637093} = 5 + 17{,}74 = 22{,}74 \text{ тыс. руб.}$$

Пусть условия контракта предусматривают присоединение процентов к основной сумме долга. Тогда согласно (5.3) получим

$$\gamma = \frac{100 \cdot 1{,}05^5}{5{,}637093} = 22{,}641 \text{ тыс. руб.},$$

т. е. несколько меньше, чем при предыдущем варианте условий.

Допустим теперь, что погасительные взносы производятся в конце каждого месяца, тогда $p=12$; $s^{(12)}_{5;6}=5{,}790482$. При условии, что проценты ежегодно выплачиваются кредитору,

$$\gamma = 5 + \frac{100}{5{,}790482} = 22{,}27 \text{ тыс. руб.}$$

В свою очередь при присоединении процентов к основному долгу

$$\gamma = \frac{100 \cdot 1{,}05^5}{5{,}790482} = 22{,}041 \text{ тыс. руб.}$$

Пример 5.2. Внесем в условия примера 5.1 одно изменение — погасительный фонд создается в последние четыре года до момента погашения долга ($N=4$). Тогда вместо коэффициента наращения $s_{5;6}$ применим $s_{4.6}=4{,}374616$. Срочные уплаты в первом году равны 5 тыс. руб. (выплата только процентов), в остальные годы (при ежегодных равных взносах): $\gamma=5+100:$ $:4{,}374616=27{,}859$ тыс. руб. Для второго варианта условий (когда проценты не выплачиваются) получим $\gamma=100\cdot1{,}05^5:4{,}374616=$ $=29{,}175$ тыс. руб.

План погашения долга при периодических выплатах процентов представлен в табл. 5.1. Для того чтобы показать, что взносы с начисленными на них процентами обеспечивают выплату 100 тыс. руб., в последней графе таблицы приводятся данные, характеризующие процесс формирования фонда.

Таблица 5.1

Номер года	Выплата процентов	Взносы в погасительный фонд	Расходы по займу	Взносы с начисленными процентами к концу срока
1	5 000	—	5 000	—
2	5 000	22 859	27 859	27 226
3	5 000	22 859	27 859	25 684
4	5 000	22 859	27 859	24 231
5	5 000	22 859	27 859	22 859
				100 000

5.3. ПОГАШЕНИЕ ДОЛГА ЧАСТЯМИ

В практической финансовой деятельности долг часто погашается (амортизируется) платежами, распределенными во времени, причем применяют различные способы погашения, а именно равными суммами погашения основного долга, равными срочными уплатами, переменными срочными уплатами.

Погашение долга равными суммами. Процентные платежи и срочная уплата в этом случае всегда уменьшаются во времени. Пусть платежи производятся раз в конце года, тогда

срочная уплата

$$\gamma_t = D_t g + D_1 : n,\ t = 1, \ldots, n, \tag{5.4}$$

где $D_1 : n$ — сумма, идущая на погашение основного долга; D_1 — первоначальная сумма долга.

Остаток задолженности на начало года

$$D_{t+1} = D_t\left(\frac{n-1}{n}\right),\ t = 1, \ldots, n. \tag{5.5}$$

Если долг погашается p раз в году и аналогично выплачиваются проценты, то

срочная уплата

$$\gamma_t = D_t g/p + D_1 : pn, \tag{5.6}$$

где t — номер платежного периода, $t = 1, \ldots, pn$.

Остаток задолженности на начало периода

$$D_{t+1} = D_t \left(\frac{np-1}{np} \right). \tag{5.7}$$

Пример 5.3. Пусть долг, равный 100 тыс. руб., необходимо погасить равными суммами за 5 лет, платежи в конце года. За заем выплачиваются проценты по ставке 0,05. Сумма погашения основного долга равна: $100:5=20$ тыс. руб. в год; ежегодные процентные платежи составят $100 \cdot 0{,}05=5$ тыс. руб.; $(100-20) \cdot 0{,}05=4$ тыс. руб. и т. д. План погашения долга представлен в табл. 5.2.

Таблица 5.2

Номер года	Остаток долга на начало года	Сумма погашения долга	Выплата процентов	Срочная уплата
1	100	20	5	25
2	80	20	4	24
3	60	20	3	23
4	40	20	2	22
5	20	20	1	21

Заем может предусматривать льготный период с выплатой процентов или с соответствующим наращением основной суммы долга. В первом случае срочные уплаты на протяжении льготного периода состоят из одних процентных платежей. Во втором — первоначальная сумма долга наращивается до величины $D_1(1+g)^L$, где L — продолжительность льготного периода.

Погашение долга равными срочными уплатами. Этот вид займа наиболее распространен в практике отечественных внешнеэкономических связей. Пусть расходы по займу постоянны, тогда план погашения займа может быть разработан при условии, что задается срок погашения займа или суммарная величина расходов по займу в целом. Отличительная черта такого плана — сумма процентных платежей уменьшается, а погасительные платежи растут во времени (рис. 5.1). Рассмотрим оба случая.

а) Задан срок займа. Первый этап разработки плана — расчет срочной уплаты. Далее находятся процентные платежи, сумма погашения долга и остаток задолженности:

срочная уплата (годовые платежи)

$$\gamma = \frac{D_1}{a_{n;g}} = \text{const}, \tag{5.8}$$

где $a_{n;g}$ — коэффициент приведения постоянной годовой ренты со ставкой g;

размер погашения долга

$$d_t = \gamma - D_t g = d_{t-1}(1+g),\ t = 1, \ldots, n; \qquad (5.9)$$

$$d_1 = \gamma - D_1 g = D_1 : s_{n;\,g}; \qquad (5.9а)$$

остаток долга на начало года

$$D_{t+1} = D_t - d_t = D_t(1+g) - \gamma \qquad (5.10)$$

сумма погашенного долга на начало года

$$W_t = d_1 s_{t-1;\,g}, \qquad (5.11)$$

где $s_{t-1;\,g}$ — коэффициент наращения постоянной годовой ренты за t—1 лет, см. (3.2). Формула (5.11) применяется тогда, когда детальный план погашения долга не разрабатывается.

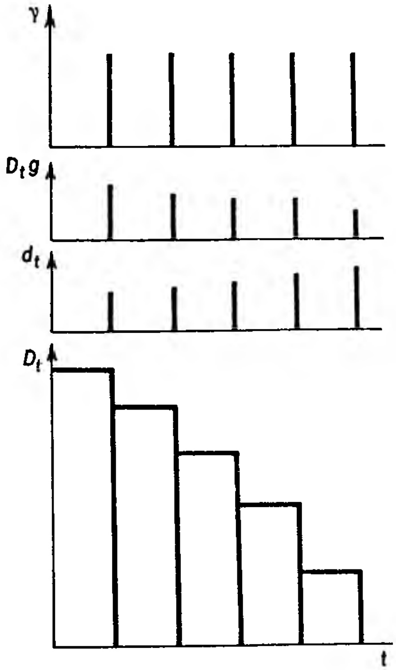

Рис. 5.1. Динамика выплаты процентов, сумм погашения долга и остатка задолженности (постоянные расходы по обслуживанию долга)

Пример 5.4. Условия займа такие же, как и в примере 5.3. Однако погашение производится равными срочными уплатами. Погашение в этом случае осуществляется постоянной годовой рентой с параметрами: γ (неизвестная величина срочной уплаты), $n = 5$, $g = 5\%$, $a_{5;\,5} = 4{,}329477$.

Согласно (5.8) $\gamma = 100\,000 : 4{,}329477 = 23097{,}48$ руб.; $d_1 = 23097{,}48 - 100\,000 \cdot 0{,}05 = 18097{,}48$; $D_2 = 100\,000 - 18097{,}48 = 81902{,}52$ и т. д. Суммы погашения долга d_2, d_3 и т. д. удобнее рассчитывать по рекуррентной формуле (5.9): $d_2 = 18097{,}48 \times$

$\times 1,05 = 19002,35$ и т. д. Полный план погашения представлен в табл. 5.3.

Таблица 5.3

Номер года	Остаток долга на начало года	Срочная уплата	Выплата процентов	Сумма погашения долга
1	100000,00	23097,48	5000,00	18097,48
2	81902,52	23097,48	4095,13	19002,35
3	62900,17	23097,48	3145,01	19952,47
4	42947,70	23097,48	2147,39	20950,10
5	21997,60	23097,48	1099,88	21997,60
				100 000

Пример 5.5. Допустим, что необходимо найти сумму погашенного долга на начало четвертого года погашения ссуды (см. пример 5.4). План погашения не разработан. Так как первая уплата долга $d_1 = 18097,48$, а $s_{3;5} = 3,1525$, то по формуле (5.11) $W_4 = 18097,48 \cdot 3,1525 = 57052,3$ руб.

Если погасительные платежи и проценты выплачиваются p раз в году, то

срочная уплата (выплата p раз в году)

$$\frac{\gamma}{p} = \frac{D_1}{a_{np;\, g/p}}, \tag{5.12}$$

где γ — срочная уплата (годовая сумма); $a_{np;\, g/p}$ — коэффициент приведения постоянной ренты с выплатами и начислением процентов p раз в году (см. (3.37)) при начислении процентов по ставке g;

сумма погашения долга за период

$$d_t = \frac{\gamma}{p} - D_t g/p = d_1 (1 + g/p), \tag{5.13}$$

где t — порядковый номер платежа, $t = 1, ..., np$;

остаток долга на начало периода

$$D_{t+1} = D_t - d_t; \tag{5.14}$$

сумма погашенного долга на начало периода

$$W_t = D_t - D_{t-1} = d_1 \cdot s_{t-1;\, g/p}, \tag{5.15}$$

где $s_{t-1;\, g/p}$ — коэффициент наращения постоянной ренты (см. (3.2)) с числом периодов $t-1$ и ставкой g/p.

Пример 5.6. Пусть погашение процентов и погашение долга (пример 5.4) производится не один, а два раза в году. Тогда $p = 2$, $g/2 = 0,025$, $a_{10;\, 2.5} = 8.752064$.

По формуле (5.12) находим $\gamma/2 = 100\,000 : 8,752064 = 11425,88$, откуда $d_1 = 11425,88 - 100\,000 \cdot 0,025 = 8925,88$, $D_2 = 100\,000 - 8925,88 = 91074,12$ и т. д. План погашения показан в табл. 5.4.

Таблица 5.4

Номер полугодия	Остаток долга на начало полугодия	Срочная уплата за полугодие	Выплата процентов за полугодие	Сумма погашения долга
1	100000,00	11425,88	2500,00	8925,88
2	91074,12	11425,88	2276,85	9149,02
3	81925,10	11425,88	2048,13	9377,75
4	72547,36	11425,88	1813,68	9612,19
5	62935,16	11425,88	1573,38	9852,50
6	53082,67	11425,88	1327,07	10098,81
7	42983,86	11425,88	1074,60	10351,28
8	32632,58	11425,88	815,81	10610,06
9	22022,52	11425,88	550,56	10875,31
10	11147,20	11425,88	278,68	11147,20
				100000,00

Суммы процентных платежей систематически уменьшаются (с 2500 до 278,68 руб. за полугодие), а выплаты по погашению основного долга увеличиваются с 8925,88 до 11147,20 руб.

Пример 5.7. Пусть необходимо найти остаток непогашенной задолженности на начало пятого полугодия (см. пример 5.6). Он равен $D_1 - W_5$.

Для определения W_5 находим $d_1 = 8925{,}88$, $s_{4;\,2{,}5} = 4{,}15251624$, откуда $W_5 = 8925{,}88 \cdot 4{,}1525 = 37064{,}85$. Искомая величина равна: $100\,000 - 37064{,}85 = 62935{,}15$.

б) Задана срочная уплата. Первый этап разработки плана — расчет срока погашения долга. После того как найдено n, план погашения разрабатывается обычным путем, т. е. по величине долга определяется сумма процентов, а остаток от срочной уплаты идет на погашение основной суммы долга. Сумма ежегодного погашения долга определяется по формуле (5.9), а остаток задолженности на начало какого-либо года — по (5.10), сумма погашенной задолженности на начало года — по (5.11).

Срок погашения займа годовой рентой

$$n = \frac{-\lg\left(1 - \frac{D_1 g}{\gamma}\right)}{\lg(1+g)}. \tag{5.16}$$

Поскольку расчетное значение n в большинстве случаев оказывается дробной величиной, то в плане погашения равные срочные уплаты показываются за целое число лет. Остаток долга компенсируется каким-либо способом, в частности, в следующем периоде с уплатой соответствующих процентов.

Пример 5.8. Долг равен 100 тыс. руб., выдан под 8% годовых. Если срочные уплаты определены на уровне 20 тыс. руб., выплачиваемых в конце года, то $D_1 = 100\,000$, $\gamma = 20\,000$, $g = 0{,}08$

и срок погашения займа годовой рентой найдем по формуле (5.16):

$$n = \frac{-\lg\left(1 - \frac{100\,000 \cdot 0,08}{20\,000}\right)}{\lg 1,08} = 6,637 \text{ года.}$$

Таким образом, долг при данном уровне срочных уплат может быть погашен за 7 лет, причем в первые 6 лет ежегодно расходуется по 20 тыс. руб., а в конце седьмого года — выплачивается остаток задолженности и соответствующие проценты. План погашения долга представлен в табл. 5.5. За шесть лет сумма долга уменьшена до 11968,85 руб. Этот остаток и выплачивается в седьмом году, на эту сумму начисляются проценты.

Таблица 5.5

Номер года	Остаток на начало года	Срочная уплата	Выплата процентов	Сумма погашения долга
1	100 000	20 000	8000,00	12000,00
2	88 000	20 000	7040,00	12960,00
3	75 040	20 000	6003,20	13996,80
4	61043,2	20 000	4883,46	15116,54
5	45926,66	20 000	3674,13	16325,87
6	29600,79	20 000	2368,06	17631,94
7	11968,85	12926,36	957,51	11968,85
				100000,00

Если погасительные платежи и начисленные проценты выплачиваются p раз в году, то

срок погашения (число периодов)

$$np = \frac{-\log\left(1 - \frac{D_1 g}{\gamma}\right)}{\log(1 + g/p)}. \tag{5.17}$$

Сумма погашения долга за один период определяется по формуле (5.13), остаток долга на начало периода — по формуле (5.14), сумма погашенного долга — по (5.15).

Переменные срочные уплаты. В ряде случаев срочные уплаты могут изменяться во времени, следуя какому-либо заданному закону или несистематично (задан график платежей). Рассмотрим вариант, при котором срочные уплаты изменяются по геометрической прогрессии (увеличение или уменьшение срочных уплат с заданным темпом роста): $\gamma_t = \gamma_1 \cdot q^{t-1}$, где t — порядковый номер платежа. Разработка плана погашения задолженности начинается с расчета срочной уплаты в первом периоде. Если предусматриваются ежегодные платежи, то срочная уплата в первом году

$$\gamma_1 = D_1 \frac{q-(1+g)}{\left(\frac{q}{1+g}\right)^n - 1}, \tag{5.18}$$

где q — заданный годовой темп роста платежей.

Суммы погашения долга и остаток задолженности определяются обычным путем — по формулам (5.9) и (5.10).

Пример 5.9. Пусть расходы по займу уменьшаются каждый год на 10%, общий срок погашения — 5 лет, первоначальная сумма долга — 100 тыс. руб., процентная ставка — 6%. Необходимо составить план погашения ежегодными платежами. По условиям задачи $D_1 = 100\,000$, $n=5$, $g=0{,}06$, $q=0{,}9$. Первая срочная уплата согласно (5.18) составит

$$\gamma_1 = 100\,000 \frac{0{,}9-1{,}06}{\left(\frac{0{,}9}{1{,}06}\right)^5 - 1} = 28635{,}27 \text{ руб.}$$

Процентные платежи в первом году равны: $100 \cdot 0{,}06 = 6$ тыс. руб. Сумма погашения долга — $28635{,}27 - 6000 = 22635{,}27$ руб., остаток задолженности на начало второго года — $100\,000 - 22635{,}27 = 77364{,}73$ тыс. руб. Вторая срочная уплата равна: $28635{,}26 \cdot 0{,}9 = 21129{,}86$. План погашения представлен в табл. 5.6.

Таблица 5.6

Номер года	Оплата долга	Выплаты процентов	Срочная уплата	Погашение долга
1	100000,00	6000,00	28635,27	22635,27
2	77364,73	4641,88	25771,74	21129,86
3	56234,87	3374,09	23194,57	19820,48
4	36414,39	2184,86	20875,10	18690,24
5	17724,15	1063,45	18787,60	17724,15
				100000,00

Если заем предполагает расчеты p раз в году, то первая срочная уплата (платежи и уплата процентов p раз в году)

$$\gamma_1 = D_1 \frac{q-(1+g/p)}{\left(\frac{q}{1+g/p}\right)^{np} - 1}. \tag{5.19}$$

Формула (5.19) предполагает, что каждый раз на остаток долга начисляются проценты по ставке g/p.

Пример 5.10. Задолженность равна 10 000 руб., срок погашения — 2 года, выплата процентов и основной суммы долга по полугодиям. Расходы по займу увеличиваются каждое полугодие на 10%, годовая ставка по займу — 10%.

По условиям задачи $D_1 = 10\,000$, $np = 4$, $g/p = 5\%$, $q = 1{,}1$. Размер первой срочной уплаты находим по формуле (5.19):

$$\gamma_1 = 10\,000 \frac{1{,}1 - 1{,}05}{\left(\frac{1{,}1}{1{,}05}\right)^4 - 1} = 2444{,}76.$$

Процентные платежи в первом полугодии равны: $10\,000 \times \times 0{,}05 = 500$ руб., сумма погашения долга — $2444{,}76 - 500 = 1944{,}76$ руб., остаток долга на начало второго полугодия — $10\,000 - 1944{,}76 = 8055{,}24$ руб. Вторая срочная уплата — $2444{,}76 \cdot 1{,}1 = 2689{,}24$ руб. и т. д. План погашения долга представлен в табл. 5.7.

Таблица 5.7

Номер полугодия	Остаток долга на начало полугодия	Выплаты процентов	Срочная уплата за полугодие	Сумма погашения долга
1	10000,00	500,00	2444,76	1944,76
2	8055,24	402,76	2689,24	2286,48
3	5768,76	288,44	2958,16	2669,72
4	3099,04	154,95	3253,98	3099,04
				10000,00

В ряде случаев размеры срочной уплаты связываются с возможностью получения соответствующих средств и задаются заранее как $\gamma_1, ..., \gamma_{n-1}$. Величина γ_n (последняя срочная уплата) не задается. Она определяется как сумма остатка долга на начало последнего периода. Схема расчета показателей плана погашения долга для этого случая представлена в табл. 5.8 при условии, что платежи производятся ежегодно.

Таблица 5.8

Схема расчета плана погашения долга
(срочные уплаты заданы для $n - 1$ лет)

Номер года	Долг на начало года	Срочная уплата	Выплата процентов	Сумма погашения долга	Долг на конец года
1	D_1	γ_1	$D_1 g$	$\gamma_1 - D_1 g$	$D_2 = D_1(1+g) - \gamma_1$
2	D_2	γ_2	$D_2 g$	$\gamma_2 - D_2 g$	$D_3 = D_2(1+g) - \gamma_2$
...	...	...	...	...	...
n	D_n	γ_n	$D_n g$	$\gamma_n - D_n g$	$D_n = D_{n-1}(1+g) - \gamma_n = 0$

5.4. ЛЬГОТНЫЕ ЗАЙМЫ И КРЕДИТЫ. ОЦЕНИВАНИЕ ПОТЕРЬ КРЕДИТОРА

Финансовая помощь иногда предоставляется в виде льготных условий займов и кредитов. Низкая процентная ставка, предусматриваемая таким займом, в сочетании с большим его сроком и льготным периодом (см. 5.1) дают должнику существенную выгоду, которую в ряде случаев можно рассматривать как субсидию. В свою очередь кредитор в этих условиях несет некоторые потери, так как он мог бы инвестировать эти средства на более выгодных условиях. Денежный измеритель таких (условных) потерь получил название *грант-элемент*. Грант-элемент может быть подсчитан в виде абсолютной или относительной величины.

Абсолютный грант-элемент

$$M = D - G; \quad (5.20) \quad M = \omega G, \quad (5.21)$$

где D — сумма займа; G — современная величина платежей, поступающих в счет погашения займа, определенная по реальным ставкам; ω — относительный грант-элемент.

Величины M, G и ω определяются условиями погашения займа. Величину абсолютного грант-элемента рассчитывают по формулам современной величины соответствующих финансовых рент (см. гл. 3 и 4).

Ниже приводятся формулы для нахождения относительного грант-элемента при условии, что долг погашается равномерно годовыми платежами при наличии или отсутствии льготного периода. Предполагается, что в льготном периоде проценты выплачиваются кредитору или присоединяются к основному долгу.

Относительный грант-элемент (льготный период не предусматривается, проценты регулярно выплачиваются кредитору)

$$\omega = 1 - \frac{a_{n;\,i}}{a_{n;\,g}}, \quad (5.22)$$

где $a_{n;i}$ и $a_{n;g}$ — коэффициенты приведения постоянных годовых рент (см. 3.3), определенные для процентных ставок i и g соответственно; i — ставка, по которой обычно производятся долгосрочные ссудные операции; g — льготная ставка, предусмотренная условиями займа, $i > g$.

Планы погашения льготных займов разрабатываются так же, как и обычных. Если предусматривается погашение займа равными срочными уплатами (см. 5.1), то последние определяются по формуле (5.8), если оговаривается условие — погашение долга равными долями, то срочная уплата находится по формуле (5.4).

Пример 5.11. Льготный заем выдан на 10 лет под 3,8%. Пусть предусматривается погашение займа равными срочными уплатами. План погашения в этом случае находится, как и в примере 5.4. Допустим, что обычная ставка для такого срока займа равна 8%. В этом случае

$$\omega = 1 - \frac{1 - 1{,}08^{-10}}{0{,}08} \cdot \frac{0{,}038}{1 - 1{,}038^{-10}} = 0{,}1809, \text{ или } 18{,}09\%.$$

Если сумма займа равна 10 млн. руб., то абсолютная сумма грант-элемента (условная абсолютная сумма льготы) составит

$$M = 10 \cdot 0,1809 = 18,09 \text{ млн. руб.}$$

Наличие льготного периода уменьшает фактические расходы должника (так как $g<i$). Если предусмотрен льготный период, в течение которого выплачиваются проценты, то

относительный грант-элемент

$$\omega = 1 - \left(\frac{a_{n-L;\,i}}{a_{n-L;\,g}} v_i^L + g a_{L;\,i}\right). \qquad (5.23)$$

Здесь L — продолжительность льготного периода, $a_{n-L;\,i}$ и $a_{n-L;g}$ — коэффициенты приведения постоянной ренты со сроками $n-L$ и ставками i и g соответственно; v_i — дисконтный множитель по ставке i.

Пример 5.12. Пусть заем примера 5.11 предусматривает трехлетний льготный период, в течение которого выплачиваются проценты. Для определения грант-элемента находим: $a_{7;8}=5,20637$; $a_{7;3,8}=6,04667$; $a_{3;8}=2,5771$; $v^3=1,08^{-3}=0,79383$, откуда получим по формуле (5.23):

$$\omega = 1 - \left(\frac{5,20637}{6,04667} \cdot 0,79383 + 0,038 \cdot 2,5771\right) = 0,2185,$$

или 21,85% (без льготного периода $\omega=18,09\%$ — см. пример 5.11).

Пусть в льготном периоде проценты не выплачиваются, а присоединяются к основной сумме долга, который и погашается в течение $n-L$ лет. Условия такого займа более льготны, чем при выплате процентов на протяжении этого периода. Тогда

относительный грант-элемент

$$\omega = 1 - \frac{a_{n-L;\,i}}{a_{n-L;\,g}} \left(\frac{1+g}{1+i}\right)^L. \qquad (5.24)$$

Пример 5.13. Пусть условия займа в примере 5.11 предусматривают, что в льготном периоде проценты не выплачиваются, тогда

$$\omega = 1 - \frac{5,20637}{6,04667} \cdot \left(\frac{1,038}{1,08}\right)^3 = 0,2356, \text{ или } 23,56\%.$$

Беспроцентный заем. Предельным случаем льготного займа является *беспроцентный заем*. Выдача такого займа связана с потерями, которые можно определить, полагая, что заем можно было бы разместить под проценты по ставке i. Условия беспроцентного займа могут предусматривать льготный период. Если такого нет, то

относительная величина потерь

$$\omega = 1 - \frac{a_{n;\,i}}{n}. \qquad (5.25)$$

Значения ω приведены в табл. 5.9.

Таблица 5.9

Относительная величина потерь от беспроцентного займа, %

i, %	Срок займа, лет							
	5	6	8	10	12	15	20	25
5	13,4	15,4	19,2	22,8	26,1	30,8	37,7	43,6
6	15,8	18,0	22,4	26,4	30,1	35,3	42,7	48,9
7	18,0	20,6	25,4	29,8	33,8	39,3	47,0	53,4
8	20,1	23,0	28,2	32,9	37,2	42,9	50,9	57,3
9	22,2	25,2	30,8	35,8	40,3	46,3	54,4	60,7
10	24,2	27,4	33,3	38,6	43,2	49,3	57,4	63,7
11	26,1	29,5	35,7	41,1	45,9	52,1	60,2	66,3
12	27,9	31,5	37,9	43,5	48,4	54,6	62,7	68,6

Если же оговаривается наличие льготного периода продолжительностью L лет, то
относительная величина потерь

$$\omega = 1 - \frac{a_{n-L;\,i}}{n} v_i^L. \tag{5.26}$$

Пример 5.14. Пусть в примере 5.11 выдан беспроцентный заем, тогда при отсутствии льготного периода находим по формуле (5.25):

$$\omega = 1 - \frac{a_{10;\,8}}{10} = 0{,}329, \text{ т. е. } 32{,}9\%,$$

и трехлетнем льготном периоде по формуле (5.26):

$$\omega = 1 - \frac{a_{7;\,8}}{10} \cdot 1{,}08^3 = 0{,}3441, \text{ т. е. } 34{,}41\%.$$

Глава 6. АНАЛИЗ И СРАВНЕНИЕ КОММЕРЧЕСКИХ КОНТРАКТОВ

6.1. УСЛОВИЯ СРАВНИВАЕМЫХ КОНТРАКТОВ

В коммерческой практике, в том числе во внешней торговле, сталкиваются с ситуациями, когда один и тот же товар можно купить у разных поставщиков, каждый из которых предлагает свои условия продажи. Кредит при такой сделке может быть предоставлен самим поставщиком (коммерческий кредит) или третьей стороной (банком или другой финансовой организацией). Условия кредита обязательно должны приниматься во внимание при выборе контракта, так как преимущество варианта с низкой ценой может быть «перекрыто» невыгодными для покупателя условиями кредитования (процентная ставка, продолжительность льготного периода, метод погашения основного долга и т. д.). Для удобства анализа продавец и кредитор далее рассматриваются совместно как один контрагент, а условия продажи товара и кредита — как условия контракта.

Сравнение контрактов, предусматривающих различные, часто непосредственно не сопоставимые финансовые условия, может быть осуществлено на основе характеристик, обобщающих эти условия. Покупателю логично основывать свой выбор на результатах сравнения современных величин расходов (см. 1,3; 2,4; 3,1), предусмотренных контрактами. Современную величину расходов в данной ситуации можно трактовать как денежную сумму, которая вместе с начисляемыми на нее процентами обеспечит все оговоренные контрактом платежи. Вариант с наименьшей современной величиной считается предпочтительным при приемлемости всех прочих условий (технических, юридических, организационных и т. д). В свою очередь кредитору предпочтительнее основывать решение на показателях доходности финансово-кредитных операций (соответствующие методики рассматриваются в гл. 7).

При расчете современной величины затрат покупателя важен выбор уровня ставки процентов, по которой производится дисконтирование — *ставки сравнения*. Какую ставку сравнения следует принять в данной конкретной ситуации — дело экономического суждения и прогноза. При этом необходимо учитывать, что чем выше эта ставка, тем в большей мере отражается такой фактор, как время — более отдаленные платежи оказывают все меньшее влияние на современную величину затрат. Иначе говоря, увеличение ставки сравнения делает более привлекательными контракты с длительными сроками погашения задолженности. В зависимости от конкретной сложившейся ситуации влияние фактора времени может меняться, и то, что представлялось предпочтительным в одних условиях, может не оказаться таковым в других. В зарубежной практике при выборе ставки сравнения в принципе ориентируются на существующий или ожидаемый усредненный уровень ссудного процента. Выбирают и более конкретные ориентиры — доходность определенных видов ценных бумаг, банковских операций и т. д.

При расчете современных величин выбор ставки сравнения — один из решающих моментов, определяющих конечный результат. Однако если современная величина платежей по одному из сравниваемых контрактов больше, чем по другому, то такое соотношение сохраняется и для других уровней ставки сравнения в случае, если они превышают наибольшую из двух ставок сравниваемых контрактов или если ставки сравнения меньше наименьшей из этих ставок.

В основные условия сделки обычно включают: цену, срок поставки (время от момента заключения контракта до поступления первой партии товара), период поставки (интервал от момента поступления первой партии товара до завершения поставок), уровни и сроки авансовых платежей, уровень процентной ставки за кредит, метод и срок погашения кредита.

Важным условием, заметно влияющим на результаты (современную величину платежей), является установление момента времени, на который определяются задолженность и размер кредита и начинается его погашение. Если соглашение предусматривает разовую поставку товара, то задолженность обычно определяется на момент этой поставки. Если поставка распределена во времени и оговорен период поставки, то в контрактах можно предусмотреть различные моменты времени для определения задолженности. Ниже рассматриваются методы сравнения при условии, что кредиты погашаются после полного выполнения обязательства по поставкам. Что касается авансовых платежей, то предполагается, что они могут быть выплачены в любой оговоренный момент (например, при заключении и завершении контракта, в некоторые промежуточные сроки). Предполагается, что при определении задолженности покупателя на авансовые платежи проценты не начисляются. Если это не так, то ниже во всех формулах вместо размера авансовых платежей следует брать их сумму с учетом наращения на соответствующие моменты времени.

При сравнении условий контрактов на основе современных величин расходов покупателя следует иметь в виду, что сроки поставок оказывают определенное влияние на эту величину. Если начисление процентов на суммы авансовых платежей не предусматривается, то увеличение срока поставки всегда сокращает современную величину расходов покупателя, а выгода, которую может иметь покупатель от быстрой поставки, во внимание не принимается — учитываются лишь непосредственные финансовые условия контракта. Таким образом, однозначный результат сопоставления имеет место только тогда, когда сроки поставок сравниваемых вариантов одинаковы. Если же сроки разные, то и в этом случае расчет современных величин платежей по контрактам дает ценную информацию для принятия решения. На ее основе можно установить, во что обходится покупателю сокращение или удлинение срока поставки.

В главе приводятся формулы для расчета современных величин платежей, предусматриваемых контрактами, в которых обусловливаются единовременная (разовая) поставка товара (предоставление каких-либо услуг) и поставка, распределенная в некотором временном интервале. Помимо этого, в главе содержатся формулы для расчета сумм обслуживания долга.

Методы разработки планов погашения задолженности рассмотрены в гл. 5. При записи формул использованы следующие основные обозначения:

A — современная величина расходов покупателя;
K_j — коэффициент приведения расходов покупателя;
L — продолжительность льготного периода;
M — период поставки;
N — срок кредита, включая льготный период;
Q_t — сумма авансового платежа в периоде t;
T — срок поставки;
Z — цена (общая стоимость поставки);
W_1 — наращенная сумма стоимости поставки;
W_2 — наращенная сумма авансовых платежей;
$a_{N;i}$ — коэффициент приведения постоянной годовой ренты со сроком N и ставкой i;
$a^{(p)}_{N;i}$ — коэффициент приведения p-срочной ренты;
i — ставка приведения платежей (ставка сравнения);
p — число платежей (поступлений товара) в году;
g — процентная ставка за кредит, предусмотренная в контракте;
v — дисконтный множитель;
γ — срочная уплата (годовая сумма по обслуживанию долга).

Остальные символы объясняются в тексте главы.

6.2. КОНТРАКТЫ НА РАЗОВУЮ ПОСТАВКУ ТОВАРА

Общий принцип определения современной величины платежей покупателя описывается формулой

$$A = \Sigma Q_t v_i^t + (Z - \Sigma Q_t) K_j. \tag{6.1}$$

Первое слагаемое этого выражения характеризует приведенную на начало действия контракта величину авансовых платежей, второе — приведенную к этому же моменту времени величину платежей по кредиту. Разность $Z - \Sigma Q_t$ характеризует сумму задолженности на начало периода погашения кредита.

Коэффициент приведения расходов покупателя K_j зависит от всех условий кредитования и ставки сравнения, принятой для дисконтирования. Ниже приводятся формулы для расчета K_j при различных условиях погашения задолженности по кредиту и ежегодных расходов покупателя. Формулы определены при условии, что срочные уплаты постоянны во времени (см. 5.2).

Погашение кредита разовым платежом в конце срока. Для расчета используются формулы:

коэффициент приведения расходов

$$K_1 = (1 + g)^N v_i^{T+N}. \tag{6.2}$$

Значения множителей наращения $(1+g)^N$ и дисконтных множителей $v_i^{T\ N}$ находят по табл. П.3, П.4.

Сумма кредита

$$S = (Z - \Sigma Q_t)(1+g)^N. \tag{6.3}$$

Погашение кредита равными срочными уплатами. Льготный период здесь не предусматривается, погашение задолженности производится ежегодными платежами (см. 5.3). Для расчета используются формулы:

коэффициент приведения расходов

$$K_2 = \frac{a_{N;\,i}}{a_{N;\,g}} v^T; \tag{6.4}$$

годовая сумма расходов

$$\gamma_2 = \frac{Z - \Sigma Q_t}{a_{N;\,g}}. \tag{6.5}$$

Если платежи по погашению основного долга и проценты выплачиваются p раз в году, то

коэффициент приведения расходов

$$K_3 = \frac{p a_{N;\,i}^{(p)}}{a_{Np;\,g/p}} v_i^T; \tag{6.6}$$

годовая сумма расходов

$$\gamma_3 = \frac{Z - \Sigma Q_t}{a_{Np;\,g/p}} \cdot p. \tag{6.7}$$

Значения коэффициентов приведения рент $a_{N;\,i}$, $a_{N;\,g}$, $a_{Np;\,g/p}$ определяются по формуле (3.26) и табл. П.11, $a_{N;\,i}^{(p)}$ — по формуле (3.28).

В условиях, когда ставка сравнения больше ставки процентов по кредиту ($i>g$), вариант контракта с выплатами p раз в году всегда дороже для покупателя ($K_3>K_2$) при всех прочих равных условиях.

Пример 6.1. Условия сравниваемых контрактов следующие:

	Вариант I	Вариант II
Цена, млн. руб.	10	10,5
Авансовые платежи, млн. руб.	1	0,5; 0,5
Срок поставки, лет	—	1
Срок кредита, лет	5	6
Ставка процента, %	7,5	7

В варианте I поставка осуществляется сразу после подписания контракта, в этот момент уплачивается аванс. Погашение задолженности производится разовым платежом в конце срока кредита. В варианте II аванс уплачивается двумя суммами — при подписании контракта 0,5 млн. руб., и через 6 месяцев 0,5 млн. руб. Погашение производится равными срочными годовыми уплатами.

Сравнение осуществим на основе ставки $i=10\%$. Для варианта I получим по формуле (6.1):

$$K_{\mathrm{I}} = 1{,}075^5 \cdot 1{,}1^{-5} = 0{,}89141:$$

$$A_{\mathrm{I}} = 1000 + (10\,000 - 1000) \cdot 0{,}89141 = 9022{,}7 \text{ тыс. руб.}$$

Для варианта II находим $a_{6.7} = 4{,}76654$; $a_{6;10} = 4{,}355261$; $v_{10} = 0{,}909091$, откуда

$$K_2 = \frac{4{,}355261}{4{,}76654} \cdot 0{,}909091 = 0{,}83065;$$

$$A_{\mathrm{II}} = 500 + 500 \cdot 1{,}1^{-0{,}5} + (10\,500 - 1000)0{,}83065 = = 8867{,}9 \text{ тыс. руб.}$$

Ежегодные расходы покупателя в период погашения кредита составят

$$\gamma_2 = \frac{10\,500 - 1000}{4{,}76654} = 1993 \text{ тыс. руб.}$$

Из приведенных выше расчетов следует: $A_{\mathrm{I}} > A_{\mathrm{II}}$ и второй вариант, если не принимать во внимание сроки поставки, оказывается предпочтительнее, однако в первом варианте поставка немедленна, во втором — через год. Вопрос о том, является сокращение расходов с 9022,6 тыс. руб. до 8867,9 тыс. руб. достаточной компенсацией за годовую отсрочку поставки или нет, выходит за рамки данного вида количественного финансового анализа.

Пусть выбран вариант II, тогда план погашения задолженности разрабатывается аналогично тому, как это показано в табл. 5.3. Для первого года находится сумма выплачиваемых процентов: $10{,}5 \cdot 0{,}07 = 0{,}735$; сумма погашения долга — $1{,}993 - 0{,}735 = 1{,}258$; остаток долга на начало следующего года — $10{,}5 - 1{,}258 = 9{,}242$ и т. д.

Продолжим пример и изменим условия варианта II. Предположим, что в этом варианте поставка также немедленна, таким образом, в этом отношении варианты I и II полностью сопоставимы. Тогда $T = 0$ и

$$K_2 = \frac{4{,}355261}{4{,}76654} = 0{,}91372; \; A_{\mathrm{II}} = 1 + (10\,500 - 1000) \times \times 0{,}91372 = 9680{,}3 \text{ тыс. руб.}$$

Таким образом, $A_{I} < A_{II}$. Иначе говоря, более льготные условия кредита варианта II в этих условиях не перекрывают влияние более высокой «цены» данного контракта.

Выполненные выше расчеты осуществлены на основе ставки сравнения $i=10\%$. В условиях данной задачи любая ставка сравнения, превышающая 7,5% (наибольшая из двух контрактных ставок), не изменит результат сравнения современных величин платежей по контрактам: $A_{I} > A_{II}$ для исходного варианта условий, и $A_{I} < A_{II}$ для условий, когда во втором контракте предусматривается немедленная поставка товара.

П р и м е р 6.2. Пусть в условия варианта II (пример 6.1) внесено изменение: платежи (погашение кредита и проценты) выплачиваются по полугодиям. Тогда $p=2$; $a^{(2)}_{6;10}=4{,}461548$; $a_{12;3,5}=9{,}663334$; $v_{10}=0{,}909091$ и

$$K_3 = \frac{2 \cdot 4{,}461548}{9{,}663334} \cdot 0{,}909091 = 0{,}83945;$$

$$A_{II} = 976{,}73 + (10\,500 - 1000) \cdot 0{,}83945 = 8951{,}5 \text{ тыс руб.}$$

Современная величина платежей здесь несколько выше, чем при расчетах по кредиту один раз в году (см. пример 6.1).

Погашение кредита равными срочными уплатами (с льготным периодом). Рассматривается один вариант льготного периода — с уплатой текущих процентов за кредит. Погашение задолженности и выплата процентов производится ежегодными платежами. Расчеты производятся по формулам:

коэффициент приведения расходов

$$K_4 = g a_{L;\,i} + \frac{a_{N-L;\,i}}{a_{N-L;\,g}} v_i^{T+L}; \tag{6.8}$$

годовая сумма расходов

$$\gamma_4 = \frac{Z - \Sigma Q_t}{a_{N-L;\,g}}. \tag{6.9}$$

Если платежи по погашению основного долга и проценты выплачиваются p раз в году, то

коэффициент приведения расходов

$$K_5 = g a^{(p)}_{L;\,i} + \frac{p a^{(p)}_{N-L;\,i}}{a_{t;\,g/p}} v_i^{T+L}; \tag{6.10}$$

годовая сумма расходов

$$\gamma_5 = \frac{Z - \Sigma Q_t}{a_{t;\,g/p}}\, p, \tag{6.11}$$

где $t=(N-L)p$ — общее число выплат. Значения коэффициентов приведения рент $a_{L;\,i}$, $a_{N-L;\,i}$, $a_{N-L;\,g}$, $a_{Np;\,g/p}$, $a_{t;\,g/p}$ определяются по формуле (3.26) и по табл. П.11, $a^{(p)}_{L;\,i}$ и $a^{(p)}_{N-L;\,i}$ — по формуле (3.28).

В условиях, когда ставка сравнения больше ставки процентов по кредиту ($i>g$), вариант контракта с платежами p раз в году всегда дороже для покупателя ($K_5>K_4$) при всех прочих равных условиях.

Пример 6.3. Условия сравниваемых контрактов следующие:

	Вариант III	Вариант IV
Цена, млн. руб.	10,5	11,0
Авансовые платежи, млн. руб.	1	2
Срок поставки, лет	1	1
Срок кредита, лет	8	10
Льготный период, лет	2	3
Ставка процента, %	6,5	6,0

Аванс в обоих вариантах выплачивается при подписании контракта. Все условия, кроме срока поставки, в контрактах различны. Пусть годовые расходы покупателя по погашению задолженности постоянны, тогда при условии, что ставка сравнения $i=10\%$, находим:

для варианта III

$$a_{2;\,10} = 1{,}735537;\ a_{6;\,10} = 4{,}355261;\ a_{6;\,6,5} = 4{,}841035;$$

$$v_{10}^{3} = 0{,}751315,$$

откуда

$$K_4 = 0{,}065 \cdot 1{,}735537 + \frac{4{,}355261}{4{,}841035}0{,}751315 = 0{,}78873;$$

$$A_{\text{III}} = 1000 + (10\,500 - 1000)0{,}78873 = 8492{,}9 \text{ тыс. руб.}$$

Отметим, что вариант III заметно привлекательнее, чем II, из-за более льготных условий кредита.

Для варианта IV $K_4=0{,}80444$;

$$A_{\text{IV}} = 2000 + (11\,000 - 2000)0{,}80444 = 9239{,}9 \text{ тыс. руб.}$$

Таким образом, $A_{\text{III}}<A_{\text{IV}}$. Полученный результат во многом определяется высокой величиной аванса в варианте IV.

Ежегодные расходы по варианту III составят в первые два года: $10\,500 \cdot 0{,}065 = 682{,}5$ тыс. руб., затем в течение шести лет покупатель выплачивает по

$$Y_2 = \frac{10\,500 - 1000}{4{,}841035} = 1962{,}4 \text{ тыс. руб.}$$

6.3. КОНТРАКТЫ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ВО ВРЕМЕНИ ПОСТАВКАМИ

Если задолженность определяется на конец периода поставки, причем на суммы, равные стоимости поставок, проценты не начисляются (так же, как и на авансовые платежи), то современная величина расходов находится по формуле (6.1). Коэффициенты приведения расходов определяются по формулам (6.2), (6.4), (6.6), в которых вместо дисконтного множителя v_i^T используется v_i^{T+M}. В случаях когда кредит погашается равными срочными уплатами (погашение основного долга плюс проценты) с льготным периодом, применяются формулы (6.8), (6.10), в которых вместо множителя v_i^{T+L} используется v_i^{T+M+L}.

Пример 6.4. Необходимо найти современную величину расходов покупателя для контракта варианта I примера 6.1, в котором предусматривается получение товара не немедленно, а в течение одного года. Проценты на авансовые платежи и стоимость поставок не начисляются. В этом случае

$$K_4 = 1{,}075^5 \cdot 1{,}1^{-(5+1)} = 0{,}81037;$$

$$A_{\text{I}} = 1000 + (10\,000 - 1000)0{,}81037 = 8293{,}3 \text{ тыс. руб.},$$

т. е. $A_{\text{I}} < A_{\text{II}}$ (см. пример 6.1).

Если контракты предусматривают начисление процентов на авансовые платежи и на суммы, соответствующие стоимости поставок, то современная величина платежей покупателя определяется как

$$A = \Sigma Q_t v_i^t + WK_j. \tag{6.12}$$

Значения коэффициентов приведения K_j определяются по формулам (6.2), (6.4), (6.6), (6.8), (6.10); W — размер задолженности на конец периода поставки: $W = W_1 - W_2$, где W_1 — стоимость поставок с процентами к концу периода поставки, W_2 — сумма авансовых платежей с процентами на этот же момент времени.

Стоимость поставок с начисленными процентами

$$W_1 = \Sigma Z_t (1+g)^{M-t}; \quad (6.13) \qquad W_1 = Z_0 s_{m;g} (1+g)^{1/2}; \quad (6.14)$$

$$W_1 = Z_0 s_{m;g}^{(h)} (1+g)^{1/2h}, \tag{6.15}$$

где Z_t — величина поставки в момент t; $\Sigma Z_t = Z$; Z_0 — годовая стоимость поставок, $Z_0 = Z : M$; h — число поставок в году. Коэффициенты наращения $s_{m;g}$ и $s_{m;g}^{(h)}$ определяются по формулам (3.2) и (3.4).

Формула (6.13) применима в случаях, когда поставки осуществляются по разработанному графику, формула (6.14) —

при ежегодных равных поставках в середине года, а (6.15) — при поставках h раз в течение года (в середине периодов).

Сумма авансовых платежей с процентами

$$W_2 = \Sigma Q(1+g)^{T+M-t}. \qquad (6.16)$$

Пример 6.5. Сравниваются два контракта со следующими условиями:

	Вариант V	Вариант VI
Цена, млн. руб.	10	10,5
Авансовые платежи, млн. руб.	0,5; 0,5	0,5; 1,5
Срок поставки, лет	1	1
Период поставки, лет	4	4
Срок кредита, лет	8	10
Льготный период, лет	2	3
Ставка, %	6,5	6,0

Контракты предусматривают, что ежегодные расходы по долгу (проценты плюс оплата основного долга) постоянны. Поставки товара ежемесячные, с равным объемом. Пусть ставка сравнения $i=10\%$.

Для варианта V:

$$Z_0 = 1000:4 = 2500; \; h = 12; \; s^{(12)}_{4;\,65} = 4{,}53698.$$

По формуле (6.15) находим

$$W_1 = 2500 \cdot 4{,}53698 \cdot 1{,}065^{1/24} = 11372{,}2 \text{ тыс. руб.}$$

Пусть аванс уплачивается в два срока: при подписании контракта и через 6 месяцев. Тогда

$$W_2 = 500 \cdot 1{,}065^5 + 500 \cdot 1{,}065^{4,5} = 1348{,}8 \text{ тыс. руб.};$$

$$W = 11372{,}2 - 1348{,}8 = 10023{,}4 \text{ тыс. руб.}$$

Коэффициент приведения расходов находим по формуле (6.8), в которую вместо v^{T+L} вводим v^{T+M+L}. Для определения K_4 находим: $a_{2;10}=1{,}735537$; $a_{2;10}=4{,}355261$; $a_{6;6,5}=4{,}841035$; $v^7_{10}=0{,}513158$, откуда

$$K_4 = 0{,}065 \cdot 1{,}735537 + \frac{4{,}355261}{4{.}841035}\, 0{,}513158 = 0{,}5745;$$

$$A_V = 500 + 500 \cdot 1{,}1^{-0,5} + 10023{,}4 \cdot 0{,}5745 = 6735{,}2 \text{ тыс. руб.}$$

Аналогично для варианта VI: $W_1 = 11824{,}5$ тыс. руб.

$$W_2 = 2618{,}8 \text{ тыс. руб.}; \; W = 11824{,}5 - 2618{,}8 = 9205{,}7 \text{ тыс. руб.};$$

$$K_5 = 0{,}55605;$$

$$A_{VI} = 500 + 1500 \cdot 1{,}1^{-0,5} + 9205{,}7 \cdot 0{,}55605 = 7046{,}2 \text{ тыс. руб.}$$

Таким образом, $A_V < A_{VI}$.

6.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ КОНТРАКТОВ

Задача сравнения вариантов контрактов может быть решена и по-иному, путем определения параметра *предельного* (*критического*) *значения цены* или процентной ставки одного из двух сравниваемых вариантов контракта. Под предельным значением параметра понимается та его величина, при которой сравниваемый контракт оказывается конкурентоспособным относительно другого (базового) и при сохранении остальных его условий. Такой подход к анализу покупатель может применить при определении допустимых значений цены или ставки процентов, когда есть возможность вести переговоры об изменении условий одного из сравниваемых контрактов. Предельные значения параметров обеспечивают равенство современных величин платежей покупателя по обоим контрактам и, следовательно, учитывают все условия этих контрактов.

Ниже приводятся формулы для определения предельных значений цены для сравниваемого контракта (Z_1^*), а в ряде случаев и ставки процентов по кредиту (g_1^*).

Контракты на разовую поставку товара. Пусть современная величина расходов по базовому варианту контракта известна (методы определения см. 6.2), тогда при условии, что на авансовые платежи и стоимость поставок проценты не начисляются, получим:

предельная цена контракта

$$Z_1^* = \frac{1}{K_{1j}} (A_0 - \Sigma Q_{1t} v_i^t) + \Sigma Q_{1t}, \tag{6.17}$$

где Z_1^* — предельная цена для сравниваемого контракта; A_0 — современная величина платежей контракта, с которым ведется сравнение (базовый контракт); K_{1j} — коэффициент приведения платежей, определяемый в зависимости от условий погашения кредита по сравниваемому контракту по формулам (6.2), (6.4), (6.6), (6.8), (6.10).

Формулы для расчета предельных процентных ставок зависят от метода погашения кредита. Для случая когда сравниваемый контракт предусматривает разовое погашение задолженности, расчет ведется по формуле

предельная ставка процента

$$g_1^* = \sqrt[N_1]{\frac{A_0 - \Sigma Q_{1t} v_i^t}{Z_1 - \Sigma Q_{1t}} (1 + i)^{T_1 \cdot N_1}} - 1, \tag{6.18}$$

индекс 1 показывает отношение к сравниваемому контракту.

П р и м е р 6.6. В примере 6.1 вариант 1, предусматривающий цену 10 млн., кредит на 5 лет, ставку по кредиту 7,5%, погашение разовым платежом, оказался менее предпочтительным, чем вариант II (цена 10,5 млн. руб., кредит погашается в течение 6 лет, ставка 7% (поставка немедленна). Второй вариант принят в качестве базы сравнения, современная величина расходов $A_0 = 8867{,}9$ тыс. руб.

Для определения предельной цены, при которой сравниваемый вариант станет конкурентоспособен, находим по формуле (6.2) величину $K_1 = 1{,}075^5 \cdot 1{,}1^{-5} = 0{,}8194$. После чего получим

$$Z_1^* = \frac{1}{0{,}8914}(8867{,}9 - 1000) + 1000 = 9848{,}9 \text{ тыс. руб.}$$

Иначе говоря, для покупателя оцениваемый вариант будет приемлемым (равноценным базовому варианту) при условии, что цена будет снижена до 9848,9 тыс. руб. (вместо 10 млн. руб.).

Пусть теперь цена остается прежней, а условия изменяются за счет уровня процентной ставки. Тогда

$$g_1^* = \sqrt[5]{\frac{8867{,}9 - 1000}{10\,000 - 1000}\,1{,}1^5} - 1 = 0{,}0708, \text{ т. е. } 7{,}08\%.$$

Для случаев, когда кредит погашается равномерными выплатами (равные срочные уплаты), предельные процентные ставки по кредиту находятся в два этапа. На первом этапе оценивают коэффициенты приведения рент (см. 3.3), эквивалентные условиям базового контракта, на втором — на основе полученных коэффициентов приведения рассчитывают искомые предельные процентные ставки (методы расчета ставок см. 3.6). Ниже приводятся формулы только для случаев, когда сравниваемый контракт предусматривает равномерные платежи без льготного периода. При наличии льготного периода оценка предельной ставки процентов хотя и осуществима, но связана с трудоемкими расчетами.

Коэффициент приведения (годовые выплаты)

$$a_{N_1;\,g_1^*} = \frac{a_{N_1;\,i}v_i^{T_1}(Z_1 - \Sigma\, Q_{1t})}{A_0 - \Sigma Q_{1t}v_i^t}; \tag{6.19}$$

коэффициент приведения (выплата процентов и основная сумма долга p раз в году)

$$a_{N_1;\,g_1^*/p_1} = \frac{p_1 a^{(p_1)}_{N_1;\,i}v_i^{T_1}(Z_1 - \Sigma\, Q_{1t})}{A_0 - \Sigma Q_{1t}v_i^t}. \tag{6.20}$$

П р и м е р 6.7. Воспользуемся данными примеров 6.1 и 6.3 (варианты II и III). Современная величина расходов там составила $A_{II} = 8867{,}9$ и $A_{III} = 8492{,}9$ тыс. руб. Найдем ставку процентов для варианта II, при которой этот вариант будет конкурентоспособен. Исходные данные: $A_0=8492{,}9$; $a_{6.10}=$ $=4{,}355261$; $\Sigma Q_t = 1000$; $\Sigma Q_t v_i^t = 500 + 500 \cdot 1{,}1^{-0{,}5} = 976{,}7$;

$$a_{6;\,g_1^*} = \frac{4{,}355261 \cdot 1{,}1^{-1}(10\,500 - 1000)}{8442{,}9 - 976{,}7} = 5{,}0043.$$

Соответствующая этому коэффициенту ставка равна: $g_1^* \approx$ $\approx 5{,}44\%$. Иначе говоря, для того, чтобы вариант II был равнозначен варианту III, необходимо снижение ставки до 5,45% при сохранении всех остальных его условий.

Контракты с распределенными во времени поставками. Если задолженность определяется на конец периода поставки, причем на суммы, равные стоимости поставок, проценты не начисляются (так же, как и на авансовые платежи), то предельные значения цен для сравниваемых контрактов находятся по формуле (6.17). При расчете необходимых для этого коэффициентов приведения K_j в формулах (6.2), (6.4) и (6.6) вместо дисконтного множителя v^T берется v^{T+M}, а в формулах (6.8) и (6.10) вместо v^{T+L} используется v^{T+M+L}, где M — продолжительность периода поставки.

Пример 6.8. В вариантах III и IV (см. пример 6.3) было получено $A_{\text{III}}<A_{\text{IV}}$. Определим, какая должна быть цена товара в варианте IV для того, чтобы он был конкурентоспособен. По данным примера 6.3 находим $A_0=A_{\text{III}}=8492{,}9$ тыс. руб., коэффициент приведения (для варианта IV) равен: $K_4=$ $=0{,}80444$, откуда

$$Z_1^* = \frac{1}{0{,}80444}(8492{,}9 - 2000) + 2000 = 10071{,}3 \text{ тыс. руб.}$$

Глава 7. ИЗМЕРЕНИЕ ДОХОДНОСТИ ФИНАНСОВО-КРЕДИТНЫХ ОПЕРАЦИЙ

7.1. ИЗМЕРИТЕЛИ ДОХОДНОСТИ

Доходы от финансово-кредитных операций и различных коммерческих сделок имеют различную форму: проценты от выдачи ссуд, комиссионные, дисконт при учете векселей, доходы от облигаций и других видов ценных бумаг и т. д. Само понятие «доход» определяется конкретным содержанием операции. Степень *финансовой эффективности* (*доходности*) этих операций обычно измеряется в виде сопоставимого показателя — годовой ставки (нормы) процентов, чаще сложных, реже — простых. Искомые показатели получают исходя из общего принципа — все вложения и доходы с учетом конкретного их вида рассматриваются под углом зрения эквивалентной (равнодоходной) ссудной операции. Измерение доходности в виде годовой процентной ставки не является единственно возможным методом. В ряде стран для некоторых операций практикуются и иные измерители, например доходность трехмесячных депозитов или некоторых видов облигаций, выускаемых казначейством.

Решение проблемы измерения и сопоставления степени доходности финансово-кредитных операций заключается в разработке методик расчета годовой ставки для каждого вида операции с учетом особенностей соответствующих контрактов и условий их выполнения. Такие операции различаются между собой во многих отношениях. Эти различия на первый взгляд могут и не представляться существенными, однако практически все условия операции в большей или меньшей мере влияют на конечные результаты — финансовую эффективность.

В главе показаны методы определения доходности в виде годовых ставок сложных, а в некоторых случаях и простых процентов для ряда краткосрочных и долгосрочных операций.

При записи приведенных в главе формул применяются следующие основные обозначения:

G — уровень комиссионных;
K — временная база начисления процентов;
R_0 — сумма обязательства (без начисленных процентов);
R_t — сумма обязательства с начисленными процентами;
S — сумма, получаемая при учете портфеля векселей;
V — дисконтный множитель для портфеля векселей;
Z — цена товара;
$a_{n;i}$, $a_{n;i}^{(p)}$ — коэффициенты приведения постоянных рент;
d — учетная ставка;
$i_{п}$ — ставка простых процентов;
$i_{э}$ — ставка помещения, показатель эффективности операции в виде годовой ставки сложных процентов;
$i_{эп}$ — показатель эффективности в виде годовой ставки простых процентов;
g — ставка, предусмотренная при выдаче ссуды;
n — число лет ссуды;
p — число платежей в году;
v — дисконтный множитель;
∂ — число дней ссудной операции;

Остальные символы поясняются в тексте главы.

7.2. ССУДНЫЕ И УЧЕТНЫЕ ОПЕРАЦИИ С УДЕРЖАНИЕМ КОМИССИОННЫХ

Доходность простых ссудных операций (без учета комиссионных) измеряется с помощью эквивалентной годовой ставки сложных процентов, см. 2.7. За открытие кредита, учет векселей и другие операции кредитор часто взимает комиссионные, которые заметно влияют на доходность операций.

Ссудные операции. Пусть ссуда выдана под простые проценты. Доходность такой операции без комиссионных равна эквивалентной ставке сложных процентов, см. формулу (2.36). При выплате комиссионных (обычно они пропорциональны сумме ссуды) эффективность сделки в целом выше, чем эквивалентная процентная ставка, найденная по этой формуле, так как сумма фактически выданной ссуды сокращается.

Доходность операции с простыми процентами

$$i_э = \sqrt[n]{\frac{1 + ni_п}{1 - G}} - 1 = \alpha \sqrt[n]{1 + ni_п} - 1, \quad (7.1)$$

где

$$\alpha = 1 : \sqrt[n]{1 - G}. \quad (7.2)$$

Здесь G — доля комиссионных в размере ссуды; α — коэффициент, измеряющий влияние комиссионных; он зависит как от срока ссуды, так и от относительной величины комиссионных, см. табл. 7.1.

Таблица 7.1

Значение коэффициента α

Комиссионные, %	Срок кредита, лет					
	0,25	0,5	1	2	5	10
0,1	1,004	1,002	1,001	1,0005	1,0002	1,0004
0,5	1,0202	1,0101	1,005	1,0025	1,0010	1,0005
1	1,0410	1,0203	1,0101	1,0050	1,0020	1,0010
1,5	1,0623	1,0306	1,0152	1,0076	1,0030	1,0015
2	1,0842	1,0412	1,0204	1,0102	1,0040	1,0020

Влияние комиссионных на эффективность ссудной операции, как видно из этой таблицы, уменьшается по мере увеличения срока ссуды.

Пример 7.1. При выдаче ссуды на 180 дней под 8% годовых кредитором удержаны комиссионные в размере 0,5% суммы кредита. Какова эффективность ссудной операции?

По формуле (7.1) находим

$$i_э=\sqrt[\frac{180}{365}]{\frac{1+(180/365)\cdot 0{,}08}{1-0{,}5/100}}-1=0{,}0927, \text{ или } 9{,}27\%,$$

т. е. комиссионные увеличили доходность на 1,27 процентных пункта. Полученный показатель доходности можно интерпретировать как скорректированную цену кредита.

Изменим условия примера. Пусть теперь срок ссуды — 2 года, тогда $\alpha=1{,}0025$ (табл. 7.1) и $i_э=1{,}0025\sqrt{1+2\cdot 0{,}08}-1=$ $=0{,}0797$, т. е. 7,97% (без учета комиссионных доходность данной ссудной операции равна 7,7%).

Если ссуда выдается под сложные проценты, то влияние комиссионных на доходность ссудной операции учитывается следующим образом:

доходность операции со сложными процентами

$$i_э=\frac{1+g}{\sqrt[n]{1-G}}-1=\alpha(1+g)-1. \qquad (7.3)$$

Пример 7.2. Как удержание комиссионных из расчета 1% суммы ссуды увеличивает эффективность ссуды для кредитора при 5-летнем сроке?

Находим $\alpha=1:\sqrt[5]{1-0{,}01}=1{,}002$, т. е. на 0,2%; при 10-летнем сроке — на $1:\sqrt[10]{1-0{,}01}-1=0{,}001$, или 0,1%.

Учетные операции. Если доход извлекается из операции учета по простой учетной ставке (см. 1.3), то эффективность сделки без удержания комиссионных определяется по формуле (2.40) эквивалентной ставки сложных процентов. При удержании комиссионных доходность в этой сделке в виде годовой ставки сложных процентов рассчитывается следующим образом:

доходность операции с простой учетной ставкой

$$i_э=\sqrt[n]{\frac{1}{(1-n'd)(1-G)}}-1=\alpha\sqrt[n]{\frac{1}{(1-n'd)}}-1, \qquad (7.4)$$

где n — срок, определяемый для искомого показателя доходности; n' — срок, определяемый при учете долгового обязательства.

Временна́я база при расчете $i_э$ принимается равной 365 дням, в учетной операции — 360 или 365 дням (подробнее см. 1.2 и 1.3).

Пример 7.3. Вексель учтен по ставке $d=10\%$ за 160 дней до его оплаты. При выполнении операции учета с владельца векселя удержаны комиссионные в размере 0,5%. Доходность операции согласно (7.4) (при условии, что временная база учета 360 дней) составит

$$i_э = \sqrt[\frac{160}{365}]{\frac{1}{\left(1 - \frac{160}{360}0{,}1\right)(2 - 0{,}005)}} - 1 = 0{,}122, \text{ т. е. } 12{,}2\%.$$

Эффективность без удержания комиссионных — 10,8%.

7.3. ДОХОДНОСТЬ КУПЛИ-ПРОДАЖИ КРАТКОСРОЧНЫХ ФИНАНСОВЫХ ИНСТРУМЕНТОВ

Краткосрочные финансовые инструменты (векселя, тратты, различные депозитные сертификаты и т. д.) могут быть проданы до наступления срока их оплаты. Владелец при этом получает некоторый доход или в неблагоприятных условиях — несет убытки.

Покупка и продажа векселя. Если вексель или другой вид долгового обязательства через некоторое время после его покупки и до наступления срока погашения продан, то эффективность этой операции можно измерить в виде простых или сложных процентов. Финансовая результативность операции здесь связана с разностью цен купли-продажи, которые в свою очередь определяются сроками этих актов до погашения векселя, и уровнем учетных ставок. В зависимости от исходных условий доходность определяется следующим образом:

доходность купли-продажи векселя (в виде ставки простых процентов)

$$i_{эп} = \left(\frac{P_2 - P_1}{P_1}\right)\frac{365}{д_1 - д_2}; \qquad (7.5)$$

$$i_{эп} = \left(\frac{1 - \frac{д_2 d_2}{K}}{1 - \frac{д_1 d_1}{K}} - 1\right)\frac{365}{д_1 - д_2}, \qquad (7.6)$$

где P_1 и P_2 — цены покупки и продажи векселя соответственно; $д_1$ — срок в днях от покупки векселя до его погашения должником; $д_2$ — срок в днях от последующей продажи векселя до его погашения; d_1 и d_2 — учетные ставки, примененные при покупке и продаже векселя; K — временная база, использованная при учете векселя (360 или 365 дней).

Для того чтобы операция не была убыточной, необходимо чтобы $д_2 d_2 < д_1 d_1$.

Доходность купли-продажи векселя (в виде ставки сложных процентов)

$$i_э = \sqrt[\frac{д_1 - д_2}{K}]{\frac{K - д_2 d_2}{K - д_1 d_1}} - 1. \qquad (7.7)$$

Величину $i_э$ можно определить и по $i_{эп}$ (см. (7.5), (7.6)), применив формулу (2.36).

Пример 7.4. Вексель куплен за 167 дней до его погашения, учетная ставка — 6%. Через 40 дней его реализовали по учетной ставке 5,75%. Эффективность, выраженная в виде простой годовой ставки процентов (временная база учета $K=360$ дней), составит:

$$i_{эп} = \left(\frac{1-\dfrac{167\cdot 0,06}{360}}{1-\dfrac{127}{360}\cdot 0,0575} - 1\right)\cdot\frac{365}{40} = 0,0708.$$

Эффективность операции, измеренная в виде ставки сложных процентов, равна:

$$i_э = \sqrt[40/365]{1+\frac{40}{365}\cdot 0,0708} - 1 = 0,0731.$$

Эту же величину получим и непосредственно по формуле (7.7):

$$i_э = \sqrt[40/365]{\frac{360-127\cdot 0,0575}{360-167\cdot 0,06}} - 1 = 0,0731.$$

Покупка и продажа финансового инструмента, приносящего простые проценты. Если депозитный сертификат или другой подобного рода краткосрочный инструмент через некоторое время после его покупки и до наступления срока погашения вновь продан, то эффективность (доходность) такой операции можно измерить в виде ставки простых или сложных процентов. Финансовая эффективность такой операции купли-продажи, широко практикуемой за рубежом, зависит от сроков актов купли-продажи до погашения инструмента, цен или процентных ставок, существующих на денежном рынке в моменты покупки и продажи. Пусть сертификат предполагает выплату процентов в конце его срока. Если в качестве исходных данных используются цены инструмента и сроки актов купли-продажи, то для расчета показателя доходности в виде ставки простых процентов применима формула (7.5). При другом варианте исходными являются данные о процентных ставках, начисляемых на сумму вклада, тогда

доходность операции (в виде простых процентов)

$$i_{эп} = \left(\frac{1+\dfrac{д_1}{K}i_1}{1+\dfrac{д_2}{K}i_2} - 1\right)\frac{365}{д_1 - д_2}, \tag{7.8}$$

где i_1 и i_2 — краткосрочные процентные ставки на денежном рынке (простые проценты) в моменты покупки и продажи инструментов.

Для того чтобы рассматриваемая операция не была убыточной, необходимо соблюдение требования $д_1 i_1 > д_2 i_2$.

Доходность в виде годовой ставки сложных процентов можно получить исходя из $i_{эп}$, рассчитанной по формуле эквивалентной ставки (2.36). Эта же величина рассчитывается и непосредственно:

доходность операции (в виде ставки сложных процентов)

$$i_э = \sqrt[\frac{д_1 - д_2}{K}]{P_2/P_1} - 1; \quad (7.9)$$

$$i_э = \sqrt[\frac{д_1 - д_2}{K}]{\frac{K + д_1 i_1}{K + д_2 i_2}} - 1. \quad (7.10)$$

Если процентные ставки не изменялись во времени ($i_1 = i_2$), то формулы (7.8) — (7.10) оценивают доходность операции только в связи с влиянием фактора времени (продолжительностью инвестиции).

Пример 7.5. Операция заключается в покупке сертификата за 1020 д. е. (денежных единиц) за 160 дней до его выкупа. Инструмент был продан за 1060 д. е. через 90 дней. Какова доходность операции, измеренная в виде простой и сложной ставки? Исходные данные: $P = 1020$ д. е., $P_2 = 1060$, $д_1 = 160$, $д_2 = 70$, $д_1 - д_2 = 90$.

Пусть временная база равна 365 дням, тогда по формуле (7.5) находим

$$i_{эп} = \frac{1060 - 1020}{1020} \cdot \frac{365}{90} = 0{,}159, \text{ или } 15{,}9\%.$$

Соответственно по (2.36) получим

$$i_э = \sqrt[90/365]{1 + \frac{90}{365} \cdot 0{,}159} - 1 = 0{,}169, \text{ т. е. } 16{,}9\%.$$

Величину $i_э$ можно определить и непосредственно по формуле (7.9):

$$i_э = \sqrt[90/365]{\frac{1060}{1020}} - 1 = 0{,}169.$$

Пример 7.6. Финансовый инструмент, приносящий постоянный процент, куплен за 200 дней до срока его погашения и продан через 100 дней. В момент покупки процентная ставка на рынке была равна 10%, в момент продажи — 9,8%. Доходность операции купли-продажи в виде годовой ставки сложных процентов равна (при условии $K = 365$):

$$i_э = \sqrt[100/365]{\frac{365 + 200 \cdot 0{,}1}{365 + 100 \cdot 0{,}098}} - 1 = 0{,}103, \text{ т. е. } 10{,}3\%.$$

7.4. ЭФФЕКТИВНОСТЬ УЧЕТА ПОРТФЕЛЯ ВЕКСЕЛЕЙ

В ряде практических случаев (в основном во внешней торговле) расчет за покупку товара с высокой стоимостью осуществляется с помощью комплекта (портфеля) векселей или других долговых обязательств. Сроки этих обязательств равномерно распределены во времени. Продавец учитывает в банке одновременно все векселя по простой учетной ставке, получая тем самым деньги в самом начале сделки. Банк или другая финансовая организация, учитывая векселя покупателя, кредитует его. Ниже приводятся формулы для расчета доходности для кредитора (в виде годовой ставки сложных процентов) операции учета в случаях, когда векселя выписаны на одну и ту же сумму или когда векселя выписаны на сумму, учитывающую рост по простым процентам.

Портфель векселей с одинаковыми суммами. Если каждый из векселей выписан на постоянную сумму R_0, то доходность оценивается путем расчета коэффициента приведения p-срочной ренты (см. 3.3) с неизвестной ставкой $i_э$. Далее каким-либо методом определяется $i_э$ (см. 3.6).

Коэффициент приведения p-срочной ренты со ставкой $i_э$:

$$a_{n;\,i_э}^{(p)} = \frac{S}{R_0 p}, \tag{7.11}$$

где p — число платежей (векселей) в году.

Сумма, выплачиваемая при учете портфеля векселей,

$$S = R_0 np\left(1 - \frac{np+1}{2p}d\right). \tag{7.12}$$

Пример 7.7. Пусть портфель состоит из 10 векселей, каждый из которых выписан на 10 тыс. руб., последовательно погашаемых по полугодиям. Какова доходность учета этого портфеля, если учетная ставка равна 10%?.

По условиям задачи $R_0 p = 10 \cdot 2 = 20$, $p=2$, $n=5$, $d=0{,}1$. Сумма, получаемая при учете, $S = 20 \cdot 5 \cdot \left(1 - \frac{11 \cdot 0{,}1}{2 \cdot 2}\right) =$ $= 72{,}5$ тыс. руб.; $a_{5;\,i_э}^{(2)} = 72{,}5 : 20{,}0 = 3{,}625$.

Находим, что полученному значению коэффициента приведения соответствует ставка $i_э = 13\%$.

Пусть при учете векселей за проведение операции в пользу банка выплачиваются комиссионные, которые пропорциональны сумме векселей. Тогда

сумма, выплачиваемая при учете портфеля векселей,

$$S = R_0 np\left(1 - \frac{np+1}{2p}d - G\right). \tag{7.13}$$

Коэффициент приведения ренты $a_{n;\,i_э}^{(p)}$ находится по формуле (7.11).

Пример 7.8. Внесем в условия примера 7.7 изменение — пусть при учете векселей из полученной суммы удерживаются в пользу банка комиссионные в размере 1%. Если эффективность операции определяется с учетом комиссионных, то $S = 20 \cdot 5(1 - \frac{11}{4} \cdot 0{,}1 - 0{,}01) = 71{,}5$ тыс. руб.; $a^{(2)}_{n;\,i_э} = 71{,}5 : 20 = 3{,}575$.

Рассчитаем $i_э$ с помощью линейной интерполяции, см. формулу (3.88). Для этого найдем значения коэффициентов приведения для $i = 13{,}5\%$ и $i = 14\%$: $a^{(2)}_{5;\,13{,}5} = 3{,}588$; $a^{(2)}_{5;\,14} = 3{,}549$.

После чего получим

$$i_э = 13{,}5 + \frac{3{,}588 - 3{,}575}{3{,}588 - 3{,}549} \cdot (14 - 13{,}5) = 13{,}67\%.$$

Портфель векселей с ростом по простым процентам. Пусть каждый входящий в портфель вексель выписан на сумму, равную некоторой постоянной величине плюс начисленные простые проценты. С таким видом оформления долгового обязательства встречаются в операции «а форфэ», которая распространена в основном во внешней торговле. Суть ее кратко сводится к следующему. Экспортер продает товар и в уплату получает от импортера портфель векселей (или других долговых обязательств). Сроки векселей равномерно распределены во времени, чаще всего по полугодиям. Таким образом, на векселе указывается сумма $R_t = R_0(1 + tg)$, где $R_0 = Z : np$; Z — сумма, которую назначает экспортер, np — общее число векселей; p — число погашаемых в году векселей.

Экспортер учитывает весь портфель векселей в банке (без оборота на себя), получая тем самым деньги в начале сделки. Банк, выступая кредитором, берет риск оплаты на себя.

Метод оценки эффективности учета портфеля векселей заключается в следующем. Определяется сумма S, выплачиваемая банком при учете, затем каким-либо путем определяется корень степенного уравнения (v_i):

$$f(v_i) = \sum_{1}^{np} R_t v_i^{t/p} - S = 0, \tag{7.14}$$

где $\sum R_t v^{t/p}$ — современная величина поступлений от платежей по векселям; v_i — дисконтный множитель со ставкой $i_э$. Тогда сумма, выплачиваемая при учете векселей,

$$S = ZV; \tag{7.15}$$

дисконтный множитель для портфеля векселей

$$V = 1 - \frac{d - g}{2}(np + 1) - \frac{dg}{6}(np + 1)(2np + 1), \tag{7.16}$$

где np — число векселей; d и g — простые учетные и процентные ставки, начисляемые за период.

Пример 7.9. Для погашения задолженности выписан комплект из 6 векселей, каждый на 20 тыс. руб., плюс проценты по ставке — 6% годовых. Векселя погашаются по полугодиям. Банк учел этот комплект по учетной ставке 9%. Какова доходность этой операции для банка?

По условиям примера имеем: $R_0=20$, $np=6$, $p=2$, $g=0{,}03$, $d=0{,}045$. Находим по формуле (7.16):

$$V = 1 - \frac{0{,}045 - 0{,}03}{2} \cdot 7 - \frac{0{,}045 \cdot 0{,}03}{6} \cdot (7 \cdot 13) = 0{,}930175.$$

Сумма, выплаченная при учете портфеля, равна: $S=120{,}0\times \times 0{,}930175=111{,}62$ тыс. руб. Суммы, которые уплачиваются должником при погашении векселей, находятся путем наращения простых процентов: 20,6; 21,2; 21,8; 22,4; 23,0; 23,6 тыс. руб. Таким образом, операция предусматривает три абсолютных величины: сумму номиналов векселей (исходная величина для расчетов) — 120 тыс. руб.; сумму, выплаченную при учете векселей, — 111,62 тыс. руб. и сумму, которую выплатил покупатель при погашении векселей, — 132,6 тыс. руб. Исходное уравнение для расчета v_i имеет вид (7.14):

$$f(v_i) = 20{,}6v_i^{0,5} + 21{,}2v_i + 21{,}8v_i^{1,5} + 22{,}4v_i^2 + 23{,}0v_i^{2,5} + \\ + 23{,}6v_i^3 - 111{,}62 = 0.$$

Решить это уравнение можно различными методами. Так, по методу секущей (см. приложение 2) находим два значения функции: $f(v_i) : f_1(1/1{,}12) = -2{,}853$, $f_2(1/1{,}11) = -1{,}173$. Откуда

$$v_1 = 1{,}11^{-1} - (1{,}11^{-1} - 1{,}12^{-1}) \frac{-1{,}173}{-1{,}173 + 2{,}853} = 0{,}9147.$$

Для проверки получим $f(0{,}9147) = 1{,}75$, на следующей итерации имеем $v_2 = 0{,}9063$ и $f(0{,}9063) = -0{,}04$, что говорит о достаточно хорошем приближении. Искомый показатель доходности в этом случае составит:

$$i_э = \frac{1}{v_i} - 1 = 1/0{,}9063 - 1 = 0{,}1034, \text{ т. е. } 10{,}34\%.$$

Если при учете векселей банк удерживает комиссионные в размере ZG, то

сумма, выплачиваемая при учете векселей,

$$S = Z(V - G). \tag{7.17}$$

Пример 7.10. Пусть в условиях примера 7.9 при учете векселей удерживаются комиссионные в размере 1% номинала (без начисления процентов), тогда $S=120 \cdot 0{,}930175-0{,}01= =110{,}505$ тыс. руб. Соответствующим образом корректируется уравнение, на основе которого определяется дисконтный множитель v_i. Решение этого уравнения дает $v_i = 0{,}9$ и $i_э = 11\%$.

7.5. ДОЛГОСРОЧНЫЕ ССУДЫ

Выбранный способ погашения долгосрочной задолженности (планы погашения такой задолженности см. в гл. 5) оказывает заметное влияние на эффективность соответствующей финансовой операции для кредитора. Простейший случай, когда долг погашается разовым платежом с процентами, рассмотрен в 7.2. Ниже описываются методы определения доходности: 1) когда проценты погашаются последовательными платежами, а основная сумма долга выплачивается в конце срока и 2) когда долг и проценты погашаются последовательно на протяжении всего срока ссуды (в обоих случаях предусматривается выплата комиссионных). Помимо этого приводится метод оценки доходности потребительского кредита.

Ссуды с периодической выплатой процентов. Если комиссионные не выплачиваются, то при оценке эффективности доходность считается равной годовой ставке сложных процентов, эквивалентной любым применяемым в сделке процентным ставкам (см. 2.7). С учетом комиссионных доходность можно оценить, найдя каким-либо приближенным методом корни уравнений

$$f(i_э) = v^n_{i_э} + g a_{n;\, i_э} - (1 - G) = 0; \tag{7.18}$$

$$f(i_э) = v^n_{i_э} + \frac{g}{p} a^{(p)}_{n;\, i_э} - (1 - G) = 0. \tag{7.19}$$

Уравнение (7.18) применимо в случае, когда платежи производятся один раз в конце года, (7.19) — p раз в году.

Пример 7.11. Ссуда выдана под 8% годовых на 5 лет, проценты выплачиваются в конце каждого года. При выдаче ссуды удержаны комиссионные в размере 0,5% суммы ссуды.

В этом случае ставка определяется на основе уравнения

$$f(i_э) = (1 + i_э)^{-5} + 0{,}08 a_{5;\, i_э} - 0{,}995 = 0.$$

Применяя метод секущей, на третьей итерации находим $i_э = 0{,}08124$.

Проверка: $f(8{,}124) \approx 0{,}00007$.

Ссуды с периодическими расходами. Если по ссуде периодически выплачиваются проценты и погашается основной долг, причем эти расходы в сумме постоянны, то при учете выплат комиссионных эффективность операции для кредитора (годовая ставка сложных процентов) находят на основе коэффициентов приведения соответствующих рент:

коэффициенты приведения постоянных рент

$$a_{n;\, i_э} = a_{n;\, g}(1 - G); \tag{7.20}$$

$$a^{(p)}_{n;i_э} = a^{(p)}_{n;g}(1-G), \qquad (7.21)$$

где $a_{n;g}$ и $a^{(p)}_{n;g}$ — коэффициенты приведения годовой и p-срочной ренты, члены которой равны расходам должника по ссуде. Формула (7.20) предусматривает годовые платежи, (7.21) — платежи p раз в году.

Пример 7.12. Пусть в примере 7.11 задолженность погашается равными платежами. Все остальные условия не меняются. В этом случае

$$a_{5;i_э} = a_{5;8}(1-0{,}005) = 3{,}9927 \cdot 0{,}995 = 3{,}9727.$$

Рассчитаем $i_э$ с помощью линейной интерполяции. Ближайшие табличные значения $a_{n;i}$ для $i=8\%$ и $i=8{,}5\%$: $a_{5;8}=3{,}9927$ и $a_{5;8{,}5}=3{,}9406$, следовательно,

$$i_э = 8 + \frac{3{,}9927-3{,}9727}{3{,}9927-3{,}9406} \cdot (8{,}5-8) = 8{,}19\%.$$

Если ссуда с аналогичными условиями погашалась бы в конце срока вместе с процентами, то согласно формуле (7.3) $i_э = 8{,}1\%$.

Результаты, полученные для разных методов погашения задолженности с учетом удержания при выдаче ссуды комиссионных дают представление о сравнительной их эффективности: 8,1: 8,12 и 8,19%. При анализе результатов необходимо принять во внимание, что два последних показателя доходности рассчитаны без учета того, что получаемые проценты могут быть реинвестированы.

Потребительский кредит. Метод начисления процентов в потребительском кредите с равномерным его погашением во времени рассмотрен в 1.6. Реальная доходность такого вида ссуды в виде годовой ставки сложных процентов на инвестированные в операцию средства должна определяться с учетом фактического остатка задолженности после каждого платежа по кредиту. Оценка этой ставки заключается в расчете коэффициента приведения p-срочной ренты (см. 3.3) по данным, характеризующим условия потребительского кредита. Члены этой ренты представляют собой постоянные суммы расходов по погашению кредита. На основе полученного коэффициента приведения рассчитывается (см. 3.6) искомая ставка. Поскольку платежи по потребительскому кредиту обычно выплачиваются ежемесячно, то коэффициент приведения определяется следующим образом:

коэффициент приведения ренты

$$a^{(12)}_{n;i_э} = \frac{n}{1+ni_п}, \qquad (7.22)$$

где $i_п$ — ставка простого процента, принятая при расчете задолженности по потребительскому кредиту.

Получаемая по формуле (7.22) ставка годовых сложных процентов $i_э$ заметно больше ставки, примененной при кредитовании (табл. 7.2).

Таблица 7.2

Доходность потребительского кредита в виде годовой ставки сложных процентов, %

Число лет кредита	Годовая ставка за кредит, %		
	4	5	8
3	7,8	9,7	15,6
4	7,6	9,5	15,4
5	7,5	9,2	15,1

Пример 7.13. Пусть потребительский кредит выдан на 3,5 года на сумму 10 тыс. руб. по ставке 5%.

Тогда общая сумма задолженности $D=10\cdot(1+3{,}5\cdot0{,}05)=11{,}75$, ежемесячная сумма погашения кредита — $11750/3{,}5\times 12=279{,}76$ руб., искомый коэффициент

$$a^{(12)}_{5;\,i_э}=\frac{3{,}5}{1+3{,}5\cdot0{,}05}=2{,}979.$$

По найденному значению коэффициента приведения получим ставку $i_э=9{,}6\%$.

Глава 8. ФИНАНСОВАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ ДОЛГОСРОЧНЫХ ИНВЕСТИЦИЙ

8.1. ДОХОДНОСТЬ ДОЛГОСРОЧНЫХ ЗАЙМОВ И ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ИНВЕСТИЦИЙ

В главе рассматривается методика определения эффективности (доходности) двух основных видов долгосрочных операций — займов и инвестиций в какие-либо проекты. В приводимых ниже формулах предполагается, что заем реализован с помощью облигаций. Инвестировав средства в облигацию, ее владелец в дальнейшем получает от нее некоторый доход. Источниками дохода являются фиксированные проценты и разность между ценой приобретения и номиналом, по которому, как правило, облигация выкупается. Цена облигации может быть ниже номинала (покупка с дисконтом), равна номиналу или превышает его (покупка с премией). Аналогичная в принципе ситуация имеет место и при инвестициях в разнообразные долгосрочные проекты. С финансовой точки зрения инвестиционный процесс объединяет два противоположных и в известном смысле самостоятельных процесса — вложение (создание некоторого объекта) и получение дохода (отдача от инвестиций). Эти процессы последовательны во времени и могут быть представлены в виде соответствующих потоков платежей.

В качестве основной характеристики эффективности займов и инвестиционных процессов общепринятой является годовая ставка сложных процентов — *ставка помещения.* Кроме того, применяются специальные измерители, учитывающие особенности вложения средств в облигации и в производственные инвестиции.

При записи приведенных в главе формул применяются следующие символы:

$a_{n;i}$ — коэффициент приведения годовой постоянной ренты;
$a_{n;i}^{(p)}$ — коэффициент приведения p-срочной постоянной ренты;
i — ставка годовых сложных процентов;
$i_э$ — ставка помещения, показатель эффективности операции в виде годовой ставки сложных процентов;
$i_{эп}$ — показатель эффективности в виде ставки простых процентов;
$\bar{i}_э$ — средняя эффективность портфеля облигации;
g — купонная доходность облигации;
n — срок облигации, продолжительность инвестиций или отдачи от них;
p — число платежей в году;
$\bar{t}$ — средний срок;
v — дисконтный множитель;
τ — текущая доходность облигации;
D — средняя продолжительность платежей по облигации;
$\bar{D}$ — средняя продолжительность платежей для портфеля облигаций;
E — ежегодный доход от инвестиций;
M — ежегодная сумма инвестиций;
N — номинал облигации;
P — цена облигации при покупке;
P_k — курс облигации;
Q — число облигаций;
R_t — член потока платежей;
V — сумма инвестиций на начало периода отдачи;
W — чистая приведенная величина дохода.

8.2. ФИНАНСОВАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ ДОЛГОСРОЧНЫХ ЗАЙМОВ

Основные характеристики. Доход от облигаций, как выше уже упоминалось, имеет два источника — проценты по фиксированной ставке и разность между ценой погашения (выкупа) и ценой приобретения. Эффективность (доходность) долгосрочных облигаций в большинстве случаев может быть охарактеризована несколькими параметрами. Доходность облигации с периодическими выплатами процентов (по купонам) можно измерить в виде *купонной доходности* (объявленной нормы процентов), *текущей доходности* инвестиции в облигацию (отношения годового купонного дохода к цене облигации) и, наконец, ставки помещения. Ставка помещения, или норма действительной доходности (доходность), характеризует ее реальную финансовую эффективность для инвестора в виде годовой ставки сложных процентов с учетом всех видов дохода от нее.

Задачи измерения эффективности долгосрочного займа сводятся к определению ставки помещения в виде годовой ставки сложных процентов (редко — простых). Начисление процентов по этой ставке на цену приобретения облигации, которая может отличаться от номинала, дает доход, эквивалентный фактически получаемому от нее доходу за весь период «жизни» облигации вплоть до момента погашения (выкупа). Методика определения годовой ставки сложных процентов для различных видов облигаций рассмотрена ниже.

Облигации без выплаты процентов. Данный вид облигаций обеспечивает один вид дохода для инвестора — разность между выкупной ценой облигации (обычно это номинал) и ценой приобретения:

доходность в виде ставки помещения

$$i_э = \frac{1}{\sqrt[n]{P_k/100}} - 1, \qquad (8.1)$$

где P_k — *курс* (цена приобретения в расчете на 100 денежных единиц номинала), по которому куплена облигация; для данного вида облигаций $P_k < 100$; n — срок от момента приобретения до момента выкупа облигации.

Курс облигации

$$P_k = \frac{P}{N} \cdot 100, \qquad (8.2)$$

где P — цена облигации, N — ее номинал.

Облигации с выплатой процентов в конце срока. Курс данного вида облигаций может отклоняться в любую сторону от 100.

Доходность облигации

$$i_э = \frac{1+g}{\sqrt[n]{P_k/100}} - 1. \qquad (8.3)$$

Если курс облигации меньше 100, то $i_э > g$ и, наоборот, при $P_k > 100$ (облигация приобретается с премией) $i_э < g$.

Пример 8.1. Облигация реализована по курсу 95, срок 8 лет. Предусматривается начисление процентов по ставке 5%. Ставка помещения при условии, что проценты и номинал погашаются в конце срока, составит

$$i_э = \frac{1,05}{\sqrt[8]{95:100}} - 1 = 0,05675.$$

Допустим теперь, что $P_k = 105$, тогда $i_э = 0,04362$.

Облигации без обязательного погашения с периодической выплатой процентов. Подобного рода облигации встречаются крайне редко. Применяются следующие формулы:

доходность облигации (проценты выплачиваются раз в году)

$$i_э = \frac{g}{P_k} 100; \tag{8.4}$$

доходность облигации (проценты выплачиваются p раз в году)

$$i_э = \sqrt[1/p]{\frac{g}{p} \cdot \frac{100}{P_k} + 1} - 1. \tag{8.5}$$

Пример 8.2. Вечная рента, приносящая 4,5% дохода, куплена по курсу 90. Какова действительная эффективность инвестиций, если проценты выплачиваются раз в году?

$$i_э = \frac{0,045}{90} 100 = 0,05.$$

Если бы проценты выплачивались поквартально, то $p=4$ и

$$i_э = \sqrt[1/4]{\frac{0,045}{4} \cdot \frac{100}{90}} - 1 = 0,0509.$$

Облигации, погашаемые в конце срока. Данный вид облигационного займа является наиболее распространенным.

Текущая доходность облигации

$$\tau = \frac{Ng}{P} = \frac{g}{P_k} 100, \tag{8.6}$$

где g — норма доходности по купонам; N — номинальная цена облигации; P — рыночная ее цена; P_k — курс в момент приобретения.

Если выплата по купонам производится p раз в году (чаще всего два раза), каждый раз по норме g/p, то формула (8.6) дает несколько приуменьшенный результат, так как она не учитывает возможность реинвестирования полученных в виде процентов средств. Однако в практике расчет ведется по формуле (8.6). Норма текущей доходности представляет собой показатель, который фактически не дает представления о реальной доходности, это лишь первое приближение к ней, так как при расчете этого показателя не учитывается разность между покупной ценой облигации и номиналом, которая может существенно повысить эффективность приобретения облигации или снизить ее. Ставка помещения учитывает все виды дохода от облигации. В основу ее определения положено равенство суммы дисконтированных поступлений от облигации по цене приобретения. Для облигации с периодической выплатой процентов (раз в конце года) и погашением ее номинала в конце срока при условии, что покупка облигации производится в момент ее выпуска, ее рыночная цена

$$P = N(1 + i_э)^{-n} + Nga_{n;\,i_э},$$

или курс

$$P_k = [(1 + i_э)^{-n} + ga_{n;\,i_э}]100. \qquad (8.7)$$

Соответственно, если облигация предусматривает выплату процентов по полугодиям или поквартально, получим

$$P_k = [(1 + i_э)^{-n} + ga^{(2)}_{n;\,i_э}]100; \qquad (8.8)$$

$$P_k = [(1 + i_э)^{-n} + ga^{(4)}_{n;\,i_э}]100. \qquad (8.9)$$

Значение $i_э$ находим по формулам (8.7)—(8.9) каким-либо приближенным способом, например путем интерполяции. Доходность облигаций с выплатой 5% один раз в году приведена в табл. 8.1.

Формула линейной интерполяции

$$i_э = i' + \frac{P'_k - P_k}{P'_k - P''_k}(i'' - i'). \qquad (8.10)$$

Таблица 8.1

Доходность облигаций (выплата процентов раз в году (5%))

Курс	Срок займа, лет							Текущая доходность
	5	6	7	8	10	12	15	
85	8,84	8,27	7,87	7,57	7,15	6,88	6,61	5,88
90	7,47	7,10	6,84	6,65	6,38	6,21	6,03	5,55
95	6,19	6,02	5,89	5,80	5,67	5,58	5,50	5,26
98	5,47	5,40	5,35	5,31	5,26	5,23	5,19	5,10
99	5,23	5,20	5,17	5,16	5,13	5,11	5,09	5,05
100	5	5	5	5	5	5	5	5
101	4,77	4,80	4,83	4,85	4,87	4,89	4,90	4,95
102	4,54	4,61	4,66	4,69	4,74	4,78	4,81	4,90
105	3,88	4,04	4,16	4,25	4,37	4,45	4,53	4,76

Для определения $i_э$ задают некоторые значения i' и i'', ограничивающие интервал, в пределах которого, как ожидается, находится действительное значение ставки $i_э$. Значения i' и i'' выбираются с учетом того, что $i_э > g$, если $P_k < 100$. На основе этих ставок по формулам (8.7) — (8.9) вычисляются соответствующие значения P'_k и P''_k. Затем по формуле (8.10) находят искомое значение $i_э$.

Значение $i_э$, полученное интерполяцией, всегда больше точного. Интерполяционная формула (8.10) справедлива и для случая, когда облигация продается не с дисконтом, а с премией. Здесь, однако, значения i' и i'' выбираются с учетом того, что $i_э < g$.

Выше, в расчетах по определению ставки помещения, предполагалось, что облигация покупается в момент ее выпуска. Это важный частный случай. Однако часто облигации покупаются спустя некоторое время после их выпуска. Если приобретение облигации происходит в момент выплаты процентов, то все приведенные выше методы расчетов сохраняют свою силу, однако под n понимают срок, оставшийся до выкупа облигации. Для случая когда облигация приобретается в момент между двумя выплатами по купонам, приведенные формулы дадут смещенные оценки.

Пример 8.3. Облигация со сроком 5 лет, проценты по которой выплачиваются раз в конце года по норме 8%, куплена по курсу 97. Необходимо определить доходность облигации.

Найдем два показателя доходности:

1) $\tau = 8 : 95 = 0{,}0842$;

2) действительную доходность определим с помощью интерполяции. Поскольку $P_k < 100$ и, следовательно, $0{,}0842 < i_э < 0{,}0947$, то для интерполяции примем следующие ставки $i' = 0{,}085$ и $i'' = 0{,}095$. Откуда согласно (8.7)

$$P'_k = (1{,}085^{-5} + 0{,}08 a_{5;\,8,5})\,100 = 98{,}03 \text{ и}$$

$$P''_k = (1{,}095^{-5} + 0{,}08 a_{5;\,9,5})\,100 = 94{,}24.$$

Тогда

$$i_э = 8{,}5 + \frac{98{,}03 - 97}{98{,}03 - 94{,}24} \cdot (9{,}5 - 8{,}5) = 8{,}77.$$

Допустим теперь, что облигация куплена по курсу 95 и проценты по ней выплачиваются два раза в году, тогда $i_э = 9{,}49\%$.

Доходность облигации в виде простой процентной ставки. Как альтернативу годовой сложной процентной ставке в качестве показателя реальной доходности иногда применяют простую ставку помещения:

простая ставка помещения

$$i_{эп} = \frac{g + \dfrac{100 - P_k}{n}}{P_k} \cdot 100, \qquad (8.11)$$

где g — текущий доход облигации в процентах.

Между текущей доходностью и ставками помещения в виде сложных и простых процентов существуют следующие соотношения: если облигация приобретена с премией (курс более 100), то $\tau > i_э > i_{эп}$; если облигация приобретена с дисконтом (курс меньше 100), то $\tau < i_э < i_{эп}$.

Динамика трех видов показателей доходности облигаций в зависимости от курса, показана на рис. 8.1.

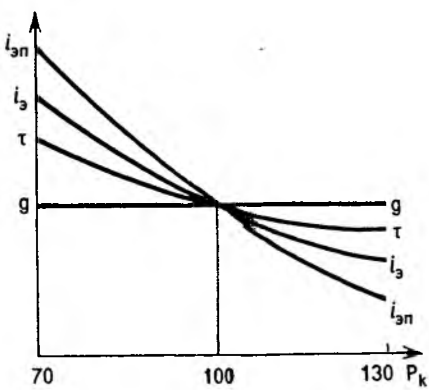

Рис. 8.1. Динамика показателей доходности облигаций в зависимости от курса

Пример 8.4. Доходность облигации примера 8.3 в виде простой ставки составит

$$i_{эп} = \frac{8 + \dfrac{100 - 97}{5}}{97} 100 = 8{,}86\%.$$

Таким образом, текущая доходность облигации равна 8%, ставка помещения — 8,77% (сложные проценты) и 8,86% (простые проценты).

Стоимость займа для должника. Выше долгосрочные займы оценивались с позиции инвестора. Для заемщика операция привлечения средств посредством займа (например, путем выпуска и продажи облигаций) оценивается с диаметрально противоположной позиции — он должен знать, какова *цена привлечения средств*. Если при организации займа заемщик не несет никаких расходов (выплата сборов, налогов, комиссионных), то искомая цена равна ставке помещения. Однако такие расходы практически неизбежны. Они несколько сокращают сумму, фактически получаемую при реализации займа. Цена займа в виде годовой сложной процентной ставки в этом случае может быть найдена по приведенным выше формулам ставки помещения, в которых из курса облигации вычитается относительная стоимость расходов (в расчете на 100 денежных единиц номинала).

Пример 8.5. В примере 8.3 ставка помещения при выплате процентов один раз в году равна 8,77%. Найдем цену кредита для должника при условии, что его расходы в связи с организацией займа составили 1% к номиналу. В этом случае вместо $P_k=97$ в расчете используем $P_k=96$.

В итоге имеем:

$$i_э = 8{,}5 + \frac{98{,}03 - 96}{98{,}03 - 94{,}24}(9{,}5 - 8{,}5) = 9{,}03\%.$$

Таким образом, заем должнику обходится по цене 9,03%, без дополнительных расходов — 8,77%.

8.3. СРЕДНИЙ СРОК ОБЛИГАЦИИ, СРЕДНЯЯ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТЬ ПОСТУПЛЕНИЙ

Основным параметром, принимаемым во внимание при инвестировании средств в облигации, является доходность. Однако показателя доходности недостаточно для обоснованного выбора вида облигации. Необходимо знать и как долго владелец облигации будет иметь финансовую отдачу от нее. Срок облигации (период от покупки до погашения) не учитывает особенность финансовой отдачи у разных видов облигаций. В зарубежной практике для характеристики облигации в этом отношении применяют различные показатели, главным образом *средний срок* (average life) и *среднюю продолжительность* поступлений (duration). Оба показателя представляют собой средние взвешенные величины сроков всех видов поступлений (оплата купонов и выкуп облигации по номиналу), получаемых по облигации. В качестве весов для первого показателя принимаются размеры платежей, для второго — современные величины этих платежей.

Средний срок облигаций (купоны оплачиваются ежегодно)

$$\bar{t} = \frac{Ng\sum_{1}^{n} t + nN}{nNg + N} = n\frac{g\dfrac{n+1}{2} + 1}{gn + 1}, \qquad (8.12)$$

где $t=1, \ldots, n$ — сроки платежей по купонам.

Средний срок $\bar{t}$ всегда меньше n (если $g>0$). Если же $g=0$ (облигации с «нулевыми купонами»), то $\bar{t}=n$. Чем больше текущий доход от облигации, тем меньше $\bar{t}$ и, следовательно, меньше риск, связанный с инвестицией в данный вид облигации.

Средний срок облигации (купоны выплачиваются по полугодиям)

$$\bar{t} = n\frac{\frac{g}{2}(0,5+n)+1}{gn+1}. \tag{8.13}$$

Пример 8.6. Для облигации, параметры которой приведены в примере 8.3, средний срок согласно (8.12) составит

$$\bar{t} = 5\,\frac{0,08\frac{5+1}{2}+1}{0,08\cdot 5+1} = 4,43 \text{ года}.$$

Если проценты выплачиваются два раза в году, то, применив (8.13), получим

$$\bar{t} = 5\,\frac{\frac{0,08}{2}(0,5+5)+1}{0,08\cdot 5+1} = 4,36 \text{ года}.$$

Как видим, изменение порядка оплаты процентов несколько снизило средний срок облигации.

Показатель средней продолжительности поступлений за рубежом получил более широкое распространение, чем средний срок облигации.

Средняя продолжительность платежей (ежегодная оплата купонов)

$$D = \frac{Ng\sum_{1}^{n} tv_i^t + nNv_i^n}{P_kN:100} = \frac{g\sum_{1}^{n} tv_i^t + nv_i^n}{P_k:100}, \tag{8.14}$$

где v_i — дисконтный множитель по ставке i (ставке сравнения). Метод определения Σtv^t см. в приложении 2. Для случаев когда $g>0$, всегда имеет место неравенство $D<\bar{t}$, где $\bar{t}$ — средний срок облигации. При $g=0$ («нулевые купоны») $D<n$ тогда, когда $v_i^n < P_k:100$.

Чем больше срок облигации n, тем в большей мере средняя продолжительность поступлений отличается от срока облигации. Динамика показателей средней продолжительности платежей в зависимости от срока облигации иллюстрируется на рис. 8.2.

Средняя продолжительность платежей (оплата купонов по полугодиям)

$$D = \frac{\frac{g}{2}\sum tv^t + nv^n}{P_k:100}, \quad t = 0,5;\ 1;\ 1,5,\ \ldots,\ n. \tag{8.15}$$

Пример 8.7. Определим среднюю продолжительность поступлений для облигации примера 8.3. Пусть ставка сравнения $i=10\%$. Тогда по данным этого примера находим $a_{5,10}=3,7908$.

$$\sum t v_{10}^{t} = \frac{1}{0,1}\,(3,7908 \cdot 1,1 - 5 \cdot 1,1^{-5}) = 10,6526;$$

$$D = \frac{0,08 \cdot 10,6526 + 5 \cdot 1,1^{-5}}{0,97} = 4,08 \text{ года.}$$

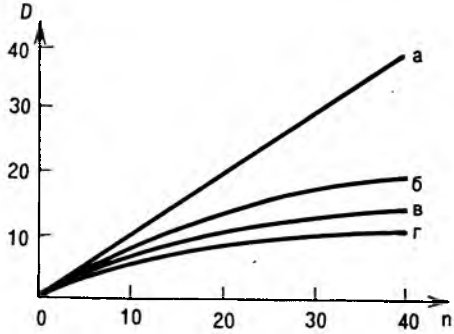

Рис. 8.2. Динамика средней продолжительности поступлений в зависимости от срока облигаций: а — облигации с «нулевым купоном», б — купленные с премией, в — купленные по номиналу, г — купленные с дисконтом

8.4. ПОРТФЕЛЬ ОБЛИГАЦИЙ

Портфель (набор) облигаций охватывает различные по видам и срокам облигации. Его доходность измеряется в виде годовой ставки сложных процентов. Эта ставка для портфеля находится с помощью ряда методов. Наиболее точным является решение уравнения, в котором общая стоимость облигаций приравнивается сумме современных величин всех видов платежей, относительно ставки $i_э$:

$$\Sigma R_t \cdot v_{i_э}^{t} - \sum_j Q_j P_j = 0. \qquad (8.16)$$

Величина $\Sigma Q_j P_j$ характеризует размер портфеля по цене приобретения, $\Sigma R_t v_{i_э}^{t}$ — сумму современных величин всех поступлений от облигаций, определенных по искомой ставке $i_э$. Здесь R_t — член потока платежей в момент t; Q_j — количество облигаций вида j; P_j — цена приобретения облигации; $v_{i_э}$ — дисконтный множитель по ставке $i_э$. Значение $i_э$ находят с помощью интерполяции или каким-либо итерационным методом (см. приложение 2).

Приближенные методы заключаются в расчете средних взвешенных ставок помещения. Веса определяются двумя способами. Согласно первому в качестве весов берутся стоимость облигаций по ценам приобретения, тогда

средняя доходность портфеля облигаций

$$\overline{i_э} = \frac{\sum_j i_{э_j} Q_j P_j}{\sum_j Q_j P_j}. \qquad (8.17)$$

Меньшую погрешность дает взвешивание, когда в качестве весов принимаются произведения показателей средней продолжительности поступлений (см. (8.12), (8.13)) на стоимости приобретения облигаций, тогда

средняя доходность портфеля облигаций

$$\bar{i}_э = \frac{\sum\limits_j i_{э_j} D_i Q_i P_i}{\Sigma D_i Q_i P_i}. \qquad (8.18)$$

Пример 8.8. Портфель, приобретенный за 35,5 тыс. руб., содержит облигации со следующими параметрами:

Облигация	Количество Q_j	Цена P_j	Номинал N_j	Срок n_j	Купонный доход g_j	Число выплат в году, p_j
А	100	95	100	5	8%	1
Б	50	120	200	8	—	—
В	200	100	100	4	9%	2

На основе приведенных данных сформируем поток платежей (табл. 8.2, гр. 2). Для этого найдем размер платежа в конце каждого полугодия. Время в годах здесь: 0,5; 1; 1,5 и т. д. Размер платежа в первом полугодии равен только процентам от облигаций типа *В*, в конце первого года — сумме процентов по облигациям типа *А* и *В*, в конце четвертого года — сумме процентов и стоимости погашения номинала облигаций типа *В*.

Поскольку ожидаемое значение ставки помещения находится между 8 и 9%, рассчитаем соответствующие дисконтные множители — гр. 3 и 4. В гр. 5 и 6 приводятся дисконтированные величины членов потоков платежей.

Таблица 8.2

t	Размер члена потока R_g	v_8^t	v_9^t	$R_t v_8^t$	$R_t v_9^t$
1	2	3	4	5	6
0,5	900	0,9622	0,9578	866,0	862,2
1,0	1 700	0,9259	0,9174	1574,1	1559,6
1,5	900	0,8910	0,8787	801,9	790,9
2,0	1 700	0,8573	0,8417	1457,5	757,5
2,5	900	0,8250	0,8062	742,5	725,6
3,0	1 700	0,7938	0,7722	1349,51	1312,7
3,5	900	0,7638	0,7396	687,5	665,6
4,0	21 700	0,7350	0,7084	15950,1	15372,8
5,0	10 800	0,6806	0,6499	7350,3	7019,2
8,0	10 000	0,5403	0,5019	5402,7	5018,7
Итого	—	—	—	36 182	34 686

По интерполяционной формуле (8.10) находим

$$\bar{i}_э = 8 + \frac{36\,182 - 35\,500}{36\,182 - 34\,768}(9-8) = 8{,}48\%.$$

Проверка: сумма дисконтированных по этой ставке платежей составит 35 485 руб. Дальнейшее уточнение оценки дает $\bar{i}_э = 8{,}47\%$, при этом контрольная сумма равна 35 500.

Пример 8.9. Найдем приближенные показатели доходности портфеля облигаций примера 8.8. Доходность облигаций в виде годовой ставки сложных процентов равна соответственно 9,3; 6,59 и 9%.

Применив формулу (8.17), получим

$$\bar{i}_э = \frac{9{,}3 \cdot 9{,}5 + 6{,}59 \cdot 6 + 9 \cdot 20}{35{,}5} = 8{,}67\%.$$

Ответ заметно отличается от точного (8,47%). Для того чтобы применить формулу (8.18), необходимо найти показатели средней продолжительности поступлений для каждого вида облигаций. Находим их по формуле (8.14): 4,2; 8 и 3,47 года. В этом случае для портфеля облигаций получим

$$\bar{i}_э = \frac{9{,}3 \cdot 4{,}2 \cdot 9{,}5 + 6{,}59 \cdot 8 \cdot 6 + 9 \cdot 3{,}47 \cdot 20}{4{,}2 \cdot 9{,}5 + 8 \cdot 6 + 3{,}47 \cdot 20} = 8{,}34\%.$$

Погрешность в ответе несколько меньше, чем в полученном по формуле (8.17).

Средняя продолжительность поступлений для портфеля облигаций за рубежом рассматривается как один из важных косвенных показателей риска — чем больше эта характеристика, тем выше риск, связанный со структурой данного портфеля.

Средняя продолжительность поступлений от портфеля облигаций

$$\bar{D} = \frac{\Sigma D_i Q_i P_i}{\Sigma Q_i P_i}. \qquad (8.19)$$

Пример 8.10. Найдем для портфелей облигаций примера 8.8 среднюю продолжительность поступлений:

$$\bar{D} = \frac{4{,}2 \cdot 9{,}5 + 8 \cdot 6 + 3{,}47 \cdot 20}{35{,}5} = 4{,}43 \text{ года}.$$

8.5. ИЗМЕРИТЕЛИ ЭФФЕКТИВНОСТИ ИНВЕСТИЦИЙ

В финансовом анализе для измерения эффективности инвестиций применяют различные показатели. Большинство из них базируется на приведении доходов и инвестиционных расходов к некоторому моменту времени — обычно к началу осуществления инвестиций или к моменту их завершения. К таким основным характеристикам относятся: 1) «чистая» приведенная величина дохода, 2) «внутренняя» норма доходности, 3) срок окупаемости капиталовложений, 4) рентабельность. Указанные показатели отражают один и тот же процесс сопоставления распределенных во времени выгод (эффектов) от инвестиций и самих инвестиций. Однако это отражение производится с разных сторон. Все перечисленные характеристики взаимосвязаны. За рубежом нет единой методики оценки эффективности инвестиций. По существу, каждая фирма или корпорация, руководствуясь накопленным опытом, наличием финансовых ресурсов, целями, преследуемыми в данный момент, и т. д. разрабатывает свою конкретную методику. Однако так или иначе эти методики базируются на указанных характеристиках, их сочетании и модификациях.

Информационной базой для расчета названных показателей является *поток платежей* (cash flow). Этот поток (последовательность во времени) формируют из показателей «чистого» дохода и инвестиционных расходов. Под «чистым» доходом понимают общий доход (выручку), полученный в каждом временном отрезке, за вычетом платежей, связанных с его получением. В эти платежи входят все действительные расходы, прямые и косвенные, по оплате труда и материалов, налоги (амортизация как расходы здесь не учитывается). Инвестиционные расходы включаются в поток платежей с отрицательным знаком.

Какой бы метод оценки эффективности капитальных вложений ни был выбран, так или иначе он связан с «приведением» как инвестиционных расходов, так и доходов от капиталовложений к одному моменту времени, т. е. с расчетом соответствующих современных величин. Важен здесь выбор уровня ставки процентов, по которой производится дисконтирование (ставки сравнения, см. 6.1) и которая должна, помимо всех прочих факторов, учитывать степень риска. Поскольку *риск* в инвестиционном процессе вне зависимости от его конкретных форм в конечном счете предстает в виде возможного уменьшения реальной отдачи инвестиций по сравнению с ожидаемой, то для учета риска (от сокращения отдачи, инфляционного обесценения денег и т. д.) вводят поправку к уровню процентной ставки. Эта поправка характеризует доходность по безрисковым вложениям, т. е. добавляет некоторую «рисковую премию», учитывающую как специфический риск, связанный с неустойчивостью получения дохода от конкретного капиталовложения, так и рыночный риск, связанный с конъюнктурой.

Включение рисковой премии в величину процентной ставки является распространенным, но не единственным средством уменьшения риска. Надежность получаемых результатов повышают и на основе «анализа чувствительности», применения методов математической статистики, экономико-математического моделирования. Перечисленные подходы уменьшают риск тем, что позволяют лицу, принимающему решение, изучить многовариантную картину возможных результатов (эффектов) в зависимости от изменения условий — «входных параметров» анализируемых систем. Иначе говоря, результат анализа представляется не в виде единственного значения показателя эффективности, а как его статистическое распределение или аналитическая зависимость от изменения одного или нескольких параметров. Предполагается, что риск может быть уменьшен при более основательном понимании действия механизма формирования прибыли и учете различных влияний, зависимостей и т. д.

8.6. ЧИСТАЯ ПРИВЕДЕННАЯ ВЕЛИЧИНА ДОХОДА

Чистая приведенная величина дохода (ЧПВД) характеризует общий абсолютный результат инвестиционной деятельности, ее конечный эффект. Пусть характеристики доходов и капиталовложений представлены в виде потока платежей, тогда ЧПВД равна современной величине этого потока. ЧПВД можно определить как разность современных величин доходов и инвестиций. Величина ЧПВД является основой для определения большинства измерителей эффективности.

Чистая приведенная величина дохода (нерегулярный поток платежей):

$$W = \sum_t R_t v_i^t, \qquad (8.20)$$

где R_t — размер члена потока платежей; v_i — дисконтный множитель по ставке i.

Зависимость ЧПВД от принятой ставки сравнения (норматива рентабельности) для случая, когда отдача примерно равномерная, а вложения осуществлены в начале процесса, показана на рис. 8.3. Величина ЧПВД может быть не только поло-

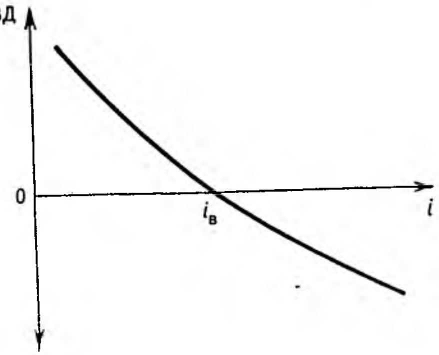

Рис. 8.3. Зависимость «чистой» приведенной величины дохода от ставки процентов ($i_в$ — внутренняя норма доходности — см. 8.7).

жительной, но и нулевой, и даже отрицательной. Если процессы капиталовложений и получения доходов строго последовательны, то

чистая приведенная величина дохода (нерегулярный поток платежей):

$$W = \sum_{j=1}^{n_2} E_j v_i^{j+n_1} - \sum_{t=1}^{n_1} M_t v_i^t, \qquad (8.21)$$

где M_t — инвестиционные расходы в периоде t; E_j — доход в периоде j, $t = 1, ..., n_1$, $j = 1, ..., n_2$; n_1 — продолжительность процесса инвестиций; n_2 — продолжительность периода отдачи от инвестиций.

Если капиталовложения полностью осуществляются за счет заемных средств, причем ссуда выдана под ставку i, то ЧПВД представляет собой реальный доход от инвестиционного процесса. Абсолютная величина ЧПВД зависит от выбора момента времени оценки.

В случае когда отдачи от инвестиций и (или) сами инвестиции представляют собой некоторые упорядоченные последовательности платежей с известными закономерностями их изменения во времени, то вместо формул (8.20) и (8.21), где производится прямой счет современных величин, следует применять формулы современных величин соответствующих рент (см. гл. 3.4).

П р и м е р 8.11. Имеются варианты инвестиционного проекта, которые характеризуются следующими потоками платежей:

А	−100	−150	50	150	200	200		
Б	−200	−50	50	50	100	100	200	200

Варианты, как видим, существенно различаются между собой. При нормативе рентабельности (ставке сравнения) $i = 10\%$ получим:

$$W_А = -212{,}69 + 377{,}1 = 164{,}41;$$

$$W_Б = -223{,}14 + 386{,}19 = 163{,}05.$$

Таким образом, при принятой процентной ставке сравниваемые варианты в финансовом отношении практически равноценны.

П р и м е р 8.12. Пусть инвестиции производятся поквартально в сумме 0,25 млн. руб. в течение трех лет. Отдача ожидается на протяжении 10 лет в размере 0,7 млн. в год (поступления ежемесячные). Ренты, характеризующие вложения и отдачу, имеют следующие параметры. $M=1$, $n_1=3$, $P_1=4$, $E=0{,}7$, $n_2=10$, $P_2=12$.

Пусть норматив рентабельности равен 10%, тогда находим по формуле (8.21):

$$W = 0{,}7 \cdot a_{10;\,10}^{(12)} \cdot v_{10}^{3} - a_{3;\,10}^{(4)} = 0{,}7 \cdot 6{,}4213 \cdot 0{,}7513 -$$

$$- 2{,}5783 = 0{,}8 \text{ млн. руб.},$$

где $\tilde{a}_{10;\,10}^{(12)}$ и $a_{3;\,10}^{(4)}$ — коэффициенты приведения соответствующих срочных рент, см. (3.28).

Допустим теперь, что есть основание рассматривать вложения и отдачу как непрерывные процессы. Тогда

$$W = E\tilde{a}_{n_2;\,\delta} v_i^{n_1} - M\tilde{a}_{n_1;\,\delta},$$

где $\tilde{a}_{n;\,\delta}$ — коэффициенты приведения непрерывной ренты, см. (4.85); $\delta = \ln 1{,}1 = 0{,}09531$. Окончательно получим

$$W = 0{,}7 \cdot \frac{1 - 1{,}1^{-10}}{0{,}09531} \cdot 1{,}1^{-3} - 1 \cdot \frac{1 - 1{,}1^{-3}}{0{,}09531} = 0{,}78 \text{ млн. руб.}$$

Допустим теперь, что отдача от капиталовложений происходит не сразу после их завершения, а, скажем, через один год. Тогда в рамках первоначального варианта постановки задачи (ежеквартальные затраты и ежемесячные поступления) получим

$$W = 7 \cdot a_{10;\,10}^{(12)} \cdot 1{,}1^{-4} - a_{3;\,10}^{(4)} = 0{,}5 \text{ млн. руб.}$$

Таким образом, отсрочка на год отдачи от инвестиций заметно снизила чистую приведенную величину дохода.

8.7. ВНУТРЕННЯЯ НОРМА ДОХОДНОСТИ

Наиболее часто за рубежом при оценке эффективности инвестиций, особенно крупных, прибегают к так называемой *внутренней норме доходности* (internal rate of return). Если эта характеристика определяется на основе потока поступлений, то ее еще называют *нормой доходности дисконтированного потока*. Под внутренней нормой доходности (ВНД) понимают ту расчетную ставку процентов, при которой капитализация регулярно получаемого дохода дает сумму, равную инвестициям, и, следовательно, капиталовложения являются окупаемой операцией. Чем выше эта ставка (обозначим ее как $i_в$), тем больше эффективность капиталовложений. Величина $i_в$ при неблагоприятных условиях может оказаться нулевой и даже отрицательной. Если капиталовложения осуществляются за счет привлеченных средств, причем кредит выдается под ставку процентов, равную g, то разность $i_в - g$ показывает эффект инвестиционной деятельности. При $i_в=g$ доход только окупает инвестиции (инвестицииеесприбыльны), при $i_в<g$ инвестиции убыточны.

За рубежом расчет ВНД часто применяют в качестве первого шага количественного анализа капиталовложений. Для дальнейшего анализа отбирают те инвестиционные проекты, ВНД которых оценивается величиной не ниже 15—20%. Методика определения $i_в$, как и других показателей эффективности, зависит от конкретных особенностей распределения доходов от инвестиций и самих инвестиций. В общем случае, когда инвестиции и отдача от них задаются в виде потока платежей, ВНД определяется на основе решения уравнения

$$\sum_t R_t v_{i_в}^t = 0 \tag{8.22}$$

относительно $v_{i_в}$ каким-либо итерационным методом (см. приложение 2). В (8.22) R_t — член потока платежей, который может быть положительной и отрицательной величиной; t — время выплаты члена потока, измеряемое от начала инвестиционного процесса.

Пример 8.13. Определим ВНД для данных примера 8.11 (вариант A). Для имеющегося потока поступлений напишем следующее степенное уравнение, в котором для сокращения записи примем $1+i_в=r$.

$$f(r) = -100r^{-1} - 150r^{-2} + 50r^{-3} + 150r^{-4} + 200r^{-5} + \\ + 200r^{-6} = 0.$$

Примем в качестве исходных оценки $r_0=1,1$ и $r_1=1,15$, тогда $f(1,1)=164,4$, $f(1,15)=104,2$. Далее на основе метода секущей (см. приложение 2) последовательно находим:

$$r_2 = 1,15 - \frac{(1,15-1,1)\cdot 104,2}{104,2-164,4} = 1,24;$$

$$r_3 = 1,24 - \frac{(1,24-1,15)\cdot 34,7}{34,7-104,2} = 1,2445;$$

$$r_4 = 1,2445 - \frac{(1,2445-1,24)\cdot 32,1}{32,1-34,7} \approx 1,3.$$

Используя последнюю оценку, получим $f(1,3)=0,05$, т. е. f практически близка к нулю. Таким образом, ВНД составляет 30%. Аналогичный расчет для варианта $Б$ дает заметно меньший показатель эффективности: $i_в=25\%$.

Пусть процессы вложений и отдачи строго последовательны, причем процесс отдачи следует какой-либо закономерности, а инвестиции могут быть представлены в виде одной величины. Тогда задача оценки ВНД технически несколько упрощается и сводится к определению коэффициента приведения соответствующей ренты, а далее — к расчету искомой ставки по величине этого коэффициента. Допустим, доходы от инвестиций постоянны, поступают в конце года или p раз в году в конце каждого периода, тогда

коэффициенты приведения ренты

$$a_{n;\,i_в} = \frac{V}{R}; \quad (8.23) \qquad a^{(p)}_{n;\,i_в} = \frac{V}{R}, \quad (8.24)$$

где V — стоимость инвестиций на начало периода отдачи, R — годовая отдача от инвестиций.

Величина $i_в$ зависит не только от соотношения доходов и инвестиций, но в значительной мере и от их распределений. На рис. 8.4 показана зависимость $i_в$ от отношения V/R для равномерного дискретного распределения доходов (для других видов

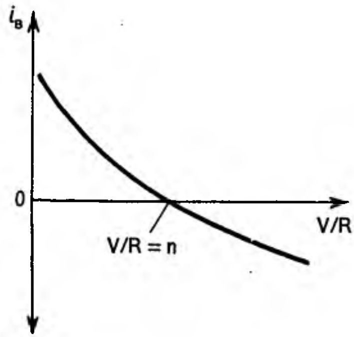

Рис. 8.4. Зависимость внутренней нормы доходности от отношения V/R

потока поступлений она будет иной). Если отношение V/R больше, чем общий срок отдачи от капиталовложений n, то $i_в$ — отрицательная величина, если $V/R = n$, то $i_в = 0$, наконец, если $V/R < n$, то $i_в > 0$. По существу, капиталовложения будут неэффективны и в случае, когда ВНД, хотя и окажется положительной величиной, но будет меньше цены, уплачиваемой за кредит.

Пример 8.14. Ожидается, что вложение 1 млн. руб. в улучшение технологии приведет к ежегодной экономии в сумме 250 тыс. руб. в течение 10 лет. Эффективность этого мероприятия в виде внутренней нормы доходности находим по соотношению (8.23), условно приняв, что экономия приурочивается к концу года. По условию задачи $V/R = 1000 : 250 = 4$, таким образом $a_{10;\,i_в} = 4$. Откуда находим (см. 3.6) : $i_в = 21{,}64\%$. Допустим, что данные инвестиции осуществляются за счет кредита, за который банк берет 8%, тогда реальная эффективность от инвестиции составит: $21{,}64 - 8 = 13{,}64\%$.

8.8. СРОК ОКУПАЕМОСТИ И РЕНТАБЕЛЬНОСТЬ

Такие показатели эффективности, как срок окупаемости и рентабельность, могут быть определены с учетом фактора времени, т. е. на основе дисконтирования потока платежей. В этом случае они по своему содержанию существенно отличаются от широко применяемых в практике одноименных показателей, получаемых упрощенными методами.

Срок окупаемости. Без учета фактора времени, т. е. когда равные суммы дохода, получаемые в разное время, рассматриваются как равноценные, показатель срока окупаемости определяется как $n_у = V/R$, где $n_у$ — упрощенный показатель срока окупаемости, V — размер инвестиций, R — ежегодный «чистый» доход. Если «чистый» доход поступает неравномерно, то срок окупаемости определяется последовательным суммированием поступлений и подсчетом времени до тех пор, пока сумма «чистого» дохода не окажется равной сумме инвестиций. За рубежом показатель $n_у$ применяют в основном мелкие фирмы.

С финансовых позиций более обоснованным является другой метод определения срока окупаемости. В этом случае под сроком окупаемости ($n_{ок}$) понимают продолжительность периода, в течение которого сумма чистых доходов, дисконтированных на момент завершения инвестиций, равна сумме инвестиций. Тогда по определению современная величина доходов за срок $n_{ок}$ должна быть равна сумме накопленных инвестиционных затрат.

Если инвестиционный процесс представлен в виде нерегулярного потока платежей, то срок окупаемости определяется суммированием последовательных членов ряда доходов, дисконтированных по ставке i, до тех пор, пока не будет получена сумма, равная объему инвестиций. Например, если доход поступает в конце года, то определяется сумма $A_m = \sum_{1}^{m} R_t v^t$, причем $A_m < V < A_{m+1}$. Срок окупаемости равен m плюс некоторая доля года, которая примерно равна $(V - A_m) : R_{m+1} v^{m+1}$.

Пример 8.15. Предположим, необходимо сравнить по сроку окупаемости два варианта инвестиций примера 8.11. Получим следующие упрощенные характеристики окупаемости: для варианта A — $n_у = 2{,}25$ года, для варианта $Б$ — $n_у = 3{,}5$ года. Параметры $n_у$, как видим, не учитывают никаких иных факторов, кроме доходов и суммы инвестиций. Для оценки $n_{ок}$ найдем сумму инвестиций с процентами по ставке $i = 10\%$. Для варианта A это 260 тыс. руб., для $Б$ — 270 тыс. руб. За первые два года современная величина дохода составит 169,4 тыс. руб., т. е. меньше 260 тыс. руб., за три года она равна 319,7, т. е. больше, чем стоимость инвестиций. Отсюда срок окупаемости (при условии, что доход может выплачиваться и за часть года) составит $n_{ок} = 2 + (260 - 169{,}4) : 150{,}2 = 2{,}6$ года, где величина 150,2 получена как $200 \cdot 1{,}1^{-3}$. Аналогичным путем получим для варианта $Б : n_{ок} = 4 + (270 - 230{,}2) : 124{,}2 = 4{,}32$ года.

Если доходы поступают в виде упорядоченной последовательности платежей, то расчет срока окупаемости сводится к определению срока соответствующих рент (см. формулы из 3.5), в которых современная величина ренты заменяется стоимостью инвестиций на начало периода отдачи.

Пример 8.16. Определим срок окупаемости для данных примера 8.14. Для этого воспользуемся формулой (3.75), в которой вместо отношения A/R используем величину $V/R=4$. Приняв ставку сравнения на уровне 10%, получим

$$n_{ок} = \frac{-\ln(1 - 4 \cdot 0{,}1)}{\ln 1{,}1} = 5{,}36 \text{ года.}$$

Упрощенный срок окупаемости равен 4 годам.

Далеко не всякий уровень дохода при всех прочих равных условиях приводит к окупаемости инвестиций. Срок окупаемости существует, если не нарушаются определенные соотношения между поступлениями и размером инвестиций. Так, при ежегодном поступлении постоянных доходов это соотношение имеет вид: $R > iV$, при поступлении постоянных доходов p раз в году $R > p[(1+i)^{1/p} - 1]V$, при непрерывном поступлении доходов $R > \ln(1+i)V$. Если перечисленные требования не выполняются, то капиталовложения не окупаются за любой срок, точнее, этот срок равен бесконечности. На рис. 8.5 иллюстрируется зависимость $n_{ок}$ от отношения V/R для случая, когда доходы представляют собой постоянную ренту.

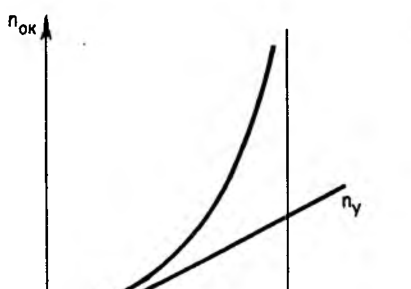

Рис. 8.5. Зависимость срока окупаемости $n_{ок}$ от соотношения V/R

Соотношение $n_{ок}$ и n_y зависит от конкретного вида потока платежей.

Соотношение сроков окупаемости $n_{ок}$ и $n_{у}$ (постоянный годовой доход):

$$n_{ок} = \frac{-\ln(1 - n_{у}i)}{\ln(1 + i)}. \qquad (8.25)$$

Соотношение (8.25) зависит только от принятой процентной ставки. В табл. 8.3 приводятся расчетные значения $n_{ок}$ для случая, когда доходы от инвестиций имеют вид годовой постоянной ренты (см. примечания к формулам (3.74)—(3.87) в 3.5).

Таблица 8.3

Значения $n_{ок}$ в зависимости от $n_{у}$

Ставка, %	Срок кредита, лет					
	3	4	5	8	10	15
8	3,6	5,0	6,6	13,3	20,9	∞
10	3,7	5,4	7,3	16,9	∞	∞
12	3,9	5,8	8,1	28,4	∞	∞

Рентабельность. Показатель рентабельности инвестиций может быть измерен на основе потока поступлений с учетом фактора времени. Для этого приведенный доход относится к приведенным на тот же момент инвестиционным расходам.

Рентабельность инвестиций (приведение доходов на начало периода отдачи):

$$PИ = \frac{\sum_{1}^{n} R_j v^j}{V}, \qquad (8.26)$$

где V — сумма инвестиционных затрат на начало периода отдачи; n — длительность периода отдачи.

Рентабельность инвестиций (приведение на начало процесса инвестиций):

$$PИ = \frac{\sum R_j v^{j+n_1}}{\sum_{t} M_t v^t}, \qquad (8.27)$$

где $t = 1, ..., n_1$; $j = 1, ..., n_2$; R_j — показатели чистого дохода; M_t — размеры инвестиционных затрат.

Пусть поток поступлений (его доходная часть) следует какой-либо закономерности, тогда современная его величина может быть рассчитана с помощью коэффициентов приведения соответствующих рент, см. 3.3.

Показатели рентабельности инвестиций в виде (8.26), (8.27) в действительности характеризуют некоторую дополнительную рентабельность, так как при их расчете доходы уже дисконтированы по ставке i. Если показатель $PИ$ равен единице, то это означает, что доходность капиталовложений точно соответствует нормативу рентабельности i. При $PИ<1$ инвестиции нерентабельны, так как не обеспечивают этот норматив. Для того чтобы инвестиции были рентабельны ($PИ>1$) в случаях, когда доходы постоянны, необходимо чтобы отношение V/R было меньше коэффициента приведения соответствующей ренты, например $V/R<a_{n;\,i}$ и т. д. Допустим, ожидается десятилетняя равномерная отдача от инвестиций, тогда соотношение объема инвестиций и годового дохода при условии, что норматив рентабельности равен 10%, должно быть меньше, чем величина $a_{10;\,10}=6{,}14$.

Пример 8.17. Показатели современных величин вложений и чистых доходов по данным примера 8.11 имеют следующие значения: вариант A — 212,69 и 377,1 тыс. руб., вариант $Б$ — 223,14 и 386,19 тыс. руб. Показатели рентабельности инвестиций согласно (8.27) составят

$$PИ_A=\frac{377{,}1}{212{,}69}=1{,}77;\quad PИ_Б=\frac{386{,}19}{223{,}14}=1{,}73,\ \text{т. е. } 77 \text{ и } 73\%.$$

Пример 8.18. Определим рентабельность инвестиций по данным примера 8.14. Имеем $V=1$ млн. руб., $R=250$ тыс. руб. Поскольку доход постоянен, то приведенная сумма доходов равна $Ra_{n;\,i}$. Приняв норматив рентабельности, допустим 10%, получим

$$Ra_{n;\,i}=250\cdot a_{10;\,10}=1536{,}1,\ \text{откуда}$$

$$PИ=\frac{1536{,}1}{1000}=1{,}54,\ \text{или } 54\%.$$

8.9. АРЕНДА ОБОРУДОВАНИЯ

Необходимость в количественном финансовом анализе аренды оборудования возникает как для владельца оборудования, так и арендатора. Для владельца важно правильное определение размера арендной платы и финансовой эффективности сдачи оборудования в аренду. Арендатор же, если есть альтернатива, должен решить вопрос: арендовать оборудование или купить его? Все эти перечисленные задачи могут быть решены на основе чисто финансовых принципов, причем любой метод их решения базируется на концепции современной величины денежных потоков. Налоги и другие выплаты, если таковые могут иметь место, в приведенных ниже расчетах не учитываются, хотя в случае необходимости они могут быть включены в соответствующие потоки платежей. Договор аренды иногда предусматривает ремонт оборудования силами его владельца. За рубежом это обычная практика при сдаче в аренду ЭВМ и других видов сложной техники. Соответствующие издержки учитываются в арендной плате.

Определение размера платежей за аренду оборудования. Пусть оборудование со стоимостью P сдается на n лет. Остаточная его стоимость (в конце срока аренды) составит S. Размер разового арендного платежа, обеспечивающего заданный норматив доходности на вложенные в оборудование средства, для случая, когда аренда вносится раз в конце года, определяется по формуле

$$R = \frac{P - Sv_i^n}{a_{n;\,i}}, \tag{8.28}$$

где R — размер годовой арендной платы; $a_{n;i}$ — коэффициент приведения годовой постоянной ренты (см. формулу (3.26)); v_i — дисконтный множитель.

Величина арендной платы зависит здесь от стоимости оборудования, принятого норматива доходности i и от срока аренды.

Формула (8.28) предусматривает арендные платежи раз в конце года; если условия выплат другие, то применяются коэффициенты приведения соответствующих рент (см. 3.3). Величина R характеризует размер арендной платы, обеспечивающей только заданную доходность от сдачи оборудования в аренду. Учитываемый в расчете норматив доходности, естественно, должен быть больше нормы амортизации оборудования. Разность $i—\alpha$ (где α — норма амортизации) приближенно характеризует реальную доходность арендной операции.

Пример 8.19. Оборудование, стоимость которого на момент представления в аренду равна 1 млн. руб., сдано на 4 года в аренду. Остаточная стоимость на момент окончания аренды оценивается в 400 тыс. руб. Допустим, что требуемая доходность от вложений в оборудование определена на уровне 15% годовых. Какова должна быть арендная плата, которая обеспечит заданную доходность при условии, что арендные платежи вносятся: а) раз в конце года, б) раз в начале года, в) в начале каждого месяца?

Решение получим по формуле (8.28), числитель которой во всех случаях составит $1000 - 400 \cdot 1{,}15^{-4} = 771{,}3$.

а) Находим по табл. П.9 $a_{4;15} = 2{,}85498$, откуда $R = 771{,}3 : 2{,}85498 = 270{,}16$ тыс. руб. Допустим теперь, что срок аренды при всех прочих равных условиях не 4 года, а, скажем, 8 лет и вдвое уменьшилась остаточная стоимость, тогда $a_{8;15} = 4{,}487732$ и

$$R = \frac{1000 - 200 \cdot 1{,}15^{-8}}{4{,}487732} = 208{,}28 \text{ тыс. руб.},$$

т. е. увеличение срока привело к заметному сокращению годовых арендных платежей.

б) $a_{4;15} \cdot 1{,}15 = 3{,}28323$ и $R = 771{,}3 : 3{,}28323 = 234{,}92$ тыс. руб.

в) По формулам (3.28) и (4.16) находим:

$$a^{(12)}_{4;\,15} = \frac{1 - 1{,}15^{-4}}{12 \cdot 1{,}15^{1/12} - 1} = 3{,}04631; \quad a^{(12)}_{4;\,15} \cdot 1{,}15^{1/12} = 3{,}08199;$$

$$R = 771{,}3 : 3{,}08199 = 250{,}26 \text{ тыс. руб.}$$

Таким образом, в начале каждого месяца выплачивается $250{,}26 : 12 = 20{,}855$ тыс. руб.

Эффективность сдачи оборудования в аренду для владельца. Метод оценки эффективности заключается в определении коэффициента приведения ренты по заданным показателям стоимости оборудования, размера арендных платежей и т. д. По найденному значению коэффициента приведения ренты определяется значение годовой процентной ставки $i_э$ = (см. 3.6). Для случая когда арендные платежи выплачиваются раз в конце года, величина коэффициента приведения находится следующим образом

$$a_{n;\,i_э} = \frac{P - Sv^n}{R}, \tag{8.29}$$

где R — сумма арендного платежа без учета расходов на обслуживание и ремонт.

Пример 8.20. Пусть арендная плата за оборудование (пример 8.19) установлена в размере 20 тыс. руб., вносимых в начале каждого месяца. Какова действительная эффективность сделки, если норма амортизации равна 10%?

По условиям задачи определяем

$$a^{(12)}_{4;\,i} (1 + i)^{1/12} = \frac{771{,}3}{12 \cdot 20} = 3{,}21375.$$

На основе полученного значения коэффициента приведения ренты интерполяционным методом находим $i = 12{,}34\%$ (см. 3.89). При принятой норме амортизации для данного вида оборудования (10%) действительная доходность от сдачи в аренду составляет всего 2,34%.

Арендовать или покупать оборудование? Данная задача представляет собой специальный случай задачи измерения эффективности. Ее решение состоит в сравнении современных величин двух денежных потоков: платежей, связанных с приобретением оборудования, и платежей, определяемых договором аренды. Причем если договор аренды предусматривает ремонт оборудования (и, следовательно, соответствующие затраты включены в арендную плату), то в поток платежей при покупке оборудования необходимо также включать расходы на ремонт, выполняемые владельцем. Применяемая для дисконтирования ставка процентов должна быть равна действительной стоимости кредита. Исключение составляет дисконтирование остаточной стоимости оборудования — здесь может применяться другая долгосрочная ставка (норматив рентабельности). Если платежи одинаковы по размеру и производятся через равные промежутки времени, то для определения современных величин потоков платежей следует воспользоваться формулами современных величин соответствующих финансовых рент (см. 3.3). Из условия сравнения следует, что аренда в случае годовых платежей имеет финансовый смысл, если

$$R \leqslant \frac{П}{a_{n;i}}, \tag{8.30}$$

где $П$ — современная величина потоков платежей при покупке оборудования.

Пример 8.21. Имеется оборудование стоимостью 1 млн. руб., которое может быть предоставлено в аренду. Условия аренды: срок — 4 года, ежемесячная арендная плата — 21 тыс. руб., вносимая в начале месяца. Условия продажи: цена — 1 млн. руб., аванс — 200 тыс. руб., выплачиваемых в начале сделки, на остальную сумму открывается кредит на 5 лет из 6% годовых, погашение задолженности — в конце каждого года. Остаточная стоимость на конец периода погашения задолженности по оплате оборудования — 400 тыс. руб. В обоих вариантах ремонт осуществляется за счет пользователя оборудования, поэтому в сопоставительные расчеты эти расходы не включаются.

Поток платежей при аренде оборудования состоит из 48 арендных платежей по 21 тыс. руб. Поток платежей при покупке оборудования включает аванс и расходы по погашению задолженности. Кроме того, здесь учитывается остаточная стоимость оборудования. Годовая сумма расходов по погашению задолженности при покупке (см. 5.3) составит $R = 800 : a_{5;6} = 800 : 4{,}212364 = 189{,}92$ тыс. руб.

Для дисконтирования соответствующего потока применим ставку, по которой можно разместить средства в данных конкретных условиях. Пусть она равна 8%. Коэффициент приведения ренты в этом случае составит $a_{5;8} = 3{,}99271$. Тогда современная величина потока определяется как

$$П_1 = 200 + 189{,}92 \cdot 3{,}9927 - 400 \cdot 1{,}08^{-5} = 686{,}07 \text{ тыс. руб.}$$

В свою очередь современная стоимость аренды равна:

$$П_2 = Ra_{4;8}^{(12)} = 21 \cdot 12 \cdot 3{,}43188 = 864{,}83 \text{ тыс. руб.}$$

Таким образом, аренда в этих условиях обойдется заметно дороже. Аренда имела бы смысл для арендатора в том случае, когда ее оплата при всех прочих равных условиях была бы ниже, чем $R=\frac{686,7}{3,43188}=200$ тыс. руб. в год или $200:12=16,67$ тыс. руб. в месяц.

Допустим теперь, что ремонт включен в арендную плату. Для сопоставимости аналогичные расходы должны быть учтены и в варианте покупки оборудования. Пусть они равны 50 тыс. руб. в году. Для того чтобы показатели современных величин были сопоставимы, продолжительность оплаченного ремонта должна быть приравнена продолжительности аренды. В этом случае при условии, что ремонт оплачивается ежемесячно, получим $\Pi_1=686,07+50\cdot 3,43188=857,66$ тыс. руб., т. е. практически варианты не имеют явных финансовых преимуществ.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. ТАБЛИЦЫ ДЛЯ ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ

Таблица П.1. Порядковые номера дней в году

День месяца	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь	Июль	Август	Сентябрь	Октябрь	Ноябрь	Декабрь
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29	-	88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30	-	89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31	-	90	-	151	-	212	243	-	304	-	365

Таблица П.2. Ставки простых процентов, эквивалентные простым учетным ставкам

Учетная ставка	Число дней ссуды					
	15	30	45	60	90	120
5	5.080	5.091	5.101	5.112	5.134	5.155
5.125	5.207	5.218	5.230	5.241	5.264	5.286
5.250	5.335	5.346	5.358	5.370	5.394	5.418
5.375	5.462	5.474	5.487	5.499	5.524	5.549
5.500	5.589	5.602	5.615	5.628	5.654	5.681
5.625	5.717	5.730	5.744	5.757	5.784	5.812
5.750	5.844	5.858	5.872	5.886	5.915	5.944
5.875	5.971	5.986	6.001	6.015	6.045	6.076
6	6.099	6.114	6.129	6.145	6.176	6.207
6.125	6.226	6.242	6.258	6.274	6.307	6.340
6.250	6.353	6.370	6.387	6.404	6.437	6.472
6.375	6.481	6.498	6.515	6.533	6.568	6.604
6.500	6.608	6.626	6.644	6.662	6.699	6.736
6.625	6.736	6.754	6.773	6.792	6.830	6.869
6.750	6.863	6.882	6.902	6.922	6.961	7.001
6.875	6.991	7.011	7.031	7.051	7.092	7.134
7	7.118	7.139	7.160	7.181	7.224	7.267
7.125	7.245	7.267	7.289	7.311	7.355	7.400
7.250	7.373	7.395	7.418	7.441	7.486	7.533
7.375	7.500	7.524	7.547	7.570	7.618	7.666
7.500	7.628	7.652	7.676	7.700	7.749	7.799
7.625	7.756	7.780	7.805	7.830	7.881	7.933
7.750	7.883	7.909	7.935	7.960	8.013	8.066
7.875	8.011	8.037	8.064	8.091	8.145	8.200
8	8.138	8.166	8.193	8.221	8.277	8.333
8.125	8.266	8.294	8.322	8.351	8.409	8.467
8.250	8.393	8.422	8.452	8.481	8.541	8.601
8.375	8.521	8.551	8.581	8.612	8.673	8.735
8.500	8.649	8.680	8.711	8.742	8.805	8.869
8.625	8.776	8.808	8.840	8.872	8.938	9.004
8.750	8.904	8.937	8.970	9.003	9.070	9.138
8.875	9.032	9.065	9.099	9.133	9.202	9.273
9	9.159	9.194	9.229	9.264	9.335	9.407
9.125	9.287	9.323	9.358	9.395	9.468	9.542
9.250	9.415	9.451	9.488	9.525	9.600	9.677
9.375	9.542	9.580	9.618	9.656	9.733	9.812
9.500	9.670	9.709	9.748	9.787	9.866	9.947
9.625	9.798	9.838	9.878	9.918	9.999	10.082
9.750	9.926	9.966	10.01	10.05	10.13	10.217
9.875	10.05	10.10	10.14	10.18	10.27	10.353
10	10.18	10.22	10.27	10.31	10.40	10.489
10.13	10.31	10.35	10.40	10.44	10.53	10.624
10.25	10.44	10.48	10.53	10.57	10.67	10.760
10.38	10.56	10.61	10.66	10.70	10.80	10.896
10.50	10.69	10.74	10.79	10.84	10.93	11.032
10.63	10.82	10.87	10.92	10.97	11.07	11.168
10.75	10.95	11.00	11.05	11.10	11.20	11.304
10.88	11.08	11.13	11.18	11.23	11.33	11.441
11	11.20	11.26	11.31	11.36	11.47	11.577
11.50	11.72	11.77	11.83	11.89	12.00	12.124
12	12.23	12.29	12.35	12.41	12.54	12.674
12.50	12.74	12.81	12.87	12.94	13.08	13.225
13	13.25	13.32	13.40	13.47	13.62	13.778
13.50	13.76	13.84	13.92	14.00	14.17	14.332
14	14.28	14.36	14.45	14.53	14.71	14.889
14.50	14.79	14.88	14.97	15.07	15.25	15.448
15	15.30	15.40	15.50	15.60	15.80	16.009
15.50	15.82	15.92	16.03	16.13	16.35	16.571

	180	210	250	270	305	365
5	5.199	5.222	5.252	5.267	5.290	5.340
5.125	5.333	5.356	5.388	5.404	5.428	5.481
5.250	5.466	5.491	5.524	5.541	5.566	5.622
5.375	5.600	5.626	5.661	5.679	5.705	5.764
5.500	5.734	5.761	5.798	5.816	5.844	5.906
5.625	5.868	5.897	5.935	5.954	5.984	6.048
5.750	6.002	6.032	6.072	6.093	6.123	6.191
5.875	6.137	6.168	6.210	6.231	6.263	6.334
6	6.271	6.304	6.348	6.370	6.404	6.477
6.125	6.406	6.440	6.486	6.509	6.544	6.621
6.250	6.541	6.577	6.624	6.648	6.685	6.766
6.375	6.676	6.713	6.763	6.788	6.826	6.910
6.500	6.812	6.850	6.902	6.928	6.968	7.055
6.625	6.947	6.987	7.041	7.068	7.110	7.201
6.750	7.083	7.124	7.180	7.209	7.252	7.347
6.875	7.219	7.262	7.320	7.349	7.394	7.493
7	7.355	7.399	7.460	7.490	7.537	7.639
7.125	7.491	7.537	7.600	7.632	7.680	7.786
7.250	7.627	7.675	7.740	7.773	7.823	7.934
7.375	7.764	7.814	7.881	7.915	7.967	8.082
7.500	7.900	7.952	8.022	8.057	8.111	8.230
7.625	8.037	8.091	8.163	8.200	8.255	8.379
7.750	8.174	8.230	8.305	8.343	8.400	8.528
7.875	8.312	8.369	8.446	8.486	8.545	8.677
8	8.449	8.508	8.588	8.629	8.690	8.827
8.125	8.587	8.648	8.730	8.772	8.836	8.977
8.250	8.724	8.787	8.873	8.916	8.982	9.128
8.375	8.862	8.927	9.016	9.060	9.128	9.279
8.500	9.001	9.068	9.159	9.205	9.275	9.431
8.625	9.139	9.208	9.302	9.350	9.422	9.583
8.750	9.277	9.349	9.445	9.495	9.569	9.735
8.875	9.416	9.490	9.589	9.640	9.717	9.888
9	9.555	9.631	9.733	9.786	9.865	10.04
9.125	9.694	9.772	9.878	9.931	10.01	10.19
9.250	9.833	9.913	10.022	10.08	10.16	10.35
9.375	9.973	10.06	10.167	10.22	10.31	10.50
9.500	10.11	10.20	10.312	10.37	10.46	10.66
9.625	10.25	10.34	10.458	10.52	10.61	10.81
9.750	10.39	10.48	10.603	10.67	10.76	10.97
9.875	10.53	10.62	10.749	10.81	10.91	11.13
10	10.67	10.77	10.896	10.96	11.06	11.28
10.13	10.81	10.91	11.042	11.11	11.21	11.44
10.25	10.95	11.05	11.189	11.26	11.36	11.60
10.38	11.09	11.20	11.336	11.41	11.51	11.76
10.50	11.24	11.34	11.483	11.56	11.67	11.91
10.63	11.38	11.48	11.631	11.71	11.82	12.07
10.75	11.52	11.63	11.779	11.86	11.97	12.23
10.88	11.66	11.77	11.927	12.01	12.12	12.39
11	11.80	11.92	12.075	12.16	12.28	12.55
11.50	12.37	12.50	12.672	12.76	12.90	13.20
12	12.94	13.08	13.273	13.37	13.52	13.85
12.50	13.52	13.67	13.878	13.98	14.15	14.51
13	14.10	14.26	14.489	14.60	14.78	15.18
13.50	14.68	14.86	15.103	15.23	15.42	15.86
14	15.26	15.46	15.723	15.86	16.07	16.54
14.50	15.85	16.06	16.347	16.50	16.72	17.24
15	16.44	16.67	16.977	17.14	17.38	17.94
15.50	17.04	17.28	17.611	17.78	18.05	18.65

Таблица П.3. Множители наращения (сложные проценты)

Число периодов	Ставка процентов			
	.25 (1/4)	.333 (1/3)	.417 (5/12)	.5 (1/2)
1	1.002500000	1.003330000	1.004160000	1.005000000
2	1.005006250	1.006671089	1.008337306	1.010025000
3	1.007518766	1.010023304	1.012531989	1.015075125
4	1.010037563	1.013386681	1.016744122	1.020150501
5	1.012562656	1.016761259	1.020973777	1.025251253
6	1.015094063	1.020147074	1.025221028	1.030377509
7	1.017631798	1.023544164	1.029485948	1.035529397
8	1.020175878	1.026952566	1.033768609	1.040707044
9	1.022726317	1.030372318	1.038069087	1.045910579
10	1.025283133	1.033803458	1.042387454	1.051140132
11	1.027846341	1.037246023	1.046723786	1.056395833
12	1.030415957	1.040700052	1.051078157	1.061677812
13	1.032991997	1.044165583	1.055450642	1.066986201
14	1.035574477	1.047642655	1.059841317	1.072321132
15	1.038163413	1.051131305	1.064250257	1.077682738
16	1.040758822	1.054631572	1.068677538	1.083071151
17	1.043360719	1.058143495	1.073123236	1.088486507
18	1.045969120	1.061667113	1.077587429	1.093928940
19	1.048584043	1.065202465	1.082070193	1.099398584
20	1.051205503	1.068749589	1.086571605	1.104895577
21	1.053833517	1.072308525	1.091091742	1.110420055
22	1.056468101	1.075879312	1.095630684	1.115972155
23	1.059109271	1.079461990	1.100188508	1.121552016
24	1.061757044	1.083056599	1.104765292	1.127159776
25	1.064411437	1.086663177	1.109361116	1.132795575
26	1.067072465	1.090281766	1.113976058	1.138459553
27	1.069740147	1.093912404	1.118610198	1.144151851
28	1.072414497	1.097555132	1.123263617	1.149872610
29	1.075095533	1.101209991	1.127936393	1.155621973
30	1.077783272	1.104877020	1.132628609	1.161400083
31	1.080477730	1.108556261	1.137340344	1.167207083
32	1.083178925	1.112247753	1.142071680	1.173043119
33	1.085886872	1.115951538	1.146822698	1.178908334
34	1.088601589	1.119667657	1.151593480	1.184802876
35	1.091323093	1.123396150	1.156384109	1.190726890
36	1.094051401	1.127137059	1.161194667	1.196680525
37	1.096786529	1.130890426	1.166025237	1.202663927
38	1.099528496	1.134656291	1.170875902	1.208677247
39	1.102277317	1.138434696	1.175746745	1.214720633
40	1.105033010	1.142225684	1.180637852	1.220794236
41	1.107795593	1.146029295	1.185549305	1.226898208
42	1.110565082	1.149845573	1.190481190	1.233032699
43	1.113341494	1.153674558	1.195433592	1.239197862
44	1.116124848	1.157516295	1.200406596	1.245393852
45	1.118915160	1.161370824	1.205400287	1.251620821
46	1.121712448	1.165238189	1.210414753	1.257878925
47	1.124516729	1.169118432	1.215450078	1.264168319
48	1.127328021	1.173011596	1.220506350	1.270489161
49	1.130146341	1.176917725	1.225583657	1.276841607
50	1.132971707	1.180836861	1.230682085	1.283225815
60	1.161616782	1.220753230	1.282847565	1.348850153
70	1.190986093	1.262018910	1.337224208	1.417830527
80	1.221097953	1.304679512	1.393905737	1.490338568
90	1.251971136	1.348782191	1.452989853	1.566554679
100	1.283624889	1.394375692	1.514578394	1.646668492

	.583 (7/12)	.667 (2/3)	.725 (3/4)	.833 (5/6)
1	1.005830000	1.006660000	1.007500000	1.008330000
2	1.011693989	1.013364356	1.015056250	1.016729389
3	1.017592165	1.020113362	1.022669172	1.025198745
4	1.023524727	1.026907317	1.030339191	1.033738650
5	1.029491876	1.033746520	1.038066735	1.042349693
6	1.035493814	1.040631272	1.045852235	1.051032466
7	1.041530743	1.047561876	1.053696127	1.059787567
8	1.047602867	1.054538638	1.061598848	1.068615597
9	1.053710392	1.061561865	1.069560839	1.077517165
10	1.059853523	1.068631867	1.077582545	1.086492883
11	1.066032469	1.075748956	1.085664415	1.095543369
12	1.072247439	1.082913444	1.093806898	1.104669245
13	1.078498641	1.090125647	1.102010449	1.113871140
14	1.084786288	1.097385884	1.110275528	1.123149686
15	1.091110592	1.104694474	1.118602594	1.132505523
16	1.097471767	1.112051739	1.126992114	1.141939294
17	1.103870028	1.119458004	1.135444555	1.151451649
18	1.110305590	1.126913594	1.143960389	1.161043241
19	1.116778671	1.134418839	1.152540092	1.170714731
20	1.123289491	1.141974068	1.161184142	1.180466785
21	1.129838269	1.149579615	1.169893023	1.190300073
22	1.136425226	1.157235816	1.178667221	1.200215273
23	1.143050585	1.164943006	1.187507225	1.210213066
24	1.149714570	1.172701527	1.196413529	1.220294141
25	1.156417406	1.180511719	1.205386631	1.230459191
26	1.163159319	1.188373927	1.214427031	1.240708916
27	1.169940538	1.196288497	1.223535233	1.251044021
28	1.176761292	1.204255779	1.232711748	1.261465218
29	1.183621810	1.212276122	1.241957086	1.271973223
30	1.190522325	1.220349881	1.251271764	1.282568760
31	1.197463070	1.228477411	1.260656302	1.293252558
32	1.204444280	1.236659071	1.270111224	1.304025352
33	1.211466190	1.244895220	1.279637058	1.314887883
34	1.218529038	1.253186222	1.289234336	1.325840899
35	1.225633062	1.261532443	1.298903594	1.336885154
36	1.232778503	1.269934249	1.308645371	1.348021407
37	1.239965602	1.278392011	1.318460211	1.359250425
38	1.247194601	1.286906102	1.328348663	1.370572981
39	1.254465746	1.295476896	1.338311278	1.381989854
40	1.261779281	1.304104772	1.348348612	1.393501830
41	1.269135454	1.312790110	1.358461227	1.405109700
42	1.276534514	1.321533292	1.368649686	1.416814264
43	1.283976710	1.330334704	1.378914559	1.428616327
44	1.291462294	1.339194733	1.389256418	1.440516701
45	1.298991519	1.348113770	1.399675841	1.452516205
46	1.306564640	1.357092208	1.410173410	1.464615665
47	1.314181912	1.366130442	1.420749710	1.476815913
48	1.321843592	1.375228871	1.431405333	1.489117790
49	1.329549941	1.384387895	1.442140873	1.501522141
50	1.337301217	1.393607918	1.452956930	1.514029820
60	1.417343406	1.489253832	1.565681027	1.644982624
70	1.502176403	1.591464104	1.687150546	1.787261914
80	1.592086954	1.700689257	1.818043980	1.941847349
90	1.687378968	1.817410737	1.959092460	2.109803325
100	1.788374544	1.942143030	2.111083840	2.292286297

	1	1.25	1.5	1.75
1	1.010000000	1.012500000	1.015000000	1.017500000
2	1.020100000	1.025156250	1.030225000	1.035306250
3	1.030301000	1.037970703	1.045678375	1.053424109
4	1.040604010	1.050945337	1.061363551	1.071859031
5	1.051010050	1.064082154	1.077284004	1.090616564
6	1.061520151	1.077383181	1.093443264	1.109702354
7	1.072135352	1.090850470	1.109844913	1.129122145
8	1.082856706	1.104486101	1.126492587	1.148881783
9	1.093685273	1.118292177	1.143389975	1.168987214
10	1.104622125	1.132270830	1.160540825	1.189444490
11	1.115668347	1.146424215	1.177948937	1.210259769
12	1.126825030	1.160754518	1.195618171	1.231439315
13	1.138093280	1.175263949	1.213552444	1.252989503
14	1.149474213	1.189954749	1.231755731	1.274916819
15	1.160968955	1.204829183	1.250232067	1.297227864
16	1.172578645	1.219889548	1.268985548	1.319929351
17	1.184304431	1.235138167	1.288020331	1.343028115
18	1.196147476	1.250577394	1.307340636	1.366531107
19	1.208108950	1.266209612	1.326950745	1.390445401
20	1.220190040	1.282037232	1.346855007	1.414778196
21	1.232391940	1.298062697	1.367057832	1.439536814
22	1.244715860	1.314288481	1.387563699	1.464728708
23	1.257163018	1.330717087	1.408377155	1.490361461
24	1.269734649	1.347351050	1.429502812	1.516442786
25	1.282431995	1.364192939	1.450945354	1.542980535
26	1.295256315	1.381245350	1.472709534	1.569982695
27	1.308208878	1.398510917	1.494800177	1.597457392
28	1.321290967	1.415992304	1.517222180	1.625412896
29	1.334503877	1.433692207	1.539980513	1.653857622
30	1.347848915	1.451613360	1.563080220	1.682800130
31	1.361327404	1.469758527	1.586526424	1.712249132
32	1.374940679	1.488130509	1.610324320	1.742213492
33	1.388690085	1.506732140	1.634479185	1.772702228
34	1.402576986	1.525566292	1.658996373	1.803724517
35	1.416602756	1.544635870	1.683881318	1.835289696
36	1.430768784	1.563943819	1.709139538	1.867407266
37	1.445076471	1.583493116	1.734776631	1.900086893
38	1.459527236	1.603286780	1.760798281	1.933338414
39	1.474122509	1.623327865	1.787210255	1.967171836
40	1.488863734	1.643619463	1.814018409	2.001597343
41	1.503752371	1.664164707	1.841228685	2.036625297
42	1.518789895	1.684966766	1.868847115	2.072266239
43	1.533977794	1.706028850	1.896879822	2.108530899
44	1.549317572	1.727354211	1.925333019	2.145430189
45	1.564810747	1.748946138	1.954213014	2.1829752[illegible]8
46	1.580458855	1.770807965	1.983526210	2.221177[illegible]84
47	1.596263443	1.792943065	2.013279103	2.260047886
48	1.612226078	1.815354853	2.043478289	2.299598724
49	1.628348338	1.838046789	2.074130464	2.339841702
50	1.644631822	1.861022374	2.105242421	2.380788932
60	1.816696699	2.107181347	2.443219776	2.831816278
70	2.006763368	2.385899972	2.835456294	3.368288269
80	2.216715217	2.701481941	3.290662787	4.006[illegible]91924
90	2.448632675	3.058812595	3.818918506	4.76[illegible]380801
100	2.704813829	3.46[illegible]101275	4.432045650	[illegible]

	2	2.25	2.5	2.75
1	1.020000000	1.022500000	1.025000000	1.027500000
2	1.040400000	1.045506250	1.050625000	1.055756250
3	1.061208000	1.069030141	1.076890625	1.084789547
4	1.082432160	1.093083319	1.103812891	1.114621259
5	1.104080803	1.117677693	1.131408213	1.145273344
6	1.126162419	1.142825442	1.159693418	1.176768361
7	1.148685668	1.168539014	1.188685754	1.209129491
8	1.171659381	1.194831142	1.218402898	1.242380552
9	1.195092569	1.221714843	1.248862970	1.276546017
10	1.218994420	1.249203426	1.280084544	1.311651033
11	1.243374308	1.277310504	1.312086658	1.347721436
12	1.268241795	1.306049990	1.344888824	1.384783775
13	1.293606630	1.335436115	1.378511045	1.422865329
14	1.319478763	1.365483427	1.412973821	1.461994126
15	1.345868338	1.396206804	1.448298166	1.502198964
16	1.372785705	1.427621457	1.484505621	1.543509436
17	1.400241419	1.459742940	1.521618261	1.585955945
18	1.428246248	1.492587156	1.559658718	1.629569734
19	1.456811173	1.526170367	1.598650186	1.674382901
20	1.485947396	1.560509201	1.638616440	1.720428431
21	1.515666344	1.595620658	1.679581851	1.767740213
22	1.545979671	1.631522122	1.721571398	1.816353069
23	1.576899264	1.668231370	1.764610683	1.866302778
24	1.608437249	1.705766576	1.808725950	1.917626105
25	1.640605994	1.744146324	1.853944098	1.970360823
26	1.673418114	1.783389616	1.900292701	2.024545745
27	1.706886477	1.823515883	1.947800018	2.080220753
28	1.741024206	1.864544990	1.996495019	2.137426824
29	1.775844690	1.906497252	2.046407394	2.196206062
30	1.811361584	1.949393441	2.097567579	2.256601728
31	1.847588816	1.993254793	2.150006769	2.318658276
32	1.884540592	2.038103026	2.203756938	2.382421379
33	1.922231404	2.083960344	2.258850861	2.447937966
34	1.960676032	2.130849452	2.315322133	2.515256260
35	1.999889553	2.178793564	2.373205186	2.584425808
36	2.039887344	2.227816419	2.432535316	2.655497517
37	2.080685091	2.277942289	2.493348699	2.728523699
38	2.122298792	2.329195990	2.555682416	2.803558101
39	2.164744768	2.381602900	2.619574476	2.880655949
40	2.208039664	2.435188965	2.685063838	2.959873987
41	2.252200457	2.489980717	2.752190434	3.041270522
42	2.297244466	2.546005283	2.820995195	3.124905461
43	2.343189355	2.603290402	2.891520075	3.210840361
44	2.390053142	2.661864436	2.963808077	3.299138471
45	2.437854205	2.721756386	3.037903279	3.389864779
46	2.486611289	2.782995905	3.113850861	3.483086061
47	2.536343515	2.845613313	3.191697132	3.578870927
48	2.587070385	2.909639612	3.271489561	3.677289878
49	2.638811793	2.975106503	3.353276800	3.778415349
50	2.691588029	3.042046400	3.437108720	3.882321772
60	3.281030788	3.800134786	4.399789749	5.092251361
70	3.999558223	4.747141396	5.632102855	6.679256755
80	4.875439156	5.930145297	7.209567816	8.760854020
90	5.943133126	7.407957825	9.228856332	11.49118322
100	7.244646118	9.254046298	11.81371635	15.07242234

	3	3.25	3.5	3.75
1	1.030000000	1.032500000	1.035000000	1.037500000
2	1.060900000	1.066056250	1.071225000	1.076406250
3	1.092727000	1.100703078	1.108717875	1.116771484
4	1.125508810	1.136475928	1.147523001	1.158650415
5	1.159274074	1.173411396	1.187686306	1.202099806
6	1.194052297	1.211547266	1.229255326	1.247178548
7	1.229873865	1.250922552	1.272279263	1.293947744
8	1.266770081	1.291577535	1.316809037	1.342470784
9	1.304773184	1.333553805	1.362897353	1.392813439
10	1.343916379	1.376894304	1.410598761	1.445043943
11	1.384233871	1.421643369	1.459969717	1.499233090
12	1.425760887	1.467846778	1.511068657	1.555454331
13	1.468533713	1.515551799	1.563956060	1.613783869
14	1.512589725	1.564807232	1.618694522	1.674300764
15	1.557967417	1.615663467	1.675348831	1.737087043
16	1.604706439	1.668172530	1.733986040	1.802227807
17	1.652847632	1.722388137	1.794675551	1.869811349
18	1.702433061	1.778365751	1.857489196	1.939929275
19	1.753506053	1.836162638	1.922501317	2.012676623
20	1.806111235	1.895837924	1.989788863	2.088151996
21	1.860294572	1.957452657	2.059431474	2.166457696
22	1.916103409	2.021069868	2.131511575	2.247699860
23	1.973586511	2.086754639	2.206114480	2.331988604
24	2.032794106	2.154574164	2.283328487	2.419438177
25	2.093777930	2.224597825	2.363244984	2.510167109
26	2.156591268	2.296897254	2.445958559	2.604298375
27	2.221289006	2.371546415	2.531567108	2.701959564
28	2.287927676	2.448621673	2.620171957	2.803283048
29	2.356565506	2.528201878	2.711877976	2.908406162
30	2.427262471	2.610368439	2.806793705	3.017471393
31	2.500080345	2.695205413	2.905031484	3.130626571
32	2.575082756	2.782799589	3.006707586	3.248025067
33	2.652335238	2.873240575	3.111942352	3.369826007
34	2.731905296	2.966620894	3.220860334	3.496194482
35	2.813862454	3.063036073	3.333590446	3.627301775
36	2.898278328	3.162584746	3.450266111	3.763325592
37	2.985226678	3.265368750	3.571025425	3.904450302
38	3.074783478	3.371493234	3.696011315	4.050867188
39	3.167026983	3.481066764	3.825371711	4.202774707
40	3.262037792	3.594201434	3.959259721	4.360378759
41	3.359898926	3.711012981	4.097833811	4.523892962
42	3.460695894	3.831620903	4.241257995	4.693538949
43	3.564516770	3.956148582	4.389702025	4.869546659
44	3.671452273	4.084723411	4.543341595	5.052154659
45	3.781595842	4.217476922	4.702358551	5.241610458
46	3.895043717	4.354544922	4.866941101	5.438170851
47	4.011895028	4.496067632	5.037284039	5.642102258
48	4.132251879	4.642189830	5.213588981	5.853681092
49	4.256219436	4.793060999	5.396064595	6.073194133
50	4.383906019	4.948835482	5.584926856	6.300938913
60	5.891603104	6.814023385	7.878090901	9.105133609
70	7.917821912	9.382189986	11.11282526	13.15731817
80	10.64089056	12.91828395	15.67573754	19.01290292
90	14.30046711	17.78711158	22.11217595	27.47448020
100	19.21863198	24.49097262	31.19140798	39.70183119

	4	4.25	4.5	4.75
1	1.040000000	1.042500000	1.045000000	1.047500000
2	1.081600000	1.086806250	1.092025000	1.097256250
3	1.124864000	1.132995516	1.141166125	1.149375922
4	1.169858560	1.181147825	1.192518601	1.203971278
5	1.216652902	1.231346608	1.246181938	1.261159914
6	1.265319018	1.283678838	1.302260125	1.321065010
7	1.315931779	1.338235189	1.360861830	1.383815598
8	1.368569050	1.395110185	1.422100613	1.449546839
9	1.423311812	1.454402367	1.486095140	1.518400313
10	1.480244285	1.516214468	1.552969422	1.590524328
11	1.539454056	1.580653583	1.622853046	1.666074234
12	1.601032219	1.647831360	1.695881433	1.745212760
13	1.665073507	1.717864193	1.772196097	1.828110366
14	1.731676448	1.790873421	1.851944922	1.914945609
15	1.800943506	1.866985542	1.935282443	2.005905525
16	1.872981246	1.946332427	2.022370153	2.101186037
17	1.947900496	2.029051555	2.113376810	2.200992374
18	2.025816515	2.115286246	2.208478766	2.305539512
19	2.106849176	2.205185912	2.307860311	2.415052639
20	2.191123143	2.298906313	2.411714025	2.529767639
21	2.278768069	2.396609831	2.520241156	2.649931602
22	2.369918792	2.498465749	2.633652008	2.775803353
23	2.464715543	2.604650544	2.752166348	2.907654012
24	2.563304165	2.715348192	2.876013834	3.045767578
25	2.665836331	2.830750490	3.005434457	3.190441538
26	2.772469785	2.951057386	3.140679007	3.341987511
27	2.883368576	3.076477325	3.282009562	3.500731918
28	2.998703319	3.207227611	3.429699993	3.667016684
29	3.118651452	3.343534784	3.584036492	3.841199976
30	3.243397510	3.485635013	3.745318135	4.023656975
31	3.373133410	3.633774501	3.913857451	4.214780681
32	3.508058747	3.788209917	4.089981036	4.414982764
33	3.648381097	3.949208838	4.274030182	4.624694445
34	3.794316341	4.117050214	4.466361541	4.844367431
35	3.946088994	4.292024848	4.667347810	5.074474884
36	4.103932554	4.474435904	4.877378461	5.315512441
37	4.268089856	4.664599430	5.096860492	5.567999282
38	4.438813450	4.862844906	5.326219214	5.832479248
39	4.616365988	5.069515814	5.565899079	6.109522012
40	4.801020628	5.284970237	5.816364538	6.399724308
41	4.993061453	5.509581472	6.078100942	6.703711213
42	5.192783911	5.743738684	6.351615484	7.022137495
43	5.400495268	5.987847578	6.637438181	7.355689026
44	5.616515078	6.242331100	6.936122899	7.705084255
45	5.841175681	6.507630172	7.248248430	8.071075757
46	6.074822709	6.784204454	7.574419609	8.454451856
47	6.317815617	7.072533144	7.915268491	8.856038319
48	6.570528242	7.373115802	8.271455573	9.276700139
49	6.833349371	7.686473224	8.643671074	9.717343395
50	7.106683346	8.013148336	9.032636273	10.17891721
60	10.51962741	12.14965144	14.02740793	16.18981545
70	15.57161835	18.42147730	21.78413558	25.75029535
80	23.04979907	27.93091040	33.83009643	40.95647122
90	34.11933334	42.34925046	52.53710530	65.14226388
100	50.50494818	64.21054625	81.58851803	103.6103555

	5	5.25	5.5	5.75
1	1.050000000	1.052500000	1.055000000	1.057500000
2	1.102500000	1.107756250	1.113025000	1.118306250
3	1.157625000	1.165913453	1.174241375	1.182608859
4	1.215506250	1.227123909	1.238824651	1.250608869
5	1.276281563	1.291547915	1.306960006	1.322518879
6	1.340095641	1.359354180	1.378842807	1.398563714
7	1.407100423	1.430720275	1.454679161	1.478981128
8	1.477455444	1.505833089	1.534686515	1.564022543
9	1.551328216	1.584889326	1.619094273	1.653953839
10	1.628894627	1.668096016	1.708144458	1.749056185
11	1.710339358	1.755671057	1.802092404	1.849626915
12	1.795856326	1.847843787	1.901207486	1.955980463
13	1.885649142	1.944855586	2.005773897	2.068449339
14	1.979931599	2.046960504	2.116091462	2.187385177
15	2.078928179	2.154425931	2.232476492	2.313159824
16	2.182874588	2.267533292	2.355262699	2.446166514
17	2.292018318	2.386578790	2.484802148	2.586821089
18	2.406619234	2.511874176	2.621466266	2.735563301
19	2.526950195	2.643747571	2.765646911	2.892858191
20	2.653297705	2.782544318	2.917757491	3.059197537
21	2.785962590	2.928627895	3.078234153	3.235101395
22	2.925260720	3.082380859	3.247537031	3.421119726
23	3.071523756	3.244205854	3.426151568	3.617834110
24	3.225099944	3.414526662	3.614589904	3.825859571
25	3.386354941	3.593789312	3.813392349	4.045846497
26	3.555672688	3.782463250	4.023128928	4.278482670
27	3.733456322	3.981042571	4.244401019	4.524495424
28	3.920129138	4.190047306	4.477843075	4.784653910
29	4.116135595	4.410024790	4.724124444	5.059771510
30	4.321942375	4.641551091	4.983951288	5.350708372
31	4.538039494	4.885232523	5.258068609	5.658374104
32	4.764941469	5.141707231	5.547262383	5.983730614
33	5.003188542	5.411646860	5.852361814	6.327795125
34	5.253347969	5.695758321	6.174241714	6.691643344
35	5.516015368	5.994785632	6.513825008	7.076412837
36	5.791816136	6.309511878	6.872085383	7.483306575
37	6.081406943	6.640761252	7.250050079	7.913596703
38	6.385477290	6.989401217	7.648802834	8.368628513
39	6.704751154	7.356344781	8.069486990	8.849824653
40	7.039988712	7.742552882	8.513308774	9.358689570
41	7.391988148	8.149036909	8.981540757	9.896814221
42	7.761587555	8.576861346	9.475525498	10.46588104
43	8.149666933	9.027146567	9.996679401	11.06766920
44	8.557150280	9.501071762	10.54649677	11.70406018
45	8.985007793	9.999878029	11.12655409	12.37704364
46	9.434258183	10.52487163	11.73851456	13.08872365
47	9.905971092	11.07742739	12.38413287	13.84132526
48	10.40126965	11.65899232	13.06526017	14.63720146
49	10.92133313	12.27108942	13.78384948	15.47884054
50	11.46739979	12.91532162	14.54196120	16.36887387
60	18.67918589	21.54399653	24.83977045	28.63008008
70	30.42642554	35.93745478	42.42991623	50.07561864
80	49.56144107	59.94712514	72.47642628	87.58507048
90	80.73036505	99.99756060	123.8002059	153.1912092
100	131.5012578	166.8055324	211.4686357	267.9400319

	6	6.25	6.5	6.75
1	1.060000000	1.062500000	1.065000000	1.067500000
2	1.123600000	1.128906250	1.134225000	1.139556250
3	1.191016000	1.199462891	1.207949625	1.216476297
4	1.262476960	1.274429321	1.286466351	1.298588447
5	1.338225578	1.354081154	1.370086663	1.386243167
6	1.418519112	1.438711226	1.459142297	1.479814581
7	1.503630259	1.528630678	1.553986546	1.579702065
8	1.593848075	1.624170095	1.654995671	1.686331954
9	1.689478959	1.725680726	1.762570390	1.800159361
10	1.790847697	1.833535771	1.877137465	1.921670118
11	1.898298558	1.948131757	1.999151401	2.051382851
12	2.012196472	2.069889992	2.129096242	2.189851194
13	2.132928260	2.199258116	2.267487497	2.337666149
14	2.260903956	2.336711749	2.414874185	2.495458614
15	2.396558193	2.482756233	2.571841007	2.663902071
16	2.540351685	2.637928497	2.739010672	2.843715461
17	2.692772786	2.802799028	2.917046366	3.035666254
18	2.854339153	2.977973968	3.106654379	3.240573726
19	3.025599502	3.164097341	3.308586914	3.459312453
20	3.207135472	3.361853425	3.523645064	3.692816043
21	3.399563601	3.571969264	3.752681993	3.942081126
22	3.603537417	3.795217343	3.996606322	4.208171602
23	3.819749662	4.032418426	4.256385733	4.492223186
24	4.048934641	4.284444578	4.533050806	4.795448251
25	4.291870720	4.552222364	4.827699108	5.119141008
26	4.549382963	4.836736262	5.141499550	5.464683026
27	4.822345941	5.139032278	5.475697021	5.833549130
28	5.111686697	5.460221796	5.831617327	6.227313696
29	5.418387899	5.801485658	6.210672454	6.647657371
30	5.743491173	6.164078512	6.614366163	7.096374243
31	6.088100643	6.549333419	7.044299964	7.575379504
32	6.453386682	6.958666757	7.502179461	8.086717621
33	6.840589883	7.393583430	7.989821126	8.632571060
34	7.251025276	7.855682394	8.509159499	9.215269607
35	7.686086792	8.346662544	9.062254867	9.837300305
36	8.147252000	8.868328952	9.651301433	10.50131808
37	8.636087120	9.422599512	10.27863603	11.21015705
38	9.154252347	10.01151198	10.94674737	11.96684265
39	9.703507488	10.63723148	11.65828595	12.77460453
40	10.28571794	11.30205845	12.41607453	13.63689033
41	10.90286101	12.00843710	13.22311938	14.55738043
42	11.55703267	12.75896442	14.08262214	15.54000361
43	12.25045463	13.55639970	14.99799258	16.58895385
44	12.98548191	14.40367468	15.97286209	17.70870824
45	13.76461083	15.30390434	17.01109813	18.90404604
46	14.59048748	16.26039837	18.11681951	20.18006915
47	15.46591673	17.27667326	19.29441278	21.54222382
48	16.39387173	18.35646534	20.54854961	22.99632392
49	17.37750403	19.50374443	21.88420533	24.54857579
50	18.42015427	20.72272845	23.30667868	26.20560466
60	32.98769085	37.99586390	43.74983974	50.35852740
70	59.07593018	69.66677562	82.12446327	96.77247730
80	105.7959935	127.7365252	154.1589068	185.9647779
90	189.4645112	234.2094882	289.3774596	357.3629567
100	339.3020835	429.4314745	543.2012710	686.7337154

	7	7.25	7.5	7.75
1	1.070000000	1.072500000	1.075000000	1.077500000
2	1.144900000	1.150256250	1.155625000	1.161006250
3	1.225043000	1.233649828	1.242296875	1.250984234
4	1.310796010	1.323089441	1.335469141	1.347935513
5	1.402551731	1.419013425	1.435629326	1.452400515
6	1.500730352	1.521891898	1.543301526	1.564961555
7	1.605781476	1.632229061	1.659049140	1.686246075
8	1.718186180	1.750565668	1.783477826	1.816930146
9	1.838459212	1.877481679	1.917238662	1.957742232
10	1.967151357	2.013599101	2.061031562	2.109467255
11	2.104851952	2.159585035	2.215608929	2.272950968
12	2.252191589	2.316154951	2.381779599	2.449104668
13	2.409845000	2,484076184	2.560413069	2.638910279
14	2.578534150	2.664171708	2.752444049	2.843425826
15	2.759031541	2.857324157	2.958877353	3.063791327
16	2.952163749	3.064480158	3.180793154	3.301235155
17	3.158815211	3.286654969	3.419352641	3.557080880
18	3.379932276	3.524937455	3.675804089	3.832754648
19	3.616527535	3.780495420	3.951489396	4.129793133
20	3.869684462	4.054581338	4.247851100	4.449852101
21	4.140562375	4.348538485	4.566439933	4.794715639
22	4.430401741	4.663807525	4.908922928	5.166306101
23	4.740529863	5.001933571	5.277092147	5.566694824
24	5.072366953	5.364573755	5.672874058	5.998113673
25	5.427432640	5.753505352	6.098339613	6.462967482
26	5.807352925	6.170634490	6.555715084	6.963847462
27	6.213867630	6.618005491	7.047393715	7.503545640
28	6.648838364	7.097810889	7.575948244	8.085070428
29	7.114257049	7.612402178	8.144144362	8.711663386
30	7.612255043	8.164301336	8.754955189	9.386817298
31	8.145112896	8.756213183	9.411576828	10.11429564
32	8.715270798	9.391038639	10.11744509	10.89815355
33	9.325339754	10.07188894	10.87625347	11.74276045
34	9.978113537	10.80210089	11.69197248	12.65282439
35	10.67658148	11.58525320	12.56887042	13.63341828
36	11.42394219	12.42518406	13.51153570	14.69000819
37	12.22361814	13.32600990	14.52490088	15.82848383
38	13.07927141	14.29214562	15.61426844	17.05519132
39	13.99482041	15.32832618	16.78533858	18.37696865
40	14.97445784	16.43962983	18.04423897	19.80118372
41	16.02266989	17,63150299	19.39755689	21.33577546
42	17.14425678	18.90978696	20.85237366	22.98929806
43	18.34435475	20.28074651	22.41630168	24.77096866
44	19.62845959	21.75110063	24.09752431	26.69071873
45	21.00245176	23.32805543	25.90483863	28.75924943
46	22.47262338	25.01933945	27.84770153	30.98809126
47	24.04570702	26.83324156	29.93627915	33.38966833
48	25.72890651	28.77865157	32.18150008	35.97736763
49	27.52992997	30.86510381	34.59511259	38.76561362
50	29.45702506	33.10282384	37.18974603	41.76994868
60	57.94642683	66.65581630	76.64924036	88.11233899
70	113.9893922	134.2180918	157.9765036	185.8700939
80	224.2343876	270.2614289	325.5945600	392.0868768
90	441.1029799	544.1981701	671.0606646	827.0944278
100	867.7163256	1095.796946	1383.077210	1744.728612

	8	8.25	8.5	8.75
1	1.080000000	1.082500000	1.085000000	1.087500000
2	1.166400000	1.171806250	1.177225000	1.182656250
3	1.259712000	1.268480266	1.277289125	1.286138672
4	1.360488960	1.373129888	1.385858701	1.398675806
5	1.469328077	1.486413103	1.503656690	1.521059939
6	1.586874323	1.609042184	1.631467509	1.654152683
7	1.713824269	1.741788164	1.770142247	1.798891043
8	1.850930210	1.885485688	1.920604338	1.956294009
9	1.999004627	2.041038257	2.083855707	2.127469735
10	2.158924997	2.209423914	2.260983442	2.313623337
11	2.331638997	2.391701386	2.453167034	2.516065379
12	2.518170117	2.589016751	2.661686232	2.736221100
13	2.719623726	2.802610633	2.887929562	2.975640446
14	2.937193624	3.033826010	3.133403575	3.236008985
15	3.172169114	3.284116656	3.399742879	3.519159771
16	3.425942643	3.555056280	3.688721024	3.827086251
17	3.700018055	3.848348423	4.002262311	4.161956298
18	3.996019499	4.165837168	4.342454607	4.526127474
19	4.315701059	4.509518734	4.711563249	4.922163628
20	4.660957144	4.881554030	5.112046125	5.352852945
21	5.033833715	5.284282237	5.546570045	5.821227578
22	5.436540413	5.720235522	6.018028499	6.330584991
23	5.871463646	6.192154952	6.529560921	6.884511178
24	6.341180737	6.703007736	7.084573600	7.486905906
25	6.848475196	7.256005874	7.686762356	8.142010173
26	7.396353212	7.854626359	8.340137156	8.854436063
27	7.988061469	8.502633033	9.049048814	9.629199219
28	8.627106386	9.204100259	9.818217964	10.47175415
29	9.317274897	9.963438530	10.65276649	11.38803264
30	10.06265689	10.78542221	11.55825164	12.38448549
31	10.86766944	11.67521954	12.54070303	13.46812797
32	11.73708300	12.63842515	13.60666279	14.64658917
33	12.67604964	13.68109523	14.76322913	15.92816573
34	13.69013361	14.80978558	16.01810360	17.32188023
35	14.78534429	16.03159290	17.37964241	18.83754475
36	15.96817184	17.35419931	18.85691201	20.48582991
37	17.24562558	18.78592075	20.45974953	22.27834003
38	18.62527563	20.33575921	22.19882824	24.22769478
39	20.11529768	22.01345935	24.08572865	26.34761807
40	21.72452150	23.82956975	26.13301558	28.65303466
41	23.46248322	25.79550925	28.35432190	31.16017519
42	25.33948187	27.92363876	30.76443927	33.88669052
43	27.36664042	30.22733896	33.37941660	36.85177594
44	29.55597166	32.72109442	36.21666702	40.07630633
45	31.92044939	35.42058471	39.29508371	43.58298314
46	34.47408534	38.34278295	42.63516583	47.39649416
47	37.23201217	41.50606255	46.25915492	51.54368740
48	40.21057314	44.93031271	50.19118309	56.05376005
49	43.42741899	48.63706351	54.45743365	60.95846405
50	46.90161251	52.64962124	59.08631551	66.29232966
60	101.2570637	116.[illegible]53322	133.5931810	153.[illegible]54810
70	218.6064059	257.[illegible]19708	302.0519702	354.8530921
80	471.9548343	[illegible]3942	682.9345033	820.[illegible]
90	1018.915089	[illegible]17822	1541.103604	1849.[illegible]76419
100	2199.761256	[illegible]82617	3491.192681	4344.[illegible]

	9	9.25	9.5	9.75
1	1.090000000	1.092500000	1.095000000	1.097500000
2	1.188100000	1.193556250	1.199025000	1.204506250
3	1.295029000	1.303960203	1.312932375	1.321945609
4	1.411581610	1.424576522	1.437660951	1.450835306
5	1.538623955	1.556349850	1.574238741	1.592291749
6	1.677100111	1.700312211	1.723791421	1.747540194
7	1.828039121	1.857591091	1.887551606	1.917925363
8	1.992562642	2.029418267	2.066869009	2.104923086
9	2.171893279	2.217139456	2.263221565	2.310153087
10	2.367363675	2.422224856	2.478227613	2.535393013
11	2.580426405	2.646280655	2.713659237	2.782593832
12	2.812664782	2.891061616	2.971456864	3.053896730
13	3.065804612	3.158484815	3.253745266	3.351651661
14	3.341727027	3.450644661	3.562851067	3.678437698
15	3.642482460	3.769829292	3.901321918	4.037085374
16	3.970305881	4.118538502	4.271947500	4.430701198
17	4.327633410	4.499503313	4.677782513	4.862694565
18	4.717120417	4.915707369	5.122171851	5.336807285
19	5.141661255	5.370410301	5.608778177	5.857145995
20	5.604410768	5.867173254	6.141612104	6.428217729
21	6.108807737	6.409886780	6.725065254	7.054968958
22	6.658600433	7.002801307	7.363946453	7.742828432
23	7.257874472	7.650560428	8.063521366	8.497754204
24	7.911083175	8.358237268	8.829555896	9.326285238
25	8.623080660	9.131374215	9.668363706	10.23559805
26	9.399157920	9.976026330	10.58685826	11.23356886
27	10.24508213	10.89880877	11.59260979	12.32884182
28	11.16713952	11.90694858	12.69390772	13.53090390
29	12.17218208	13.00834132	13.89982896	14.85016703
30	13.26767847	14.21161289	15.22031271	16.29805832
31	14.46176953	15.52618708	16.66624241	17.88711900
32	15.76332879	16.96235939	18.24953544	19.63111310
33	17.18202838	18.53137763	19.98324131	21.54514663
34	18.72841093	20.24553006	21.88164924	23.64579843
35	20.41396792	22.11824159	23.96040591	25.95126378
36	22.25122503	24.16417894	26.23664448	28.48151199
37	24.25383528	26.39936549	28.72912570	31.25845941
38	26.43668046	28.84130680	31.45839264	34.30615921
39	28.81598170	31.50912768	34.44693994	37.65100973
40	31.40942005	34.42372199	37.71939924	41.32198318
41	34.23626786	37.60791628	41.30274216	45.35087654
42	37.31753197	41.08664853	45.22650267	49.77258700
43	40.67610984	44.88716352	49.52302042	54.62541423
44	44.33695973	49.03922615	54.22770736	59.95139212
45	48.32728610	53.57535456	59.37933956	65.79665285
46	52.67674185	58.53107486	65.02037682	72.21182650
47	57.41764862	63.94519929	71.19731262	79.25247959
48	62.58523700	69.86013022	77.96105732	86.97959635
49	68.21790833	76.32219227	85.36735777	95.46010699
50	74.35752008	83.38199505	93.47725675	104.7674674
60	176 0312920	201.9699410	231.6579189	265.6267049
70	416.7300862	489.2166112	574.1010515	673.4680916
80	986.5516681	1184 992636	1422.753079	1707.506291
90	[illegible]6582	2870.318617	3525.905967	4329.199526
100	[illegible]40792	6952.557099	8737 997530	10976.22223

	10	10.25	10.5	10.75
1	1.100000000	1.102500000	1.105000000	1.107500000
2	1.210000000	1.215506250	1.221025000	1.226556250
3	1.331000000	1.340095641	1.349232625	1.358411047
4	1.464100000	1.477455444	1.490902051	1.504440234
5	1.610510000	1.628894627	1.647446766	1.666167560
6	1.771561000	1.795856326	1.820428676	1.845280572
7	1.948717100	1.979931599	2.011573687	2.043648234
8	2.143588810	2.182874588	2.222788925	2.263340419
9	2.357947691	2.406619234	2.456181762	2.506649514
10	2.593742460	2.653297705	2.714080847	2.776114337
11	2.853116706	2.925260720	2.999059336	3.074546628
12	3.138428377	3.225099944	3.313960566	3.405060390
13	3.452271214	3.555672688	3.661926425	3.771104382
14	3.797498336	3.920129138	4.046428700	4.176498103
15	4.177248169	4.321942375	4.471303713	4.625471650
16	4.594972986	4.764941469	4.940790603	5.122709852
17	5.054470285	5.253347969	5.459573616	5.673401161
18	5.559917313	5.791816136	6.032828846	6.283291786
19	6.115909045	6.385477290	6.666275875	6.958745653
20	6.727499949	7.039988712	7.366234842	7.706810810
21	7.400249944	7.761587555	8.139689500	8.535292973
22	8.140274939	8.557150280	8.994356898	9.452836967
23	8.954302433	9.434258183	9.938764372	10.46901694
24	9.849732676	10.40126965	10.98233463	11.59443626
25	10.83470594	11.46739979	12.13547977	12.84083816
26	11.91817654	12.64280826	13.40970514	14.22122826
27	13.10999419	13.93869611	14.81772418	15.75001030
28	14.42099361	15.36741246	16.37358522	17.44313641
29	15.86309297	16.94257224	18.09281167	19.31827357
30	17.44940227	18.67918589	19.99255690	21.39498798
31	19.19434250	20.59380245	22.09177537	23.69494919
32	21.11377675	22.70466720	24.41141178	26.24215623
33	23.22515442	25.03189559	26.97461002	29.06318802
34	25.54766986	27.59766488	29.80694407	32.18748073
35	28.10243685	30.42642554	32.93667320	35.64763491
36	30.91268053	33.54513415	36.39502389	39.47975567
37	34.00394859	36.98351040	40.21650140	43.72382940
38	37.40434344	40.77432022	44.43923404	48.42414106
39	41.14477779	44.95368804	49.10535362	53.62973622
40	45.25925557	49.56144107	54.26141575	59.39493287
41	49.78518112	54.64148878	59.95886440	65.77988815
42	54.76369924	60.24224138	66.25454516	72.85122613
43	60.24006916	66.41707112	73.21127240	80.68273294
44	66.26407608	73.22482091	80.89845601	89.35612673
45	72.89048369	80.73036505	89.39279389	98.96191035
46	80.17953205	89.00522747	98.77903724	109.6003157
47	88.19748526	98.12826328	109.1508362	121.3823497
48	97.01723378	108.1864103	120.6116740	134.4309522
49	106.7189572	119.2755173	133.2758997	148.8822796
50	117.3908529	131.5012578	147.2698692	164.8871247
60	304.4816395	348.9119857	399.7023312	457.7455107
70	789.7469568	925.7673709	1084.824442	1270.753875
80	2048.400215	2456.336441	2944.301239	3527.758050
90	5313.022612	6517.391841	7991.071599	9793.459700
100	13780.61234	17292.58082	21688.41437	27187.76388

	11	11.25	11.5	11.75
1	1.110000000	1.112500000	1.115000000	1.117500000
2	1.232100000	1.237656250	1.243225000	1.248806250
3	1.367631000	1.376892578	1.386195875	1.395540984
4	1.518070410	1.531792993	1.545608401	1.559517050
5	1.685058155	1.704119705	1.723353367	1.742760303
6	1.870414552	1.895833172	1.921539004	1.947534639
7	2.076160153	2.109114404	2.142515989	2.176369959
8	2.304537770	2.346389774	2.388905328	2.432093429
9	2.558036924	2.610358623	2.663629441	2.717864407
10	2.839420986	2.904023969	2.969946827	3.037213475
11	3.151757295	3.230726665	3.311490712	3.394086059
12	3.498450597	3.594183415	3.692312143	3.792891170
13	3.883280163	3.998529049	4.116928040	4.238555883
14	4.310440980	4.448363567	4.590374764	4.736586199
15	4.784589488	4.948804468	5.118267862	5.293135078
16	5.310894332	5.505544971	5.706868667	5.915078449
17	5.895092709	6.124918780	6.363158563	6.610100167
18	6.543552907	6.813972143	7.094921798	7.386786937
19	7.263343726	7.580544009	7.910837805	8.254734402
20	8.062311536	8.433355210	8.820584152	9.224665694
21	8.949165805	9.382107671	9.834951330	10.30856391
22	9.933574044	10.43759478	10.96597073	11.51982017
23	11.02626719	11.61182420	12.22705737	12.87339904
24	12.23915658	12.91815442	13.63316896	14.38602343
25	13.58546380	14.37144679	15.20098340	16.07638118
26	15.07986482	15.98823456	16.94909649	17.96535597
27	16.73864995	17.78691094	18.89824258	20.07628530
28	18.57990145	19.78793843	21.07154048	22.43524882
29	20.62369061	22.01408150	23.49476763	25.07139056
30	22.89229657	24.49066567	26.19666591	28.01727895
31	25.41044919	27.24586555	29.20928249	31.30930923
32	28.20559861	30.31102543	32.56834998	34.98815306
33	31.30821445	33.72101579	36.31371022	39.09926104
34	34.75211804	37.51463007	40.48978690	43.69342422
35	38.57485103	41.73502595	45.14611239	48.82740156
36	42.81808464	46.43021637	50.33791532	54.56462125
37	47.52807395	51.65361571	56.12677558	60.97596424
38	52.75616209	57.46464748	62.58135477	68.14064004
39	58.55933991	63.92942032	69.77821057	76.14716525
40	65.00086731	71.12148010	77.80270479	85.09445716
41	72.15096271	79.12264661	86.75001584	95.09305588
42	80.08756861	88.02394436	96.72626766	106.2664899
43	88.89720115	97.92663810	107.8497884	118.7528025
44	98.67589328	108.9433849	120.2525141	132.7062568
45	109.5302415	121.1995157	134.0815532	148.2992420
46	121.5785681	134.8344612	149.5009319	165.7244029
47	134.9522106	150.0033381	166.6935390	185.1970203
48	149.7969538	166.8787136	185.8632960	206.9576701
49	166.2746187	185.6525689	207.2375750	231.2751964
50	184.5648267	206.5384829	231.0698962	258.4500320
60	524.0572423	599.7927048	686.2653049	784.9579197
70	1488.019132	1741.812391	2038.171464	2384.115143
80	4225.112750	5058.264932	6053.260872	7241.066640
90	11996.87381	14689.32260	17977.86292	21992.66517
100	34064.17527	42658.14492	53393.29692	66796.41902

	12	12.25	12.5	12.75
1	1.120000000	1.122500000	1.125000000	1.127500000
2	1.254400000	1.260006250	1.265625000	1.271256250
3	1.404928000	1.414357016	1.423828125	1.433341422
4	1.573519360	1.587615750	1.601806641	1.616092453
5	1.762341683	1.782098675	1.802032471	1.822144241
6	1.973822685	2.000405768	2.027286530	2.054467632
7	2.210681407	2.245455474	2.280697346	2.316412255
8	2.475963176	2.520523770	2.565784514	2.611754817
9	2.773078757	2.829287932	2.886507578	2.944753556
10	3.105848208	3.175875703	3.247321025	3.320209635
11	3.478549993	3.564920477	3.653236154	3.743536363
12	3.895975993	4.001623235	4.109890673	4.220837250
13	4.363493112	4.491822082	4.623627007	4.758993999
14	4.887112285	5.042070287	5.201580383	5.365765734
15	5.473565759	5.659723897	5.851777931	6.049900865
16	6.130393650	6.353040074	6.583250172	6.821263225
17	6.866040888	7.131287483	7.406156444	7.690974286
18	7.689965795	8.004870200	8.331925999	8.671573508
19	8.612761690	8.985466798	9.373416749	9.777199130
20	9.646293093	10.08618648	10.54509384	11.02379202
21	10.80384826	11.32174433	11.86323057	12.42932550
22	12.10031006	12.70865801	13.34613439	14.01406450
23	13.55234726	14.26546861	15.01440119	15.80085773
24	15.17862893	16.01298852	16.89120134	17.81546709
25	17.00006441	17.97457961	19.00260151	20.08693914
26	19.04007214	20.17646561	21.37792670	22.64802388
27	21.32488079	22.64808265	24.05016754	25.53564693
28	23.88386649	25.42247277	27.05643848	28.79144191
29	26.74993047	28.53672568	30.43849329	32.46235075
30	29.95992212	32.03247450	34.24330495	36.60130047
31	33.55511278	35.95645272	38.52371807	41.26796628
32	37.58172631	40.36111818	43.33918283	46.52963199
33	42.09153347	45.30535516	48.75658068	52.46216006
34	47.14251748	50.85526117	54.85115327	59.15108547
35	52.79961958	57.08503065	61.70754742	66.69284887
36	59.13557393	64.07794691	69.42099085	75.19618710
37	66.23184280	71.92749541	78.09861471	84.78370095
38	74.17966394	80.73861368	87.86094155	95.59362283
39	83.08122361	90.62909377	98.84355924	107.7818097
40	93.05097044	101.7311578	111.1990041	121.5239905
41	104.2170869	114.1932246	125.0988797	137.0182993
42	116.7231373	128.1818945	140.7362396	154.4881324
43	130.7299138	143.8841767	158.3282696	174.1853693
44	146.4175035	161.5099885	178.1193033	196.3940039
45	163.9876039	181.2949615	200.3842162	221.4342394
46	183.6661163	203.5035947	225.4322432	249.6671049
47	205.7060503	228.4327851	253.6112736	281.4996608
48	230.3907763	256.4158012	285.3126828	317.3908675
49	258.0376695	287.8267369	320.9767682	357.8582031
50	289.0021898	323.0855122	361.0988642	403.4851240
60	897.5969335	1026.079426	1172.603934	1339.655196
70	2787.799828	3258.700725	3807.821409	4447.936090
80	8658.483100	10349.22846	12365.21852	14768.08026
90	26891.93422	32867.66320	40153.83409	49033.12237
100	83522.26573	104384.2182	130392.3897	162800.2453

	13	13.25	13.5	13.75
1	1.130000000	1.132500000	1.135000000	1.137500000
2	1.276900000	1.282556250	1.288225000	1.293906250
3	1.442897000	1.452494953	1.462135375	1.471818359
4	1.630473610	1.644950534	1.659523651	1.674193384
5	1.842435179	1.862906480	1.883559343	1.904394974
6	2.081951753	2.109741589	2.137839855	2.166249283
7	2.352605480	2.389282349	2.426448235	2.464108559
8	2.658444193	2.705862261	2.754018747	2.802923486
9	3.004041938	3.064389010	3.125811278	3.188325466
10	3.394567390	3.470420554	3.547795800	3.626720217
11	3.835861151	3.930251277	4.026748233	4.125394247
12	4.334523100	4.451009572	4.570359245	4.692635956
13	4.898011103	5.040768340	5.187357743	5.337873400
14	5.534752547	5.708670145	5.887651038	6.071830993
15	6.254270378	6.465068939	6.682483928	6.906707754
16	7.067325527	7.321690574	7.584619259	7.856380070
17	7.986077845	8.291814575	8.608542859	8.936632330
18	9.024267965	9.390480006	9.770696145	10.16541928
19	10.19742280	10.63471861	11.08974012	11.56316443
20	11.52308776	12.04381882	12.58685504	13.15309953
21	13.02108917	13.63962482	14.28608047	14.96165072
22	14.71383077	15.44687510	16.21470134	17.01887769
23	16.62662877	17.49358606	18.40368602	19.35897338
24	18.78809051	19.81148621	20.88818363	22.02083222
25	21.23054227	22.43650813	23.70808842	25.04869665
26	23.99051277	25.40934546	26.90868035	28.49289243
27	27.10927943	28.77608373	30.54135220	32.41066514
28	30.63348575	32.58891482	34.66443475	36.86713160
29	34.61583890	36.90694604	39.34413344	41.93636220
30	39.11589796	41.79711639	44.65559145	47.70261200
31	44.20096469	47.33523431	50.68409630	54.26172115
32	49.94709010	53.60715286	57.52644930	61.72270781
33	56.44021181	60.71010061	65.29251996	70.20958013
34	63.77743935	68.75418894	74.10701015	79.86339740
35	72.06850647	77.86411898	84.11145652	90.84461454
36	81.43741231	88.18111474	95.46650315	103.3357490
37	92.02427591	99.86511244	108.3544811	117.5444145
38	103.9874318	113.0972398	122.9823360	133.7067715
39	117.5057979	128.0826241	139.5849514	152.0914526
40	132.7815516	145.0535718	158.4289198	173.0040274
41	150.0431533	164.2731701	179.8168240	196.7920811
42	169.5487633	186.0393651	204.0920952	223.8509923
43	191.5901025	210.6895810	231.6445281	254.6305037
44	216.4968158	238.6059505	262.9165394	289.6421980
45	244.6414019	270.2212389	298.4102722	329.4680002
46	276.4447841	306.0255531	338.6956589	374.7698502
47	312.3826061	346.5739389	384.4195729	426.3007046
48	352.9923449	392.4949858	436.3162152	484.9170515
49	398.8813497	444.5005714	495.2189043	551.5931461
50	450.7359252	503.3968971	562.0734564	627.4372037
60	1530.053473	1746.998938	1994.121848	2275.539192
70	5193.869624	6062.821024	7074.737118	8252.743991
80	17630.94045	21040.53870	25099.72264	29930.39348
90	59849.41552	73019.51796	89048.69055	108549.1631
100	203162.8742	253408.4360	315926.5704	393677.4445

Таблица П.4. Дисконтные множители (сложные проценты)

Число периодов	Ставка процентов			
	.25 (1/4)	.333 (1/3)	.417 (5/12)	.5 (1/2)
1	.997506234	.996681052	.995857234	.995024876
2	.995018688	.993373120	.991731630	.990074503
3	.992537344	.990076166	.987623118	.985148759
4	.990062189	.986790155	.983531627	.980247522
5	.987593206	.983515050	.979457085	.975370668
6	.985130380	.980250814	.975399424	.970518078
7	.982673696	.976997413	.971358572	.965689630
8	.980223138	.973754810	.967334460	.960885204
9	.977778691	.970522968	.963327020	.956104680
10	.975340340	.967301853	.959336182	.951347941
11	.972908070	.964091428	.955361876	.946614866
12	.970481865	.960891659	.951404035	.941905340
13	.968061711	.957702510	.947462591	.937219243
14	.965647592	.954523945	.943537475	.932556461
15	.963239493	.951355930	.939628620	.927916877
16	.960837400	.948198429	.935735958	.923300375
17	.958441297	.945051408	.931859423	.918706841
18	.956051169	.941914832	.927998948	.914136160
19	.953667001	.938788665	.924154465	.909588219
20	.951288779	.935672875	.920325909	.905062904
21	.948916488	.932567425	.916513214	.900560104
22	.946550113	.929472282	.912716314	.896079705
23	.944189639	.926387412	.908935144	.891621597
24	.941835051	.923312781	.905169639	.887185669
25	.939486335	.920248354	.901419732	.882771810
26	.937143477	.917194097	.897685361	.878379910
27	.934806460	.914149978	.893966461	.874009861
28	.932475272	.911115962	.890262967	.869661553
29	.930149897	.908092015	.886574816	.865334879
30	.927830322	.905078105	.882901944	.861029730
31	.925516530	.902074198	.879244287	.856746000
32	.923208509	.899080261	.875601784	.852483582
33	.920906243	.896096260	.871974371	.848242370
34	.918609719	.893122164	.868361985	.844022259
35	.916318922	.890157938	.864764564	.839823143
36	.914033837	.887203550	.861182047	.835644919
37	.911754451	.884258967	.857614371	.831487481
38	.909480749	.881324158	.854061475	.827350728
39	.907212717	.878399089	.850523298	.823234555
40	.904950342	.875483728	.846999779	.819138861
41	.902693608	.872578043	.843490857	.815063543
42	.900442501	.869682002	.839996472	.811008500
43	.898197009	.866795573	.836516563	.806973632
44	.895957116	.863918724	.833051071	.802958838
45	.893722809	.861051422	.829599935	.798964018
46	.891494074	.858193638	.826163096	.794989073
47	.889270897	.855345338	.822740496	.791033903
48	.887053263	.852506491	.819332075	.787098411
49	.884841161	.849677066	.815937773	.783182499
50	.882634574	.846857032	.812557534	.779286068
60	.860869106	.819166377	.779515842	.741372196
70	.839640367	.792381154	.747817751	.705302912
80	.818935121	.766471758	.717408626	.670988473
90	.798710459	.741409552	.688236052	.638343502
100	.779043791	.717166833	.660249746	.607286776

	.583 (7/12)	.667 (2/3)	.75 (3/4)	.833 (5/6)
1	.994203792	.993384062	.992555831	.991738816
2	.988441180	.986811895	.985167078	.983545878
3	.982711969	.980283209	.977833328	.975420625
4	.977015966	.973797716	.970554172	.967362495
5	.971352978	.967355131	.963329203	.959370935
6	.965722814	.960955169	.956158018	.951445395
7	.960125284	.954597550	.949040216	.943585329
8	.954560198	.948281992	.941975401	.935790197
9	.949027368	.942008217	.934963177	.928059462
10	.943526608	.935775949	.928003163	.920392591
11	.938057731	.929584914	.921094941	.912789058
12	.932620554	.923434838	.914238155	.905248340
13	.927214891	.917325450	.907432412	.897769916
14	.921840560	.911256482	.900677332	.890353274
15	.916497381	.905227666	.893972538	.882997901
16	.911185171	.899238736	.887317655	.875703293
17	.905903752	.893289428	.880712313	.868468946
18	.900652946	.887379481	.874156142	.861294364
19	.895432574	.881508633	.867648776	.854179053
20	.890242460	.875676627	.861189852	.847122522
21	.885082430	.869883205	.854779010	.840124287
22	.879952308	.864128112	.848415891	.833183865
23	.874851921	.858411094	.842100140	.826300780
24	.869781097	.852731899	.835831404	.819474557
25	.864739665	.847090278	.829609334	.812704726
26	.859727454	.841485981	.823433582	.805990823
27	.854744295	.835918762	.817303804	.799332384
28	.849790019	.830388376	.811219656	.792728952
29	.844864459	.824894578	.805180800	.786180072
30	.839967449	.819437127	.799186898	.779685293
31	.835098823	.814015781	.793237616	.773244169
32	.830258416	.808630304	.787332622	.766856257
33	.825446065	.803280456	.781471585	.760521116
34	.820661608	.797966002	.775654178	.754238311
35	.815904883	.792686709	.769880078	.748007409
36	.811175728	.787442343	.764148961	.741827982
37	.806473985	.782232673	.758460507	.735699604
38	.801799494	.777057470	.752814399	.729621854
39	.797152097	.771916506	.747210321	.723594314
40	.792531638	.766809555	.741647962	.717616568
41	.787937959	.761736390	.736127009	.711688205
42	.783370907	.756696790	.730647155	.705808817
43	.778830326	.751690531	.725208095	.699978001
44	.774316064	.746717393	.719809523	.694195353
45	.769827967	.741777157	.714451140	.688460478
46	.765365883	.736869606	.709132645	.682772979
47	.760929664	.731994522	.703853742	.677132465
48	.756519157	.727151692	.698614136	.671538549
49	.752134214	.722340901	.693413534	.665990845
50	.747774688	.717561939	.688251647	.660488972
60	.705545315	.671477204	.638699699	.607909157
70	.665700778	.628352218	.592715334	.559515084
80	.628106397	.587996893	.550041699	.514973538
90	.592635098	.550233351	.510440431	.473977829
100	.559166984	.514895136	.473690330	.436245682

	1.00	1.25	1.5	1.75
1	.990099010	.987654321	.985221675	.982800983
2	.980296049	.975461058	.970661749	.965897772
3	.970590148	.963418329	.956316994	.949285279
4	.960980344	.951524275	.942184230	.932958506
5	.951465688	.939777062	.928260325	.916912536
6	.942045235	.928174876	.914542193	.901142542
7	.932718055	.916715927	.901026791	.885643776
8	.923483222	.905398446	.887711124	.870411573
9	.914339824	.894220688	.874592240	.855441349
10	.905286955	.883180926	.861667232	.840728599
11	.896323718	.872277458	.848933233	.826268893
12	.887449225	.861508600	.836387422	.812057880
13	.878662599	.850872692	.824027017	.798091283
14	.869962970	.840368091	.811849277	.784364897
15	.861349475	.829993176	.799851505	.770874592
16	.852821262	.819746347	.788031039	.757616307
17	.844377487	.809626021	.776385260	.744586051
18	.836017314	.799630638	.764911587	.731779902
19	.827739915	.789758655	.753607475	.719194007
20	.819544470	.780008548	.742470418	.706824577
21	.811430169	.770378813	.731497949	.694667889
22	.803396207	.760867964	.720687634	.682720284
23	.795441789	.751474532	.710037078	.670978166
24	.787566127	.742197069	.699543920	.659438001
25	.779768443	.733034142	.689205832	.648096316
26	.772047963	.723984338	.679020524	.636949696
27	.764403924	.715046259	.668985738	.625994787
28	.756835568	.706218528	.659099249	.615228292
29	.749342147	.697499781	.649358866	.604646970
30	.741922918	.688888672	.639762430	.594247637
31	.734577146	.680383874	.630307813	.584027161
32	.727304105	.671984073	.620992919	.573982468
33	.720103075	.663687973	.611815684	.564110534
34	.712973341	.655494294	.602774073	.554408387
35	.705914199	.647401772	.593866081	.544873107
36	.698924950	.639409158	.585089735	.535501826
37	.692004901	.631515218	.576443089	.526291720
38	.685153367	.623718733	.567924226	.517240020
39	.678369670	.616018502	.559531257	.508344000
40	.671653139	.608413336	.551262322	.499600983
41	.665003108	.600902060	.543115588	.491008337
42	.658418919	.593483516	.535089249	.482563476
43	.651899919	.586156559	.527181526	.474263859
44	.645445465	.578920058	.519390666	.466106986
45	.639054916	.571772897	.511714942	.458090404
46	.632727639	.564713972	.504152653	.450211700
47	.626463009	.557712195	.496702121	.442468501
48	.620260405	.550856489	.489361695	.434858477
49	.614119213	.544055791	.482129749	.427379339
50	.608038825	.537339053	.475004679	.420028834
60	.550449616	.474567603	.409295967	.353130253
70	.498311857	.419129055	.352676923	.296886703
80	.451117939	.370166787	.303890148	.249601142
90	.408391185	.326924246	.261452182	.209846819
100	.369711212	.288733258	.225629445	.176424222

	2	2.25	2.5	2.75
1	.980392157	.977995110	.975609756	.973236010
2	.961168781	.956474435	.951814396	.947188331
3	.942322335	.935427321	.928599411	.921837791
4	.923845426	.914843345	.905950645	.897165734
5	.905730810	.894712318	.883854288	.873153999
6	.887971382	.875024272	.862296866	.849784914
7	.870560179	.855769459	.841265235	.827041278
8	.853490371	.836938346	.820746571	.804906354
9	.836755266	.818521610	.800728362	.783363848
10	.820348300	.800510132	.781198402	.762397906
11	.804263039	.782894995	.762144782	.741993095
12	.788493176	.765667477	.743555885	.722134399
13	.773032525	.748819048	.725420376	.702807201
14	.757875025	.732341367	.707727196	.683997276
15	.743014730	.716226276	.690465557	.665690780
16	.728445814	.700465796	.673624934	.647874238
17	.714162562	.685052123	.657195057	.630534538
18	.700159375	.669977626	.641165909	.613658918
19	.686430760	.655234842	.625527716	.597234957
20	.672971333	.640816472	.610270943	.581250566
21	.659775817	.626715376	.595386286	.565693982
22	.646839036	.612924573	.580864669	.550553754
23	.634155918	.599437235	.566697238	.535818738
24	.621721488	.586246685	.552875354	.521478091
25	.609530871	.573346391	.539390589	.507521256
26	.597579285	.560729967	.526234721	.493937962
27	.585862044	.548391165	.513399728	.480718211
28	.574374553	.536323878	.500877784	.467852274
29	.563112307	.524522130	.488661252	.455330680
30	.552070889	.512980078	.476742685	.443144214
31	.541245970	.501692008	.465114815	.431283907
32	.530633304	.490652331	.453770551	.419741029
33	.520228729	.479855580	.442702977	.408507084
34	.510028166	.469296411	.431905343	.397573804
35	.500027613	.458969595	.421371066	.386933143
36	.490223150	.448870020	.411093723	.376577268
37	.480610932	.438992684	.401067047	.366498558
38	.471187188	.429332699	.391284924	.356689594
39	.461948223	.419885280	.381741389	.347143157
40	.452890415	.410645750	.372430624	.337852221
41	.444010211	.401609536	.363346950	.328809947
42	.435304128	.392772162	.354484829	.320009681
43	.426768753	.384129254	.345838858	.311444945
44	.418400739	.375676532	.337403764	.303109436
45	.410196803	.367409811	.329174404	.294997018
46	.402153728	.359324999	.321145760	.287101720
47	.394268361	.351418092	.313312936	.279117733
48	.386537609	.343685175	.305671157	.271939399
49	.378958410	.336122421	.298215763	.264661216
50	.371527882	.328726084	.290942208	.257577826
60	.304782266	.263118561	.227283588	.196376795
70	.250027614	.210653089	.177553576	.149717257
80	.205109728	.168629932	.138701569	.114141123
90	.168261417	.134989969	.108355788	.0870[illegible]240
100	.138032967	.108060838	.084617368	.066416336

	3	3.25	3.5	3.75
1	.970873786	.968523002	.966183575	.963855422
2	.942595909	.938036806	.933510700	.929017274
3	.915141659	.908510224	.901942706	.895438336
4	.888487048	.879913050	.871442228	.863073095
5	.862608784	.852216029	.841973167	.831877682
6	.837484257	.825390827	.813500644	.801809814
7	.813091511	.799410002	.785990961	.772828737
8	.789409234	.774246975	.759411556	.744895168
9	.766416732	.749876005	.733730972	.717971246
10	.744093915	.726272160	.708918814	.692020478
11	.722421277	.703411293	.684945714	.667007690
12	.701379880	.681270017	.661783298	.642898978
13	.680951340	.659825683	.639404153	.619661666
14	.661117806	.639056351	.617781790	.597264256
15	.641861947	.618940776	.596890619	.575676391
16	.623166939	.599458379	.576705912	.554868811
17	.605016446	.580589229	.557203779	.534813312
18	.587394608	.562314023	.538361140	.515482710
19	.570286027	.544614066	.520155690	.496850805
20	.553675754	.527471250	.502565884	.478892342
21	.537549276	.510868039	.485570903	.461582980
22	.521892501	.494787447	.469150631	.444899258
23	.506691748	.479213024	.453285634	.428818562
24	.491933736	.464128836	.437957134	.413319096
25	.477605569	.449519454	.423146989	.398379852
26	.463694727	.435369931	.408837671	.383980580
27	.450189056	.421665793	.395012242	.370101764
28	.437076753	.408393020	.381654340	.356724591
29	.424346362	.395538034	.368748155	.343830932
30	.411986760	.383087684	.356278411	.331403307
31	.399987145	.371029234	.344230348	.319424875
32	.388337034	.359350348	.332589709	.307879397
33	.377026247	.348039078	.321342714	.296751226
34	.366044900	.337083853	.310476052	.286025278
35	.355383398	.326473465	.299976862	.275687015
36	.345032425	.316197060	.289832717	.265722424
37	.334982937	.306244126	.280031610	.256117999
38	.325226152	.296604481	.270561942	.246860722
39	.315753546	.287268262	.261412505	.237938046
40	.306556841	.278225920	.252572468	.229337875
41	.297628001	.269468203	.244031370	.221048554
42	.288959224	.260986153	.235779102	.213058848
43	.280542936	.252771093	.227805895	.205357925
44	.272371782	.244814618	.220102314	.197935350
45	.264438624	.237108589	.212659241	.190781060
46	.256736528	.229645122	.205467866	.183885359
47	.249258765	.222416583	.198519677	.177238900
48	.241998801	.215415577	.191806451	.170832675
49	.234950292	.208634941	.185320243	.164658000
50	.228107080	.202067740	.179053375	.158706506
60	.169733090	.146756174	.126934306	.109828152
70	.126297359	.106584923	.089986118	.076003330
80	.093977097	.077409662	.063792652	.052595861
90	.069927786	.056220483	.045223953	.036397413
100	.052032840	.040831371	.032760111	.025187755

	4	4.25	4.5	4.75
1	.961538462	.959232614	.956937799	.954653938
2	.924556213	.920127208	.915729951	.911364141
3	.888996359	.882616026	.876296604	.870037366
4	.854804191	.846634078	.838561344	.830584598
5	.821927107	.812119020	.802451047	.792920857
6	.790314526	.779011050	.767895738	.756965019
7	.759917813	.747252806	.734828458	.722639636
8	.730690205	.716789262	.703185127	.689870774
9	.702586736	.687567638	.672904428	.658587851
10	.675564169	.659537302	.643927682	.628723486
11	.649580932	.632649691	.616198739	.600213352
12	.624597050	.606858216	.589663865	.572996040
13	.600574086	.582118193	.564271641	.547012926
14	.577475083	.558386756	.539972862	.522208044
15	.555264503	.535622787	.516720442	.498527965
16	.533908176	.513786847	.494469323	.475921685
17	.513373246	.492841100	.473176385	.454340511
18	.493628121	.472749256	.452800369	.433737958
19	.474642424	.453476505	.433301788	.414069650
20	.456386946	.434989453	.414642860	.395293222
21	.438833602	.417256070	.396787426	.377368231
22	.421955387	.400245631	.379700886	.360256067
23	.405726333	.383928663	.363350130	.343919873
24	.390121474	.368276895	.347703474	.328324462
25	.375116802	.353263208	.332730597	.313436240
26	.360689233	.338861591	.318402485	.299223141
27	.346816570	.325047089	.304691373	.285654550
28	.333477471	.311795769	.291570692	.272701241
29	.320651415	.299084671	.279015016	.260335313
30	.308318668	.286891770	.267000016	.248530132
31	.296460258	.275195943	.255502407	.237260269
32	.285057940	.263976924	.244499911	.226501451
33	.274094173	.253215274	.233971207	.216230502
34	.263552090	.242892350	.223895892	.206425300
35	.253415471	.232990263	.214254442	.197064725
36	.243668722	.223491859	.205028174	.188128616
37	.234296848	.214380680	.196199210	.179597724
38	.225285431	.205640941	.187750440	.171453675
39	.216620606	.197257497	.179665493	.163678926
40	.208289045	.189215824	.171928701	.156256731
41	.200277928	.181501990	.164525073	.149171104
42	.192574930	.174102628	.157440261	.142406782
43	.185168202	.167004919	.150660537	.135949195
44	.178046348	.160196565	.144172763	.129784434
45	.171198412	.153665770	.137964366	.123899221
46	.164613858	.147401218	.132023317	.118280879
47	.158282555	.141392056	.126338102	.112917307
48	.152194765	.135627871	.120897706	.107796952
49	.146341120	.130098677	.115691584	.102908785
50	.140712615	.124794894	.110709650	.098242277
60	.095060401	.082306888	.071289008	.061767227
70	.064219401	.054284463	.045904966	.038834506
80	.043384326	.035802628	.029559478	.024416166
90	.029308896	.023613169	.019034166	.015351017
100	.019800040	.015573766	.012256627	.009651545

	5	5.25	5.5	5.75
1	.952380952	.950118765	.947867299	.945626478
2	.907029478	.902725667	.898452416	.894209435
3	.863837599	.857696596	.851613664	.845588118
4	.822702475	.814913630	.807216743	.799610514
5	.783526166	.774264732	.765134354	.756132873
6	.746215397	.735643451	.725245833	.715019266
7	.710681330	.698948647	.687436809	.676141150
8	.676839362	.664084225	.651598871	.639376974
9	.644608916	.630958884	.617629261	.604611795
10	.613913254	.599485875	.585430579	.571736922
11	.584679289	.569582779	.554910502	.540649572
12	.556837418	.541171287	.525981518	.511252550
13	.530321351	.514176995	.498560681	.483453948
14	.505067953	.488529211	.472569366	.457166854
15	.481017098	.464160771	.447933048	.432309082
16	.458111522	.441007858	.424581088	.408802914
17	.436296688	.419009841	.402446529	.386574860
18	.415520655	.398109113	.381465904	.365555423
19	.395733957	.378250939	.361579056	.345678887
20	.376889483	.359383315	.342728963	.326883108
21	.358942365	.341456831	.324861577	.309109322
22	.341849871	.324424542	.307925665	.292301960
23	.325571306	.308241846	.291872668	.276408472
24	.310067910	.292866362	.276656558	.261379170
25	.295302772	.278257826	.262233704	.247167064
26	.281240735	.264377982	.248562753	.233727720
27	.267848319	.251190481	.235604505	.221019121
28	.255093637	.238660790	.223321805	.209001533
29	.242946321	.226756095	.211679436	.197637383
30	.231377449	.215445221	.200644016	.186891142
31	.220359475	.204698547	.190183901	.176729213
32	.209866167	.194487931	.180269101	.167119823
33	.199872540	.184786633	.170871185	.158032929
34	.190354800	.175569247	.161963209	.149440122
35	.181290285	.166811636	.153519629	.141314536
36	.172657415	.158490866	.145516236	.133630767
37	.164435633	.150585146	.137930082	.126364792
38	.156605365	.143073773	.130739414	.119493893
39	.149147966	.135937076	.123923615	.112996589
40	.142045682	.129156367	.117463142	.106852567
41	.135281602	.122713888	.111339471	.101042616
42	.128839621	.116592767	.105535044	.095548573
43	.122704401	.110776976	.100033217	.090353261
44	.116861334	.105251284	.094818215	.085440436
45	.111296509	.100001220	.089875085	.080794738
46	.105996675	.095013035	.085189654	.076401644
47	.100949214	.090273668	.080748488	.072247417
48	.096142109	.085770706	.076538851	.068319071
49	.091563913	.081492357	.072548674	.064604322
50	.087203727	.077427418	.068766515	.061091558
60	.053535524	.046416643	.040258021	.034928299
70	.032866168	.027826122	.023568277	.019969798
80	.020176976	.016681367	.013797590	.011417471
90	.012386913	.010000244	.008077531	.006527790
100	.007604490	.005995005	.004728634	.003732178

	6	6.25	6.5	6.75
1	.943396226	.941176471	.938967136	.936768150
2	.889996440	.885813149	.881659283	.877534567
3	.839619283	.833706493	.827849092	.822046432
4	.792093663	.784664935	.777323091	.770066916
5	.747258173	.738508174	.729880837	.721374160
6	.704960540	.695066516	.685334119	.675760337
7	.665057114	.654180251	.643506215	.633030761
8	.627412371	.615699060	.604231188	.593003055
9	.591898464	.579481468	.567353228	.555506374
10	.558394777	.545394323	.532726036	.520380678
11	.526787525	.513312304	.500212240	.487476045
12	.496969364	.483117462	.469682854	.456652033
13	.468839022	.454698788	.441016765	.427777080
14	.442300964	.427951800	.414100249	.400727944
15	.417265061	.402778165	.388826524	.375389175
16	.393646284	.379085332	.365095328	.351652623
17	.371364419	.356786195	.342812515	.329416977
18	.350343791	.335798772	.321889685	.308587332
19	.330513010	.316045903	.302243836	.289074784
20	.311804727	.297454967	.283797029	.270796051
21	.294155403	.279957616	.266476083	.253673115
22	.277505097	.263489521	.250212285	.237632895
23	.261797261	.247990137	.234941113	.222606927
24	.246978548	.233402482	.220601984	.208531079
25	.232998631	.219672925	.207138013	.195345273
26	.219810029	.206750988	.194495787	.182993230
27	.207367952	.194589165	.182625152	.171422230
28	.195630143	.183142744	.171479016	.160582885
29	.184556739	.172369641	.161013160	.150428932
30	.174110131	.162230250	.151186066	.140917033
31	.164254840	.152687294	.141958748	.132006588
32	.154957397	.143705689	.133294599	.123659567
33	.146186223	.135252413	.125159248	.115840344
34	.137911531	.127296389	.117520420	.108515545
35	.130105218	.119808366	.110347812	.101653906
36	.122740772	.112760815	.103612969	.095226141
37	.115793181	.106127826	.097289173	.089204816
38	.109238850	.099885013	.091351336	.083564231
39	.103055519	.094009424	.085775903	.078280310
40	.097222188	.088479457	.080540754	.073330501
41	.091719045	.083274784	.075625121	.068693678
42	.086527401	.078376267	.071009503	.064350049
43	.081629624	.073765898	.066675590	.060281077
44	.077009079	.069426728	.062606188	.056469393
45	.072650074	.065342803	.058785153	.052898729
46	.068537806	.061499108	.055197326	.049553844
47	.064658308	.057881514	.051828476	.046420463
48	.060998403	.054476719	.048665235	.043485211
49	.057545664	.051272206	.045695057	.040735561
50	.054288362	.048256194	.042906156	.038159776
60	.030314338	.026318654	.022857227	.019857610
70	.016927368	.014354045	.012176640	.010333517
80	.009452154	.007828614	.006486813	.005377362
90	.005278033	.004269682	.003455694	.002798275
100	.002947226	.002328660	.001840938	.001456168

	7	7.25	7.5	7.75
1	.934579439	.932400932	.930232558	.928074246
2	.873438728	.869371499	.865332612	.861321806
3	.816297877	.810602796	.804960570	.799370586
4	.762895212	.755806803	.748800530	.741875253
5	.712986179	.704714968	.696558632	.688515316
6	.666342224	.657076893	.647961518	.638993333
7	.622749742	.612659108	.602754901	.593033256
8	.582009105	.571243923	.560702233	.550378892
9	.543933743	.532628367	.521583473	.510792475
10	.508349292	.496623186	.485193928	.474053341
11	.475092796	.463051921	.451343189	.439956697
12	.444011959	.431750043	.419854129	.408312480
13	.414964448	.402564143	.390561981	.378944297
14	.387817241	.375351182	.363313471	.351688442
15	.362446020	.349977792	.337966019	.326392986
16	.338734598	.326319620	.314386995	.302916924
17	.316574390	.304260718	.292453018	.281129396
18	.295863916	.283692977	.272049319	.260908952
19	.276508333	.264515596	.253069134	.242142879
20	.258419003	.246634589	.235413148	.224726570
21	.241513087	.229962320	.218988975	.208562942
22	.225713165	.214417082	.203710674	.193561895
23	.210946883	.199922687	.189498302	.179639810
24	.197146620	.186408100	.176277490	.166719081
25	.184249178	.173807086	.163979060	.154727686
26	.172195493	.162057889	.152538661	.143598780
27	.160930367	.151102927	.141896429	.133270330
28	.150402212	.140888510	.131996678	.123684761
29	.140562815	.131364578	.122787607	.114788641
30	.131367117	.122484455	.114221030	.106532381
31	.122773007	.114204620	.106252121	.098869959
32	.114741128	.106484494	.098839182	.091758663
33	.107234699	.099286242	.091943425	.085158852
34	.100219345	.092574584	.085528768	.079033737
35	.093662939	.086316629	.079561644	.073349176
36	.087535457	.080481705	.074010832	.068073481
37	.081808838	.075041217	.068847286	.063177245
38	.076456858	.069968501	.064043987	.058633174
39	.071455008	.065238695	.059575802	.054415939
40	.066780381	.060828620	.055419350	.050502031
41	.062411571	.056716662	.051552884	.046869635
42	.058328571	.052882669	.047956171	.043498501
43	.054512683	.049307850	.044610392	.040369838
44	.050946433	.045974685	.041498039	.037466207
45	.047613489	.042866839	.038602827	.034771422
46	.044498588	.039969081	.035909606	.032270461
47	.041587465	.037267208	.033404285	.029949384
48	.038866790	.034747980	.031073753	.027795252
49	.036324103	.032399049	.028905817	.025796058
50	.033947759	.030208903	.026889132	.023940657
60	.017257319	.015002442	.013046444	.011349148
70	.008772746	.007450560	.006330055	.005380102
80	.004159619	.003700121	.003071304	.002550155
90	.002267044	.001837566	.001490178	.001203052
100	.001152450	.000912578	.000723025	.000573155

	8	8.25	8.5	8.75
1	.925925926	.923787529	.921658986	.919540230
2	.857338820	.853383398	.849455287	.845554234
3	.793832241	.788344941	.782908098	.777521135
4	.735029853	.728263225	.721574284	.714961963
5	.680583197	.672760485	.665045423	.657436288
6	.630169627	.621487746	.612945091	.604539116
7	.583490395	.574122629	.564926351	.555898037
8	.540268885	.530367325	.520669448	.511170609
9	.500248967	.489946720	.479879675	.470041939
10	.463193488	.452606670	.442285415	.432222473
11	.428882859	.418112397	.407636327	.397445952
12	.397113759	.386247018	.375701684	.365467542
13	.367697925	.356810178	.346268833	.336062108
14	.340461041	.329616793	.319141782	.309022628
15	.315241705	.304495883	.294139891	.284158738
16	.291890468	.281289499	.271096674	.261295391
17	.270268951	.259851731	.249858686	.240271624
18	.250249029	.240047789	.230284503	.220939425
19	.231712064	.221753153	.212243781	.203162689
20	.214548207	.204852798	.195616388	.186816266
21	.198655748	.189240460	.180291602	.171785072
22	.183940507	.174817977	.166167375	.157963285
23	.170315284	.161494667	.153149655	.145253595
24	.157699337	.149186759	.141151755	.133566524
25	.146017905	.137816867	.130093784	.122819793
26	.135201764	.127313503	.119902105	.112937740
27	.125186818	.117610627	.110508852	.103850796
28	.115913721	.108647230	.101851477	.095494984
29	.107327519	.100366956	.093872329	.087811480
30	.099377333	.092717743	.086518276	.080746188
31	.092016049	.085651494	.079740346	.074249369
32	.085200045	.079123782	.073493407	.068275282
33	.078888931	.073093563	.067735859	.062781868
34	.073045306	.067522922	.062429363	.057730453
35	.067634543	.062376833	.057538583	.053085474
36	.062624577	.057622941	.053030952	.048814229
37	.057985719	.053231354	.048876454	.044886648
38	.053690481	.049174461	.045047423	.041275078
39	.049713408	.045426754	.041518362	.037954095
40	.046030933	.041964669	.038265771	.034900317
41	.042621235	.038766438	.035267992	.032092246
42	.039464106	.035811952	.032505062	.029510111
43	.036540839	.033082634	.029958582	.027135734
44	.033834110	.030561325	.027611597	.024952399
45	.031327880	.028232171	.025448476	.022944735
46	.029007296	.026080527	.023454817	.021098607
47	.026858607	.024092866	.021617343	.019401018
48	.024869081	.022256689	.019923818	.017840016
49	.023026927	.020560452	.018362966	.016404613
50	.021321229	.018993489	.016924393	.015084701
60	.009875854	.008596580	.007485412	.006519947
70	.004574431	.003890869	.003310689	.002818068
80	.002118847	.001761033	.001464269	.001218032
90	.000981436	.000797055	.000647625	.000526461
100	.000454595	.000360753	.000286435	.000227548

	9	9.25	9.5	9.75
1	.917431193	.915331808	.913242009	.911161731
2	.841679993	.837832318	.834010967	.830215700
3	.772183480	.766894571	.761653851	.756460775
4	.708425211	.701962994	.695574294	.689258109
5	.649931386	.642529056	.635227665	.628025612
6	.596267327	.588127282	.580116589	.572232904
7	.547034245	.538331609	.529786840	.521396723
8	.501866280	.492752044	.483823598	.475076741
9	.460427780	.451031620	.441848034	.432871740
10	.422410807	.412843588	.403514187	.394416169
11	.387532850	.377888868	.368506107	.359376920
12	.355534725	.345893700	.336535257	.327450496
13	.326178647	.316607506	.307338134	.298360361
14	.299246465	.289800921	.280674095	.271854543
15	.274538041	.265264001	.256323375	.247703456
16	.251869763	.242804577	.234085274	.225697910
17	.231073177	.222246753	.213776506	.205647298
18	.211993740	.203429522	.195229686	.187377948
19	.194489670	.186205512	.178291950	.170731616
20	.178430890	.170439828	.162823699	.155564115
21	.163698064	.156008996	.148697442	.141744068
22	.150181710	.142799996	.135796751	.129151770
23	.137781385	.130709379	.124015297	.117678151
24	.126404941	.119642452	.113255979	.107223828
25	.115967836	.109512542	.103430118	.097698248
26	.106392510	.100240313	.094456729	.089018905
27	.097607807	.091753147	.086261853	.081110620
28	.089548447	.083984574	.078777948	.073904893
29	.082154538	.076873752	.071943331	.067339310
30	.075371136	.070364990	.065701672	.061357002
31	.069147831	.064407314	.060001527	.055906152
32	.063438377	.058954063	.054795915	.050939547
33	.058200346	.053962529	.050041932	.046414165
34	.053394813	.049393619	.045700394	.042290811
35	.048986067	.045211551	.041735520	.038533769
36	.044941346	.041383570	.038114630	.035110496
37	.041230593	.037879698	.034807881	.031991340
38	.037826232	.034672493	.031788020	.029149285
39	.034702965	.031736835	.029030155	.026559713
40	.031837582	.029049735	.026511557	.024200194
41	.029208791	.026590146	.024211468	.022050290
42	.026797056	.024338807	.022110929	.020091381
43	.024584455	.022278084	.020192629	.018306497
44	.022554546	.020391839	.018440757	.016680180
45	.020692244	.018665299	.016840874	.015198342
46	.018983710	.017084942	.015379794	.013848147
47	.017416248	.015638391	.014045474	.012617902
48	.015978209	.014314316	.012826917	.011496949
49	.014658907	.013102349	.011714079	.010475580
50	.013448539	.011992997	.010697789	.009544918
60	.005680808	.004951232	.004316710	.003761682
70	.002399635	.002044084	.001741854	.001484851
80	.001013632	.000843887	.000702863	.000585649
90	.000428169	.000348393	.000283617	.000230990
100	.000180863	.000143832	.000114443	.000091106

	10	10.25	10.5	10.75
1	.909090909	.907029478	.904977376	.902934537
2	.826446281	.822702475	.818984050	.815290779
3	.751314801	.746215397	.741162036	.736154202
4	.683013455	.676839362	.670734875	.664699054
5	.620921323	.613913254	.606999887	.600179732
6	.564473930	.556837418	.549321164	.541923009
7	.513158118	.505067953	.497123226	.489321001
8	.466507380	.458111522	.449885272	.441824832
9	.424097618	.415520655	.407135993	.398938900
10	.385543289	.376889483	.368448862	.360215711
11	.350493899	.341849871	.333437884	.325251206
12	.318630818	.310067910	.301753742	.293680548
13	.289664380	.281240735	.273080309	.265174309
14	.263331254	.255093637	.247131501	.239435042
15	.239392049	.231377449	.223648418	.216194169
16	.217629136	.209866167	.202396758	.195209182
17	.197844669	.190354800	.183164487	.176261112
18	.179858790	.172657415	.165759717	.159152246
19	.163507991	.156605365	.150008793	.143704060
20	.148643628	.142045682	.135754564	.129755359
21	.135130571	.128839621	.122854809	.117160595
22	.122845974	.116861334	.111180823	.105788347
23	.111678158	.105996675	.100616129	.095519952
24	.101525598	.096142109	.091055321	.086248264
25	.092295998	.087203727	.082403005	.077876536
26	.083905453	.079096351	.074572855	.070317414
27	.076277684	.071742722	.067486747	.063492022
28	.069343349	.065072764	.061073979	.057329139
29	.063039409	.059022915	.055270569	.051764460
30	.057308553	.053535524	.050018615	.046739919
31	.052098685	.048558298	.045265715	.042203087
32	.047362441	.044043808	.040964448	.038106625
33	.043056764	.039949032	.037071898	.034407788
34	.039142513	.036234950	.033549229	.031067980
35	.035584103	.032866168	.030361293	.028052352
36	.032349184	.029810583	.027476284	.025329437
37	.029408349	.027039077	.024865415	.022870824
38	.026734863	.024525240	.022502638	.020650857
39	.024304421	.022245116	.020364378	.018646372
40	.022094928	.020176976	.018429302	.016836453
41	.020086298	.018301112	.016678101	.015202215
42	.018260271	.016599648	.015093304	.013726605
43	.016600247	.015056370	.013659099	.012394226
44	.015091133	.013656571	.012361175	.011191174
45	.013719212	.012386913	.011186584	.010104898
46	.012472011	.011235295	.010123605	.009124061
47	.011338192	.010190744	.009161634	.008238430
48	.010307447	.009243305	.008291071	.007438763
49	.009370406	.008383950	.007503232	.006716716
50	.008518551	.007604490	.006790255	.006064755
60	.003284270	.002866052	.002501862	.002184620
70	.001266228	.001080185	.000921808	.000786934
80	.000488186	.000407110	.000339639	.000283466
90	.000188217	.000153436	.000125140	.000102109
100	.000072566	.000057828	.000046108	.000036781

	11	11.25	11.5	11.75
1	.900900901	.898876404	.896860987	.894854586
2	.811622433	.807978791	.804359629	.800764730
3	.731191381	.726273070	.721398771	.716567991
4	.658730974	.652829726	.646994413	.641224153
5	.593451328	.586813237	.580264048	.573802374
6	.534640836	.527472572	.520416186	.513469686
7	.481658411	.474132649	.466740974	.459480704
8	.433926496	.426186651	.418601771	.411168415
9	.390924771	.383089125	.375427597	.367935942
10	.352184479	.344349775	.336706365	.329249165
11	.317283314	.309527888	.301978803	.294630125
12	.285840824	.278227315	.270833007	.263651119
13	.257514256	.250091968	.242899558	.235929413
14	.231994825	.224801769	.217847137	.211122517
15	.209004347	.202069006	.195378598	.188923953
16	.188292204	.181635062	.175227442	.169059465
17	.169632616	.163267471	.157154657	.151283638
18	.152822177	.146757277	.140945881	.135376857
19	.137677637	.131916654	.126408861	.121142601
20	.124033907	.118576767	.113371176	.108405013
21	.111742259	.106585858	.101678185	.097006723
22	.100668701	.095807513	.091191197	.086806911
23	.090692524	.086119113	.081785827	.077679562
24	.081704976	.077410439	.073350518	.069511912
25	.073608087	.069582417	.065785218	.062203054
26	.066313592	.062545993	.059000195	.055662688
27	.059741975	.056221117	.052914973	.049810011
28	.053821599	.050535835	.047457375	.044572717
29	.048487927	.045425470	.042562668	.039886100
30	.043682817	.040831883	.038172797	.035692260
31	.039353889	.036702816	.034235692	.031939382
32	.035453954	.032991296	.030704657	.028581103
33	.031940499	.029655097	.027537809	.025575931
34	.028775225	.026656267	.024697586	.022886739
35	.025923626	.023960690	.022150301	.020480303
36	.023354618	.021537698	.019865741	.018326893
37	.021040196	.019359729	.017816808	.016399905
38	.018955132	.017402004	.015979200	.014675530
39	.017076695	.015642250	.014331121	.013132465
40	.015384410	.014060450	.012853024	.011751647
41	.013859829	.012638607	.011527375	.010516015
42	.012486332	.011360545	.010338453	.009410304
43	.011248948	.010211726	.009272155	.008420854
44	.010134187	.009179080	.008315834	.007535440
45	.009129899	.008250858	.007458147	.006743123
46	.008225134	.007416502	.006688922	.006034114
47	.007410031	.006666518	.005999033	.005399655
48	.006675703	.005992376	.005380298	.004831906
49	.006014147	.005386405	.004825380	.004323853
50	.005418150	.004841713	.004327695	.003869220
60	.001908188	.001667243	.001457162	.001273937
70	.000672034	.000574115	.000490636	.000419443
80	.000236680	.000197696	.000165200	.000138101
90	.000083355	.000068077	.000055624	.000045470
100	.000029356	.000023412	.000018729	.000014971

	12	12.25	12.5	12.75
1	.892857143	.890868597	.888888889	.886917960
2	.797193878	.793646857	.790123457	.786623468
3	.711780248	.707035062	.702331962	.697670482
4	.635518078	.629875334	.624295077	.618776480
5	.567426856	.561136155	.554928957	.548803974
6	.506631121	.499898579	.493270184	.486744101
7	.452349215	.445343945	.438462386	.431702085
8	.403883228	.396742936	.389744343	.382884333
9	.360610025	.353445822	.346439416	.339586991
10	.321973237	.314873784	.307946148	.301185801
11	.287476104	.280511166	.273729909	.267127097
12	.256675093	.249898589	.243315475	.236919820
13	.229174190	.222626805	.216280422	.210128443
14	.204619813	.198331230	.192249264	.186366690
15	.182696261	.176687064	.170888235	.165291965
16	.163121662	.157404957	.151900653	.146600412
17	.145644341	.140227133	.135022803	.130022538
18	.130039590	.124923949	.120020269	.115319325
19	.116106777	.111290824	.106684684	.102278780
20	.103666765	.099145500	.094830830	.090712887
21	.092559612	.088325612	.084294071	.080454889
22	.082642510	.078686514	.074928063	.071356886
23	.073787956	.070099345	.066602723	.063287704
24	.065882103	.062449305	.059202420	.056131001
25	.058823307	.055634125	.052624374	.049783593
26	.052520809	.049562694	.046777221	.044153963
27	.046893580	.044153848	.041579752	.039160942
28	.041869268	.039335277	.036959779	.034732543
29	.037383275	.035042563	.032853137	.030804916
30	.033377924	.031218319	.029202789	.027321434
31	.029801718	.027811420	.025958034	.024231870
32	.026608677	.024776321	.023073808	.021491681
33	.023757747	.022072446	.020510052	.019061358
34	.021212274	.019663649	.018231157	.016905861
35	.018939530	.017517727	.016205473	.014994111
36	.016910295	.015605993	.014404865	.013298547
37	.015098478	.013902889	.012804324	.011794720
38	.013480784	.012385647	.011381622	.010460949
39	.012036414	.011033984	.010116997	.009278003
40	.010746798	.009829830	.008992886	.008228828
41	.009595356	.008757087	.007993677	.007298295
42	.008567282	.007801414	.007105490	.006472989
43	.007649359	.006950035	.006315991	.005741010
44	.006829785	.006191568	.005614215	.005091805
45	.006098022	.005515873	.004990413	.004516013
46	.005444662	.004913918	.004435923	.004005333
47	.004861306	.004377655	.003943042	.003552402
48	.004340452	.003899916	.003504927	.003150689
49	.003875403	.003474312	.003115490	.002794403
50	.003460181	.003095156	.002769325	.002478406
60	.001114086	.000974583	.000852803	.000746461
70	.000358706	.000306871	.000262617	.000224823
80	.000115494	.000096626	.000080872	.000067714
90	.000037186	.000030425	.000024904	.000020394
100	.000011973	000009580	.000007669	.000006142

	13	13.25	13.5	13.75
1	.884955752	.883002208	.881057269	.879120879
2	.783146683	.779692898	.776261911	.772853520
3	.693050162	.688470551	.683931199	.679431666
4	.613318728	.607921016	.602582554	.597302564
5	.542759936	.536795599	.530909739	.525101155
6	.480318527	.473991699	.467761885	.461627389
7	.425060644	.418535716	.412125009	.405826276
8	.376159862	.369567962	.363105735	.356770352
9	.332884833	.326329326	.319916947	.313644266
10	.294588348	.288149515	.281865151	.275731223
11	.260697653	.254436658	.248339340	.242401075
12	.230705888	.224668131	.218801181	.213099846
13	.204164502	.198382455	.192776371	.187340524
14	.180676551	.175172146	.169847023	.164694966
15	.159890753	.154677392	.149644954	.144786783
16	.141496242	.136580478	.131845774	.127285084
17	.125217913	.120600864	.116163678	.111898975
18	.110812312	.106490829	.102346853	.098372726
19	.098063993	.094031637	.090173439	.086481517
20	.086782295	.083030143	.079447964	.076027707
21	.076798491	.073315800	.069998206	.066837545
22	.067963266	.064738013	.061672428	.058758281
23	.060144484	.057163808	.054336941	.051655632
24	.053225207	.050475769	.047873957	.045411544
25	.047101953	.044570215	.042179698	.039922237
26	.041683144	.039355599	.037162729	.035096472
27	.036887738	.034751080	.032742493	.030854041
28	.032644016	.030685281	.028848011	.027124432
29	.028888510	.027095171	.025416750	.023845654
30	.025565053	.023925095	.022393612	.020963213
31	.022623941	.021125912	.019730055	.018429198
32	.020021186	.018654227	.017383308	.016201493
33	.017717864	.016471724	.015315690	.014243071
34	.015679526	.014544568	.013494000	.012521381
35	.013875686	.012842886	.011888987	.011007807
36	.012279369	.011340297	.010474878	.009677193
37	.010866698	.010013507	.009228968	.008507423
38	.009616547	.008841949	.008131249	.007479053
39	.008510218	.007807460	.007164096	.006574991
40	.007531167	.006894005	.006311979	.005780212
41	.006664749	.006087421	.005561215	.005081505
42	.005898008	.005375206	.004899749	.004467257
43	.005219476	.004746319	.004316959	.003927259
44	.004619006	.004191010	.003803488	.003452536
45	.004087616	.003700671	.003351091	.003035196
46	.003617359	.003267701	.002952503	.002668304
47	.003201203	.002885387	.002601324	.002345762
48	.002832923	.002547803	.002291916	.002062208
49	.002507011	.002249716	.002019309	.001812930
50	.002218594	.001986504	.001779127	.001593785
60	.000653572	.000572410	.000501474	.000439456
70	.000192535	.000164940	.000141348	.000121172
80	.000056718	.000047527	.000039841	.000033411
90	.000016709	.000013695	.000011230	.000009212
100	.000004922	.000003946	.000003165	.00000254[illegible]

Таблица П.5. Годовые ставки сложных процентов, эквивалентные номинальным ставкам при начислении *m* раз в году

Номинальная ставка	Число периодов начисления процентов в году			
	2	4	12	~
1	1.002500000	1.003756254	1.004596089	1.005016708
1.25	1.253906250	1.255871592	1.257186383	1.257845154
1.50	1.505625000	1.508458614	1.510355590	1.511306462
1.75	1.757656250	1.761517908	1.764104916	1.765402215
2	2.010000000	2.015050063	2.018435568	2.020134003
2.25	2.262656250	2.269055667	2.273348758	2.275503416
2.50	2.515625000	2.523535309	2.528545698	2.531512052
2.75	2.768906250	2.778489579	2.784927604	2.788161511
3	3.022500000	3.033919066	3.041595691	3.045453395
3.25	3.276406250	3.289824362	3.298851181	3.303389314
3.50	3.530625000	3.546206055	3.556695295	3.561970880
3.75	3.785156250	3.803064737	3.815129256	3.821199708
4	4.040000000	4.060401000	4.074154292	4.081077419
4.25	4.295156250	4.318215435	4.333771631	4.341605637
4.50	4.550625000	4.576508633	4.593982504	4.602785991
4.75	4.806406250	4.835281188	4.854788145	4.864620112
5	5.062500000	5.094533691	5.116189788	5.127109638
5.25	5.318906250	5.354266737	5.378188673	5.390256208
5.50	5.575625000	5.614480918	5.640786039	5.654061468
5.75	5.832656250	5.875176829	5.903983128	5.918527065
6	6.090000000	6.136355063	6.167781186	6.183654655
6.25	6.347656250	6.398016214	6.432181461	6.449445892
6.50	6.605625000	6.660160879	6.697185200	6.715902438
6.75	6.863906250	6.922789652	6.962793657	6.983025960
7	7.122500000	7.185903129	7.229008086	7.250818125
7.25	7.381406250	7.449501906	7.495829742	7.519280609
7.50	7.640625000	7.713586578	7.763259886	7.788415088
7.75	7.900156250	7.978157744	8.031299777	8.058223246
8	8.160000000	8.243216000	8.299950681	8.328706767
8.25	8.420156250	8.508761943	8.569213862	8.599867344
8.50	8.680625000	8.774796172	8.839090589	8.871706670
8.75	8.941406250	9.041319284	9.109582133	9.144226444
9	9.202500000	9.308331879	9.380689767	9.417428371
9.25	9.463906250	9.575834554	9.652414766	9.691314156
9.50	9.725625000	9.843827910	9.924758408	9.965885513
9.75	9.987656250	10.11231255	10.19772197	10.24114416
10	10.25000000	10.38128906	10.47130674	10.51709181
10.25	10.51265625	10.65075806	10.74551401	10.79373019
10.50	10.77562500	10.92072014	11.02034505	11.07106104
10.75	11.03890625	11.19117590	11.29580115	11.34908607
11	11.30250000	11.46212594	11.57188362	11.62780705
11.25	11.56640625	11.73357087	11.84859374	11.90722569
11.50	11.83062500	12.00551129	12.12593281	12.18734376
11.75	12.09515625	12.27794780	12.40390214	12.46816299
12	12.36000000	12.55088100	12.68250301	12.74968516
12.25	12.62515625	12.82431150	12.96173675	13.03191201
12.50	12.89062500	13.09823990	13.24160464	13.31184531
12.75	13.15640625	13.37266680	13.52210801	13.59848682
13	13.42250000	13.64759282	13.80324816	13.88283833
13.25	13.68890625	13.92301854	14.08502641	14.16790161
13.50	13.95562500	14.19894459	14.36744407	14.45367844
13.75	14.22265625	14.47537156	14.65050247	14.74017060
14	14.49000000	14.75230006	14.93420292	15.02737989
14.25	14.75765625	15.02973070	15.21854675	15.31530810
14.50	15.02562500	15.30766408	15.50353528	15.60395703
14.75	15.29390625	15.58610081	15.78916984	15.85[illegible]2848
15	15.56250000	15.86504150	16.07515177	16.18[illegible]2127

Таблица П.6. Номинальные ставки, начисляемые m раз в году, эквивалентные годовым сложным ставкам

Годовая ставка	Число периодов начисления процентов в году		
	2	4	12	∞
1	.997512422	.996271726	.995445737	.995033085
1.25	1.246117975	1.244182986	1.242895218	1.242252000
1.50	1.494416796	1.491635575	1.489785260	1.488861249
1.75	1.742410018	1.738631469	1.736118502	1.734863833
2	1.990098767	1.985172629	1.981897562	1.980262730
2.25	2.237484162	2.231261004	2.227125042	2.225060893
2.50	2.484567313	2.476898530	2.471803524	2.469261259
2.75	2.731349327	2.722087129	2.715935570	2.712866739
3	2.977831302	2.966828711	2.959523727	2.955880224
3.25	3.224014329	3.211125173	3.202570521	3.198304585
3.50	3.469899494	3.454978399	3.445078463	3.440142672
3.75	3.715487875	3.698390261	3.687050044	3.681397312
4	3.960780544	3.941362620	3.928487739	3.922071315
4.25	4.205778567	4.183897321	4.169394004	4.162167469
4.50	4.450483003	4.425996200	4.409771281	4.401688542
4.75	4.694894905	4.667661080	4.649621991	4.640637281
5	4.939015319	4.908893772	4.888948540	4.879016417
5.25	5.182845287	5.149696075	5.127753319	5.116828657
5.50	5.426385842	5.390069776	5.366038700	5.354076693
5.75	5.669638012	5.630016653	5.603807040	5.590763194
6	5.912602820	5.869538467	5.841060678	5.826890812
6.25	6.155281281	6.108636974	6.077801940	6.062462182
6.50	6.397674406	6.347313913	6.314033132	6.297479916
6.75	6.639783198	6.585571016	6.549756548	6.531946612
7	6.881608656	6.823410001	6.784974465	6.765864847
7.25	7.123151772	7.060832576	7.019689143	6.999237182
7.50	7.364413533	7.297840439	7.253902829	7.232066158
7.75	7.605394920	7.534435277	7.487617754	7.464354300
8	7.846096908	7.770618763	7.720836132	7.696104114
8.25	8.086520467	8.006392564	7.953560165	7.927318089
8.50	8.326666560	8.241758334	8.185792039	8.157998699
8.75	8.566536146	8.476717717	8.417533925	8.388148398
9	8.806130178	8.711272346	8.648787979	8.617769624
9.25	9.045449604	8.945423844	8.879556345	8.846864799
9.50	9.284495365	9.179173824	9.109841149	9.075436327
9.75	9.523268398	9.412523890	9.339644505	9.303486597
10	9.761769634	9.645475631	9.568968515	9.531017980
10.25	10.	9.878030638	9.797815262	9.758032834
10.50	10.23796042	10.11019048	10.02618682	9.984533497
10.75	10.47565180	10.34195671	10.25408525	10.21052229
11	10.71307506	10.57333090	10.48151259	10.43600153
11.25	10.95023110	10.80431458	10.70847087	10.66097351
11.50	11.18712082	11.03490929	10.93496212	10.88544049
11.75	11.42374512	11.26511655	11.16098834	11.10940475
12	11.66010489	11.49493789	11.38655152	11.33286853
12.25	11.89620100	11.72437480	11.61165364	11.55583406
12.50	12.13203436	11.95342878	11.83629666	11.77830357
12.75	12.36760582	12.18210138	12.06048255	12.00027924
13	12.60291625	12.41039391	12.28421323	12.22176327
13.25	12.83796654	12.63830800	12.50749064	12.44275784
13.50	13.07275753	12.86584507	12.73031670	12.66326509
13.75	13.30729008	13.09300657	12.95269330	12.88328718
14	13.54156504	13.31979390	13.17462234	13.10282624
14.25	13.77558326	13.54620856	13.39610570	13.32188438
14.50	14.00934559	13.77225194	13.61714525	13.54046370
14.75	14.24285286	13.99792545	13.83771283	13.75856630
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	13.97619424

Таблица П.7. Множители наращения (сложные учетные ставки)

Число периодов	Учетная ставка			
	4	4.5	5	5.25
1	1.041666667	1.047120419	1.052631579	1,055408971
2	1.085069444	1.096461172	1.108033241	1.113888096
3	1.130280671	1.148126881	1.166350780	1.175607489
4	1.177375699	1.202227101	1.227737663	1.240746690
5	1.226433020	1.258876545	1.292355435	1.309495188
6	1.277534396	1.318195335	1.360374142	1.382052969
7	1.330764996	1.380309252	1.431972781	1.458631101
8	1.386213537	1.445350002	1.507339770	1.539452350
9	1.443972435	1.513455499	1.586673442	1.624751820
10	1.504137953	1.584770156	1.670182570	1.714777647
11	1.566810367	1.659445190	1.758086916	1.809791712
12	1.632094133	1.737638942	1.850617806	1.910070408
13	1.700098055	1.819517217	1.948018743	2.015905444
14	1.770935474	1.905253630	2.050546046	2.127604690
15	1.844724452	1.995029979	2.158469522	2.245493077
16	1.921587971	2.089036628	2.272073181	2.369913537
17	2.001654136	2.187472909	2.391655980	2.501228008
18	2.085056392	2.290547548	2.517532610	2.639818478
19	2.171933742	2.398479108	2.650034327	2.786088103
20	2.262430981	2.511496448	2.789509818	2.940462378
21	2.356698938	2.629839213	2.936326124	3.103390373
22	2.454894727	2.753758338	3.090869604	3.275346040
23	2.557182008	2.883516584	3.253546951	3.456829594
24	2.663731258	3.019389094	3.424786265	3.648368964
25	2.774720060	3.161663972	3.605038173	3.850521334
26	2.890333396	3.310642903	3.794777025	4.063874759
27	3.010763955	3.466641783	3.994502131	4.289049878
28	3.136212453	3.629991396	4.204739085	4.526701718
29	3.266887971	3.801038111	4.426041143	4.777521602
30	3.403008304	3.980144619	4.658990676	5.042239158
31	3.544800316	4.167690700	4.904200712	5.321624441
32	3.692500329	4.364074032	5.162316539	5.616490175
33	3.846354510	4.569711028	5.434017409	5.927694116
34	4.006619281	4.785037726	5.720018326	6,256141548
35	4.173561751	5.010510708	6.021071922	6.602787913
36	4.347460157	5.246608071	6.337970444	6,968641597
37	4.528604331	5,493830441	6.671547836	7.354766857
38	4.717296178	5.752702032	7.022681932	7.762286920
39	4.913850185	6.023771761	7.392296771	8.192387251
40	5.118593943	6.307614410	7.781365022	8.646318998
41	5.331868691	6.604831843	8.190910549	9.125402637
42	5.554029886	6.916054286	8.622011105	9.631031806
43	5.785447798	7.241941660	9.075801163	10.16467737
44	6.026508123	7.583184985	9.553474908	10.72789168
45	6.277612628	7.940507837	10.05628938	11.32231312
46	6.539179821	8.314667892	10.58556777	11.94967084
47	6.811645647	8.706458526	11.14270291	12.61178980
48	7.095464215	9.116710498	11.72916096	13.31059610
49	7.391108558	9.546293716	12.34648522	14.04812253
50	7.699071414	9.996119074	12.99630023	14.82651455
60	11.58046551	15.84155119	21.70619412	25.42417572
70	17.41861769	25.10521755	36.25330709	43.59680822
80	26.20000395	39.78599954	60.54964161	74.75883222
90	39.40842031	63.05166471	101.1289560	128.1947744
100	59.27570064	99.92239654	168.9038197	219.8255336

	5.5	5.75	6	6.25
1	1.058201058	1.061007958	1.063829787	1.066666667
2	1.119789480	1.125737886	1.131733816	1.137777778
3	1.184962412	1.194416855	1.203972145	1.213629630
4	1.253928479	1.267285788	1.280821431	1.294538272
5	1.326908443	1.344600306	1.362575990	1.380840823
6	1.404135918	1.426631624	1.449548926	1.472896878
7	1.485858115	1.513667505	1.542073325	1.571090003
8	1.572336629	1.606013268	1.640503537	1.675829337
9	1.663848285	1.703992858	1.745216529	1.787551292
10	1.760686016	1.807949982	1.856613329	1.906721379
11	1.863159805	1.918249317	1.975120563	2.033836137
12	1.971597677	2.035277790	2.101192088	2.169425213
13	2.086346749	2.159445931	2.235310732	2.314053561
14	2.207774337	2.291189317	2.377990140	2.468323798
15	2.336269140	2.430970098	2.529776745	2.632878718
16	2.472242476	2.579278618	2.691251856	2.808403966
17	2.616129604	2.736635139	2.863033890	2.995630897
18	2.768391116	2.903591659	3.045780734	3.195339623
19	2.929514408	3.080733856	3.240192270	3.408362265
20	3.100015247	3.268683136	3.447013053	3.635586416
21	3.280439414	3.468098818	3.667035163	3.877958843
22	3.471364460	3.679680444	3.901101237	4.136489433
23	3.673401545	3.904170232	4.150107699	4.412255395
24	3.887197402	4.142355684	4.415008191	4.706405755
25	4.113436404	4.395072344	4.696817224	5.020166138
26	4.352842756	4.663206731	4.996614068	5.354843881
27	4.606182810	4.947699449	5.315546881	5.711833473
28	4.874267524	5.249548487	5.654837107	6.092622371
29	5.157955052	5.569812719	6.015784157	6.498797196
30	5.458153494	5.909615617	6.399770380	6.932050342
31	5.775823803	6.270149195	6.808266361	7.394187032
32	6.111982861	6.652678191	7.242836555	7.887132834
33	6.467706731	7.058544500	7.705145271	8.412941689
34	6.844134107	7.489171883	8.196963054	8.973804469
35	7.242469954	7.946070964	8.720173462	9.572058100
36	7.663989369	8.430844524	9.276780279	10.21019531
37	8.110041661	8.945193129	9.868915190	10.89087499
38	8.582054667	9.490921091	10.49884595	11.61693333
39	9.081539331	10.06994280	11.16898505	12.39139555
40	9.610094530	10.68428945	11.88189899	13.21748859
41	10.16941220	11.33611612	12.64031807	14.09865449
42	10.76128275	12.02770941	13.44714689	15.03856479
43	11.38760080	12.76149540	14.30547541	16.04113578
44	12.05037121	13.54004817	15.21859086	17.11054483
45	12.75171557	14.36609885	16.18999028	18.25124782
46	13.49387891	15.24254520	17.22339391	19.46799767
47	14.27923694	16.17246175	18.32275948	20.76596418
48	15.11030364	17.15911061	19.49229732	22.15025513
49	15.98973430	18.20595291	20.73648651	23.62693880
50	16.92035305	19.31666091	22.06009204	25.20206806
60	29.79143956	34.92355674	40.95706091	48.05332195
70	52.45337104	63.14004376	76.04142520	91.62129627
80	92.35391487	114.1540110	141.1795236	174.7020045
90	162.6062500	206.3817963	262.1157853	333.1[illegible]469
100	286.2[illegible]5504	373.[illegible]3886	486.[illegible]	635.[illegible]

	6.5	6.75	7	7.25
1	1.069518717	1.072386059	1.075268817	1.078167116
2	1.143870285	1.150011859	1.156203029	1.162444330
3	1.223390679	1.233256686	1.243229064	1.253309250
4	1.308439229	1.322527277	1.336805445	1.351276820
5	1.399400245	1.418259814	1.437425210	1.456902232
6	1.496684754	1.520922053	1.545618505	1.570784077
7	1.600732357	1.631015606	1.661955382	1.693567738
8	1.712013216	1.749078398	1.787048797	1.825949044
9	1.831030178	1.875687290	1.921557847	1.968678215
10	1.958321046	2.011460901	2.066191233	2.122564113
11	2.094461012	2.157062629	2.221711003	2.288478828
12	2.240065253	2.313203891	2.388936563	2.467362618
13	2.395791715	2.480647605	2.568748992	2.660229237
14	2.562344080	2.660211909	2.762095690	2.868171684
15	2.740474952	2.852774165	2.969995366	3.092368393
16	2.930989253	3.059275244	3.193543404	3.334089911
17	3.134747864	3.280724122	3.433917639	3.594706104
18	3.352671513	3.518202812	3.692384558	3.875693913
19	3.585744933	3.772871648	3.970305976	4.178645728
20	3.835021319	4.045974958	4.269146211	4.505278413
21	4.101627079	4.338847139	4.590479797	4.857443033
22	4.386766930	4.652919184	4.935999782	5.237135345
23	4.691729336	4.989725667	5.307526647	5.646507111
24	5.017892338	5.350912243	5.707017900	6.087878287
25	5.366729774	5.738243693	6.136578387	6.563750174
26	5.739817940	6.153612539	6.598471384	7.076819595
27	6.138842716	6.599048299	7.095130520	7.629994172
28	6.565607183	7.076727399	7.629172602	8.226408811
29	7.022039768	7.588983805	8.203411401	8.869443462
30	7.510202961	8.138320435	8.820872474	9.562742277
31	8.032302632	8.727421378	9.484809111	10.31023426
32	8.590698002	9.359165016	10.19871947	11.11615554
33	9.187912301	10.03663809	10.96636503	11.98507336
34	9.826644173	10.76315076	11.79179035	12.92191197
35	10.50977986	11.54225283	12.67934446	13.93198057
36	11.24040627	12.37775102	13.63370372	15.02100330
37	12.02182489	13.27372764	14.65989648	16.19515181
38	12.85756673	14.23456047	15.76332955	17.46108012
39	13.75140826	15.26494421	16.94981672	18.82596239
40	14.70738852	16.36991336	18.22560937	20.29753358
41	15.72982729	17.55486687	19.59742943	21.88413324
42	16.82334470	18.82559450	21.07250477	23.59475282
43	17.99288203	20.18830509	22.65860728	25.43908659
44	19.24372409	21.64965694	24.36409384	27.42758662
45	20.58152310	23.21679028	26.19795037	29.57152197
46	22.01232417	24.89736223	28.16983911	31.88304255
47	23.54259269	26.69958416	30.29014958	34.37524804
48	25.17924352	28.63226184	32.57005331	37.06226203
49	26.92967221	30.70483843	35.02156270	39.95931216
50	28.80178846	32.92744068	37.65759430	43.08281635
60	56.40314851	66.23225950	77.80779120	91.44603986
70	110.4554728	133.2236004	160.7657760	194.1000825
80	216.3072770	267.9740633	332.1728370	411.9898693
90	423.5990929	539.0193509	686.3326036	874.4749115
100	829.5430187	1084.216349	1418.094408	1856.129065

	7.5	7.75	8	8.25
1	1.081081081	1.084010840	1.086956522	1.089918256
2	1.168736304	1.175079501	1.181474480	1.187921805
3	1.263498707	1.273798918	1.284211391	1.294737662
4	1.365944548	1.380811835	1.395881947	1.411158215
5	1.476696809	1.496814997	1.517262986	1.538047101
6	1.596428982	1.622563682	1.649198898	1.676345614
7	1.725869170	1.758876621	1.792607498	1.827079688
8	1.865804508	1.906641323	1.948486411	1.991367507
9	2.017085955	2.066819862	2.117920012	2.170427801
10	2.180633465	2.240455135	2.302086969	2.365588884
11	2.357441583	2.428677654	2.502268445	2.578298511
12	2.548585496	2.632712904	2.719857005	2.810134617
13	2.755227563	2.853889326	2.956366310	3.062817021
14	2.978624392	3.093646966	3.213441641	3.338220187
15	3.220134478	3.353546847	3.492871349	3.638387125
16	3.481226463	3.635281135	3.796599293	3.965544550
17	3.763488068	3.940684157	4.126738361	4.322119400
18	4.068635749	4.271744344	4.485585175	4.710756840
19	4.398525134	4.630617175	4.875636060	5.134339880
20	4.755162307	5.019639214	5.299604413	5.596010768
21	5.140716008	5.441343321	5.760439580	6.099194298
22	5.557530819	5.898475145	6.261347369	6.647623213
23	6.008141426	6.394010997	6.805812358	7.245365900
24	6.495288028	6.931177233	7.397622128	7.896856566
25	7.021933003	7.513471255	8.040893618	8.606928138
26	7.591278923	8.144684287	8.740101758	9.380848106
27	8.206788024	8.828926057	9.500110607	10.22435761
28	8.872203270	9.570651552	10.32620718	11.14371402
29	9.591571102	10.37469003	11.22413824	12.14573735
30	10.36926606	11.24627645	12.20015026	13.23786087
31	11.21001736	12.19108559	13.26103289	14.42818623
32	12.11893768	13.21526893	14.41416619	15.72554358
33	13.10155425	14.32549477	15.66757194	17.13955703
34	14.16384244	15.52899163	17.02996950	18.68071611
35	15.31226209	16.83359526	18.51083642	20.36045353
36	16.55379686	18.24779974	20.12047437	22.19123000
37	17.89599660	19.78081272	21.87008083	24.18662671
38	19.34702335	21.44261542	23.77182699	26.36144600
39	20.91570092	23.24402755	25.83894238	28.73182126
40	22.61156857	25.19677784	28.08580694	31.31533652
41	24.44493899	27.31358031	30.52805102	34.13115697
42	26.42696107	29.60821714	33.18266415	37.20017108
43	28.56968764	32.09562833	36.06811321	40.54514559
44	30.88614880	34.79200903	39.20447088	44.19089438
45	33.39043114	37.71491494	42.61355530	48.16446254
46	36.09776340	40.88337663	46.31908185	52.49532702
47	39.02460908	44.31802345	50.31682810	57.21561528
48	42.18876657	48.04121783	54.72181315	62.36034363
49	45.60947737	52.07720090	59.48349256	67.96767698
50	49.30754810	56.45225030	64.65597017	74.07921197
60	107.5216786	126.4787341	148.8436664	175.2409604
70	234.4653704	283.3699293	342.6510649	414.5480679
80	511.2830330	634.8776133	788.8125514	980.6503012
90	1114.920892	1422.114809	1815.915096	2319.815452
100	2431.233607	3186.856564	4180.394178	5487.729645

	8.5	8.75	9	9.5
1	1.092896175	1.095890411	1.098901099	1.104972376
2	1.194422049	1.200975793	1.207583625	1.220963951
3	1.305379289	1.316137855	1.327014973	1.349131438
4	1.426644031	1.442342855	1.458258212	1.490752970
5	1.559173805	1.580649704	1.602481551	1.647240851
6	1.704015087	1.732218854	1.760968738	1.820155636
7	1.862311570	1.898322032	1.935130481	2.011221697
8	2.035313192	2.080352911	2.126517012	2.222344417
9	2.224386002	2.279838807	2.336831882	2.455629190
10	2.431022953	2.498453487	2.567947123	2.713402420
11	2.656855686	2.738031219	2.821919915	2.998234718
12	2.903667417	3.000582157	3.101010895	3.312966539
13	3.173407013	3.288309214	3.407704281	3.660736507
14	3.468204386	3.603626535	3.744729979	4.045012715
15	3.790387307	3.949179765	4.115087889	4.469627310
16	4.142499789	4.327868235	4.522074603	4.938814707
17	4.527322173	4.742869299	4.969312751	5.457253820
18	4.947893086	5.197664985	5.460783243	6.030114718
19	5.407533427	5.696071217	6.000860706	6.663110185
20	5.909872598	6.242269827	6.594352424	7.362552691
21	6.458877156	6.840843646	7.246541126	8.135417338
22	7.058882138	7.496814954	7.963232006	8.989411424
23	7.714625287	8.215687621	8.750804402	9.933051297
24	8.431284467	9.003493283	9.616268574	10.97574729
25	9.214518543	9.866841954	10.56732810	12.12789756
26	10.07051207	10.81297748	11.61244847	13.40099178
27	11.00602412	11.84983834	12.76093238	14.80772572
28	12.02844166	12.98612421	14.02300261	16.36212787
29	13.14583788	14.23136899	15.40989298	18.07969930
30	14.36703593	15.59602082	16.93394833	19.97756829
31	15.70167862	17.09152966	18.60873443	22.07466109
32	17.16030450	18.73044346	20.44915872	24.39189071
33	18.75443115	20.52651338	22.47160299	26.95236542
34	20.49664606	22.49480919	24.69406921	29.78161925
35	22.40070608	24.65184569	27.13633980	32.90786658
36	24.48164599	27.01572130	29.82015362	36.36228351
37	26.75589725	29.60626992	32.76939958	40.17931880
38	29.24141776	32.44522731	36.01032921	44.39703734
39	31.95783362	35.55641349	39.57179034	49.05749983
40	34.92659412	38.96593259	43.48548390	54.20718213
41	38.17114112	42.70239188	47.78624604	59.89743882
42	41.71709412	46.79714178	52.51235828	66.18501527
43	45.59245259	51.28453894	57.70588822	73.13261356
44	49.82781704	56.20223446	63.41306398	80.80951774
45	54.45663064	61.59148982	69.68468570	89.29228480
46	59.51544332	67.49752309	76.57657769	98.66550806
47	65.04420035	73.96988831	84.15008537	109.0226608
48	71.08655776	81.06289130	92.47262129	120.4670286
49	77.69022706	88.83604526	101.6182652	133.1127387
50	84.90735198	97.35457015	111.6684232	147.0858992
60	206.4117215	243.2358653	286.7586061	399.1032347
70	501.7916328	607.7134957	736.3809375	1082.927683
80	1219.866977	1518.343903	1890.987310	2938.418594
90	2965.524621	3793.511618	4855.955421	7973.112124
100	7209.258420	9477.912329	12469.83675	21634.26173

	10	10.5	11	11.5
1	1.111111111	1.117318436	1.123595506	1.129943503
2	1.234567901	1.248400487	1.262466860	1.276772320
3	1.371742112	1.394860879	1.418502090	1.442680587
4	1.524157903	1.558503776	1.593822573	1.630147556
5	1.693508781	1.741345001	1.790811880	1.841974640
6	1.881676423	1.945636872	2.012148180	2.081327276
7	2.090751581	2.173895947	2.260840651	2.351782233
8	2.323057313	2.428934019	2.540270395	2.657381054
9	2.581174792	2.713892758	2.854236399	3.002690457
10	2.867971991	3.032282411	3.207007190	3.392870573
11	3.186635545	3.388025041	3.603378865	3.833752060
12	3.540706161	3.785502839	4.048740297	4.331923231
13	3.934117957	4.229612110	4.549146402	4.894828510
14	4.371242175	4.725823587	5.111400451	5.530879672
15	4.856935750	5.280249818	5.743146574	6.249581551
16	5.396595277	5.899720467	6.452973679	7.061674069
17	5.996216975	6.591866444	7.250532224	7.979292733
18	6.662463305	7.365213903	8.146665420	9.016149981
19	7.402737006	8.229289278	9.153556652	10.18774009
20	8.225263340	9.194736623	10.28489511	11.51157072
21	9.139181489	10.27344874	11.55606193	13.00742455
22	10.15464610	11.47871368	12.98433924	14.69765486
23	11.28294011	12.82537841	14.58914522	16.60751961
24	12.53660012	14.33003174	16.39229800	18.76555888
25	13.92955569	16.01120865	18.41831236	21.20402134
26	15.47728410	17.88961860	20.69473298	23.95934614
27	17.19698233	19.98840068	23.25250897	27.07270751
28	19.10775815	22.33340858	26.12641457	30.59062995
29	21.23084239	24.95352914	29.35552199	34.56568356
30	23.58982488	27.88103814	32.98373258	39.05726956
31	26.21091653	31.15199792	37.06037368	44.13250798
32	29.12324059	34.80670159	41.64086930	49.86724065
33	32.35915621	38.89016937	46.78749360	56.34716458
34	35.95461801	43.45270321	52.57021753	63.66911252
35	39.94957557	48.55050638	59.06766014	71.94250002
36	44.38841730	54.24637584	66.36815747	81.29096047
37	49.32046366	60.61047580	74.57096344	91.85419262
38	54.80051518	67.72120201	83.78759938	103.7900482
39	60.88946131	75.66614750	94.14337008	117.2768906
40	67.65495701	84.54318157	105.7790675	132.5162605
41	75.17217446	94.46165538	118.8528848	149.7358876
42	83.52463829	105.5437490	133.5425672	169.1930934
43	92.80515365	117.9259766	150.0478284	191.1786366
44	103.1168374	131.7608677	168.5930656	216.0210583
45	114.5742638	147.2188466	189.4304108	244.0915913
46	127.3047375	164.4903314	212.8431582	275.8097076
47	141.4497084	183.7880797	239.1496159	311.6493872
48	157.1663426	205.3498098	268.7074336	352.1462002
49	174.6292696	229.4411282	301.9184647	397.9053109
50	194.0325217	256.3588025	339.2342300	449.6105208
60	556.4798377	777.3522878	1087.926615	1525.470305
70	1595.968588	2357.151670	3488.988475	5175.723309
80	4577.193208	7147.549549	11189.21112	17560.55931
90	13127.26192	21673.34878	35883.88052	59580.70192
100	37648.61950	65719.84561	115079.8628	202149.6204

	12	12.5	13	13.5
1	1.136363636	1.142857143	1.149425287	1.156069364
2	1.291322314	1.306122449	1.321178491	1.336496375
3	1.467411721	1.492711370	1.518595967	1.545082514
4	1.667513319	1.705955852	1.745512606	1.786222560
5	1.894901499	1.949663831	2.006336328	2.064997179
6	2.153297157	2.228187235	2.306133711	2.387279976
7	2.446928588	2.546499697	2.650728403	2.759861243
8	2.780600668	2.910285368	3.046814256	3.190591033
9	3.159773487	3.326040421	3.502085352	3.688544547
10	3.590651689	3.801189052	4.025385462	4.264213349
11	4.080286011	4.344216060	4.626879842	4.929726415
12	4.636688648	4.964818354	5.318252692	5.699105682
13	5.268964373	5.674078119	6.112934128	6.588561482
14	5.987459515	6.484660707	7.026361067	7.616834083
15	6.803931267	7.411040808	8.076277089	8.805588535
16	7.731740076	8.469760923	9.283077113	10.17987114
17	8.786068268	9.679726770	10.67020358	11.76863716
18	9.984168487	11.06254488	12.26460181	13.60536087
19	11.34564601	12.64290843	14.09724347	15.72874089
20	12.89277955	14.44903821	16.20372812	18.18351548
21	14.65088586	16.51318653	18.62497485	21.02140518
22	16.64873393	18.87221317	21.40801707	24.30220252
23	18.91901583	21.56824363	24.60691617	28.09503182
24	21.49888162	24.64942129	28.28381169	32.47980557
25	24.43054730	28.17076718	32.51012838	37.54890818
26	27.76198557	32.19516250	37.36796366	43.40914240
27	31.54771087	36.79447142	42.95168237	50.18397965
28	35.84967144	42.05082449	49.36974985	58.01616145
29	40.73826301	48.05808513	56.74683890	67.07070688
30	46.29348069	54.92352586	65.22625161	77.53838945
31	52.60622805	62.76974384	74.97270300	89.63975659
32	59.77980461	71.73685010	86.17552069	103.6297764
33	67.93159614	81.98497154	99.05232264	119.8032097
34	77.19499562	93.69711034	113.8532444	138.5008205
35	87.72158593	107.0824118	130.8657982	160.1165555
36	99.68362038	122.3798992	150.4204577	185.1058445
37	113.2768413	139.8627420	172.8970778	213.9951959
38	128.7236833	159.8431337	198.7322733	247.3932901
39	146.2769129	182.6778670	228.4279004	286.0038036
40	166.2237646	208.7747052	262.5608050	330.6402354
41	188.8906416	238.5996631	301.7940287	382.2430466
42	214.6484564	272.6853292	346.8896882	441.8994759
43	243.9187005	311.6403763	398.7237796	510.8664461
44	277.1803414	356.1604300	458.3031949	590.5970475
45	314.9776607	407.0404915	526.7852815	682.7711532
46	357.9291599	465.1891331	605.5003235	789.3308130
47	406.7376817	531.6447235	695.9773834	912.5211711
48	462.2019110	607.5939698	799.9740039	1054.937770
49	525.2294444	694.3931083	919.5103493	1219.581237
50	596.8516413	793.5921238	1056.908447	1409.920505
60	2143.086354	3016.593693	4254.463900	6012.201839
70	7695.076638	11466.64292	17125.85713	25637.31134
80	27630.33993	43586.87753	68938.17633	109322.9652
90	99210.92675	165681.9617	277502.7328	466176.4477
100	356231.8817	629788.4589	1117055.166	1987875.831

Таблица П.8. Множители наращения (непрерывные проценты)

Число периодов	Ставка непрерывных процентов			
	.25 (1/4)	.333 (1/3)	.417 (5/12)	.5 (1/2)
1	1.002503128	1.003335551	1.004178707	1.005012521
2	1.005012521	1.006682227	1.008374875	1.010050167
3	1.007528195	1.010040067	1.012588577	1.015113065
4	1.010050167	1.013409106	1.016819888	1.020201340
5	1.012578452	1.016789384	1.021068880	1.025315121
6	1.015113065	1.020180936	1.025335627	1.030454534
7	1.017654022	1.023583801	1.029620204	1.035619709
8	1.020201340	1.026998017	1.033922684	1.040810774
9	1.022755034	1.030423621	1.038243144	1.046027860
10	1.025315121	1.033860651	1.042581657	1.051271096
11	1.027881615	1.037309145	1.046938300	1.056540615
12	1.030454534	1.040769143	1.051313148	1.061836547
13	1.033033893	1.044240681	1.055706277	1.067159024
14	1.035619709	1.047723798	1.060117764	1.072508181
15	1.038211997	1.051218534	1.064547685	1.077884151
16	1.040810774	1.054724927	1.068996117	1.083287068
17	1.043416056	1.058243015	1.073463138	1.088717067
18	1.046027860	1.061772838	1.077948826	1.094174284
19	1.048646201	1.065314435	1.082453258	1.099658855
20	1.051271096	1.068867846	1.086976512	1.105170918
21	1.053902562	1.072433108	1.091518668	1.110710610
22	1.056540615	1.076010263	1.096079804	1.116278070
23	1.059185271	1.079599350	1.100660000	1.121873438
24	1.061836547	1.083200408	1.105259335	1.127496852
25	1.064494459	1.086813478	1.109877890	1.133148453
26	1.067159024	1.090438599	1.114515744	1.138828383
27	1.069830260	1.094075812	1.119172978	1.144536784
28	1.072508181	1.097725158	1.123849673	1.150273799
29	1.075192806	1.101386676	1.128545911	1.156039570
30	1.077884151	1.105060407	1.133261774	1.161834243
31	1.080582232	1.108746391	1.137997342	1.167657961
32	1.083287068	1.112444671	1.142752699	1.173510871
33	1.085998673	1.116155287	1.147527927	1.179393119
34	1.088717067	1.119878279	1.152323110	1.185304851
35	1.091442264	1.123613690	1.157138330	1.191246217
36	1.094174284	1.127361560	1.161973671	1.197217363
37	1.096913142	1.131121932	1.166829218	1.203218440
38	1.099658855	1.134894846	1.171705055	1.209249598
39	1.102411442	1.138680345	1.176601267	1.215310986
40	1.105170918	1.142478471	1.181517938	1.221402758
41	1.107937302	1.146289266	1.186455155	1.227525065
42	1.110710610	1.150112772	1.191413003	1.233678060
43	1.113490861	1.153949031	1.196391568	1.239861897
44	1.116278070	1.157798087	1.201390937	1.246076731
45	1.119072257	1.161659981	1.206411198	1.252322716
46	1.121873438	1.165534756	1.211452436	1.258600010
47	1.124681630	1.169422456	1.216514740	1.264908769
48	1.127496852	1.173323124	1.221598198	1.271249150
49	1.130319120	1.177236803	1.226702899	1.277621313
50	1.133148453	1.181163536	1.231828930	1.284025417
60	1.161834243	1.221158502	1.284282247	1.349858808
70	1.191246217	1.262507724	1.338969114	1.419067549
80	1.221402758	1.305257057	1.395984638	1.491824698
90	1.252322716	1.349453911	1.455427978	1.568312185
100	1.284025417	1.395117298	1.517402513	1.648721271

	.583 (7/12)	.667 (2/3)	.75 (3/4)	.833 (5/6)
1	1.005847028	1.006692294	1.007528195	1.008364791
2	1.011728243	1.013429375	1.015113065	1.016799552
3	1.017643846	1.020211542	1.022755034	1.025304867
4	1.023594037	1.027039098	1.030454534	1.033881328
5	1.029579020	1.033912345	1.038211997	1.042529530
6	1.035598997	1.040831591	1.046027860	1.051250071
7	1.041654172	1.047797142	1.053902562	1.060043558
8	1.047744753	1.054809308	1.061836547	1.068910601
9	1.053870945	1.061868402	1.069830260	1.077851815
10	1.060032958	1.068974738	1.077884151	1.086867820
11	1.066231000	1.076128631	1.085998673	1.095959242
12	1.072465282	1.083330400	1.094174284	1.105126712
13	1.078736016	1.090580366	1.102411442	1.114370866
14	1.085043415	1.097878850	1.110710610	1.123692345
15	1.091387694	1.105226178	1.119072257	1.133091797
16	1.097769068	1.112622677	1.127496852	1.142569873
17	1.104187754	1.120068675	1.135984868	1.152127231
18	1.110643970	1.127564503	1.144536784	1.161764535
19	1.117137936	1.135110497	1.153153081	1.171482452
20	1.123669872	1.142706990	1.161834243	1.181281658
21	1.130240001	1.150354321	1.170580758	1.191162832
22	1.136848545	1.158052830	1.179393119	1.201126660
23	1.143495730	1.165802860	1.188271821	1.211173834
24	1.150181781	1.173604756	1.197217363	1.221305050
25	1.156906925	1.181458864	1.206230249	1.231521011
26	1.163671392	1.189365534	1.215310986	1.241822427
27	1.170475410	1.197325118	1.224460085	1.252210012
28	1.177319212	1.205337969	1.233678060	1.262684487
29	1.184203030	1.213404445	1.242965430	1.273246579
30	1.191127098	1.221524905	1.252322716	1.283897021
31	1.198091651	1.229699708	1.261750446	1.294636551
32	1.205096926	1.237929220	1.271249150	1.305465915
33	1.212143161	1.246213807	1.280819362	1.316385864
34	1.219230595	1.254553836	1.290461621	1.327397157
35	1.226359470	1.262949679	1.300176468	1.338500557
36	1.233530027	1.271401709	1.309964451	1.349696834
37	1.240742511	1.279910303	1.319826119	1.360986766
38	1.247997167	1.288475839	1.329762028	1.372371136
39	1.255294241	1.297098699	1.339772737	1.383850734
40	1.262633981	1.305779264	1.349858808	1.395426356
41	1.270016637	1.314517923	1.360020809	1.407098806
42	1.277442459	1.323315063	1.370259311	1.418868893
43	1.284911700	1.332171077	1.380574891	1.430737435
44	1.292424614	1.341086357	1.390968128	1.442705254
45	1.299981456	1.350061302	1.401439608	1.454773182
46	1.307582484	1.359096309	1.411989920	1.466942056
47	1.315227954	1.368191781	1.422619656	1.479212720
48	1.322918129	1.377348122	1.433329415	1.491586025
49	1.330653267	1.386565741	1.444119799	1.504062830
50	1.338433633	1.395845047	1.454991415	1.516644001
60	1.418783763	1.492123092	1.568312185	1.648391559
70	1.503957549	1.595041891	1.690458848	1.791583741
80	1.594244570	1.705059487	1.822118800	1.947214715
90	1.689951787	1.822665518	1.964032976	2.116365012
100	1.791404591	1.948383394	2.117000017	2.300209027

	1	1.25	1.5	1.75
1	1.010050167	1.012578452	1.015113065	1.017654022
2	1.020201340	1.025315121	1.030454534	1.035619709
3	1.030454534	1.038211997	1.046027860	1.053902562
4	1.040810774	1.051271096	1.061836547	1.072508181
5	1.051271096	1.064494459	1.077884151	1.091442264
6	1.061836547	1.077884151	1.094174284	1.110710610
7	1.072508181	1.091442264	1.110710610	1.130319120
8	1.083287068	1.105170918	1.127496852	1.150273799
9	1.094174284	1.119072257	1.144536784	1.170580758
10	1.105170918	1.133148453	1.161834243	1.191246217
11	1.116278070	1.147401706	1.179393119	1.212276504
12	1.127496852	1.161834243	1.197217363	1.233678060
13	1.138828383	1.176448318	1.215310986	1.255457440
14	1.150273799	1.191246217	1.233678060	1.277621313
15	1.161834243	1.206230249	1.252322716	1.300176468
16	1.173510871	1.221402758	1.271249150	1.323129812
17	1.185304851	1.236766114	1.290461621	1.346488375
18	1.197217363	1.252322716	1.309964451	1.370259311
19	1.209249598	1.268074997	1.329762028	1.394449899
20	1.221402758	1.284025417	1.349858808	1.419067549
21	1.233678060	1.300176468	1.370259311	1.444119799
22	1.246076731	1.316530675	1.390968128	1.469614321
23	1.258600010	1.333090592	1.411989920	1.495558925
24	1.271249150	1.349858808	1.433329415	1.521961556
25	1.284025417	1.366837941	1.454991415	1.548830299
26	1.296930087	1.384030646	1.476980794	1.576173383
27	1.309964451	1.401439608	1.499302500	1.603999183
28	1.323129812	1.419067549	1.521961556	1.632316220
29	1.336427488	1.436917221	1.544963059	1.661133167
30	1.349858808	1.454991415	1.568312185	1.690458848
31	1.363425114	1.473292954	1.592014189	1.720302246
32	1.377127764	1.491824698	1.616074402	1.750672500
33	1.390968128	1.510589542	1.640498239	1.781578911
34	1.404947591	1.529590420	1.665291195	1.813030945
35	1.419067549	1.548830299	1.690458848	1.845038233
36	1.433329415	1.568312185	1.716006862	1.877610579
37	1.447734615	1.588039124	1.741940985	1.910757958
38	1.462284589	1.608014197	1.768267051	1.944490521
39	1.476980794	1.628240526	1.794990986	1.978818600
40	1.491824698	1.648721271	1.822118800	2.013752707
41	1.506817785	1.669459631	1.849656600	2.049303542
42	1.521961556	1.690458848	1.877610579	2.085481993
43	1.537257524	1.711722203	1.905987029	2.122299138
44	1.552707219	1.733253018	1.934792334	2.159766254
45	1.568312185	1.755054657	1.964032976	2.197894815
46	1.584073985	1.777130527	1.993715533	2.236696499
47	1.599994193	1.799484077	2.023846685	2.276183188
48	1.616074402	1.822118800	2.054433211	2.316366977
49	1.632316220	1.845038233	2.085481993	2.357260171
50	1.648721271	1.868245957	2.117000017	2.398875294
60	1.822118800	2.117000017	2.459603111	2.857651118
70	2.013752707	2.398875294	2.857651118	3.404166083
80	2.225540928	2.718281828	3.320116923	4.055199967
90	2.459603111	3.080216849	3.857425531	4.830741618
100	2.718281828	3.490342957	4.481689070	5.754602676

	2	2.25	2.5	2.75
1	1.020201340	1.022755034	1.025315121	1.027881615
2	1.040810774	1.046027860	1.051271096	1.056540615
3	1.061836547	1.069830260	1.077884151	1.085998673
4	1.083287068	1.094174284	1.105170918	1.116278070
5	1.105170918	1.119072257	1.133148453	1.147401706
6	1.127496852	1.144536784	1.161834243	1.179393119
7	1.150273799	1.170580758	1.191246217	1.212276504
8	1.173510871	1.197217363	1.221402758	1.246076731
9	1.197217363	1.224460085	1.252322716	1.280819362
10	1.221402758	1.252322716	1.284025417	1.316530675
11	1.246076731	1.280819362	1.316530675	1.353237676
12	1.271249150	1.309964451	1.349858808	1.390968128
13	1.296930087	1.339772737	1.384030646	1.429750566
14	1.323129812	1.370259311	1.419067549	1.469614321
15	1.349858808	1.401439608	1.454991415	1.510589542
16	1.377127764	1.433329415	1.491824698	1.552707219
17	1.404947591	1.465944874	1.529590420	1.595999204
18	1.433329415	1.499302500	1.568312185	1.640498239
19	1.462284589	1.533419180	1.608014197	1.686237980
20	1.491824698	1.568312185	1.648721271	1.733253018
21	1.521961556	1.603999183	1.690458848	1.781578911
22	1.552707219	1.640498239	1.733253018	1.831252209
23	1.584073985	1.677827833	1.777130527	1.882310478
24	1.616074402	1.716006862	1.822118800	1.934792334
25	1.648721271	1.755054657	1.868245957	1.988737470
26	1.682027650	1.794990986	1.915540829	2.044186682
27	1.716006862	1.835836067	1.964032976	2.101181909
28	1.750672500	1.877610579	2.013752707	2.159766254
29	1.786038431	1.920335672	2.064731100	2.219984025
30	1.822118800	1.964032976	2.117000017	2.281880765
31	1.858928042	2.008724613	2.170592127	2.345503287
32	1.896480879	2.054433211	2.225540928	2.410899706
33	1.934792334	2.101181909	2.281880765	2.478119484
34	1.973877732	2.148994375	2.339646852	2.547213458
35	2.013752707	2.197894815	2.398875294	2.618233883
36	2.054433211	2.247907987	2.459603111	2.691234472
37	2.095935514	2.299059210	2.521868260	2.766270436
38	2.138276220	2.351374381	2.585709659	2.843398524
39	2.181472265	2.404879985	2.651167211	2.922677067
40	2.225540928	2.459603111	2.718281828	3.004166024
41	2.270499838	2.515571464	2.787095461	3.087927025
42	2.316366977	2.572813379	2.857651118	3.174023418
43	2.363160694	2.631357835	2.929992901	3.262520317
44	2.410899706	2.691234472	3.004166024	3.353484653
45	2.459603111	2.752473605	3.080216849	3.446985221
46	2.509290390	2.815106236	3.158192910	3.543092736
47	2.559981418	2.879164074	3.238142944	3.641879884
48	2.611696473	2.944679551	3.320116923	3.743421377
49	2.664456242	3.011685835	3.404166083	3.847794011
50	2.718281828	3.080216849	3.490342957	3.955076723
60	3.320116923	3.857425531	4.481689070	5.206979827
70	4.055199967	4.830741618	5.754602676	6.855148666
80	4.953032424	6.049647464	7.389056099	9.025013499
90	6.049647464	7.576110945	9.487735836	11.88170711
100	7.389056099	9.487735836	12.18249396	15.64263188

	3	3.25	3.5	3.75
1	1.030454534	1.033033893	1.035619709	1.038211997
2	1.061836547	1.067159024	1.072508181	1.077884151
3	1.094174284	1.102411442	1.110710610	1.119072257
4	1.127496852	1.138828383	1.150273799	1.161834243
5	1.161834243	1.176448318	1.191246217	1.206230249
6	1.197217363	1.215310986	1.233678060	1.252322716
7	1.233678060	1.255457440	1.277621313	1.300176468
8	1.271249150	1.296930087	1.323129812	1.349858808
9	1.309964451	1.339772737	1.370259311	1.401439608
10	1.349858808	1.384030646	1.419067549	1.454991415
11	1.390968128	1.429750566	1.469614321	1.510589542
12	1.433329415	1.476980794	1.521961556	1.568312185
13	1.476980794	1.525771220	1.576173383	1.628240526
14	1.521961556	1.576173383	1.632316220	1.690458848
15	1.568312185	1.628240526	1.690458848	1.755054657
16	1.616074402	1.682027650	1.750672500	1.822118800
17	1.665291195	1.737591571	1.813030945	1.891745599
18	1.716006862	1.794990986	1.877610579	1.964032976
19	1.768267051	1.854286526	1.944490521	2.039082598
20	1.822118800	1.915540829	2.013752707	2.117000017
21	1.877610579	1.978818600	2.085481993	2.197894815
22	1.934792334	2.044186682	2.159766254	2.281880765
23	1.993715533	2.111714127	2.236696499	2.369075986
24	2.054433211	2.181472265	2.316366977	2.459603111
25	2.117000017	2.253534787	2.398875294	2.553589458
26	2.181472265	2.327977815	2.484322533	2.651167211
27	2.247907987	2.404879985	2.572813379	2.752473605
28	2.316366977	2.484322533	2.664456242	2.857651118
29	2.386910854	2.566389378	2.759363397	2.966847674
30	2.459603111	2.651167211	2.857651118	3.080216849
31	2.534509178	2.738745585	2.959439819	3.197918086
32	2.611696473	2.829217014	3.064854203	3.320116923
33	2.691234472	2.922677067	3.174023418	3.446985221
34	2.773194764	3.019224469	3.287081207	3.578701410
35	2.857651118	3.118961207	3.404166083	3.715450738
36	2.944679551	3.221992639	3.525421487	3.857425531
37	3.034358394	3.328427599	3.650995974	4.004825464
38	3.126768365	3.438378521	3.781043388	4.157857843
39	3.221992639	3.551961549	3.915723052	4.316737895
40	3.320116923	3.669296668	4.055199967	4.481689070
41	3.421229536	3.790507822	4.199645009	4.652943360
42	3.525421487	3.915723052	4.349235141	4.830741618
43	3.632786556	4.045074629	4.504153630	5.015333903
44	3.743421377	4.178699192	4.664590271	5.206979827
45	3.857425531	4.316737895	4.830741618	5.405948925
46	3.974901627	4.459336553	5.002811228	5.612521030
47	4.095955404	4.606645800	5.181009907	5.826986667
48	4.220695817	4.758821245	5.365555971	6.049647464
49	4.349235141	4.916023638	5.556675512	6.280816576
50	4.481689070	5.078419037	5.754602676	6.520819120
60	6.049647464	7.028687581	8.166169913	9.487735836
70	8.166169913	9.727919013	11.58834672	13.80457419
80	11.02317638	13.46373804	16.44464677	20.08553692
90	14.87973172	18.63422605	23.33606458	29.22128378
100	20.08553692	25.79033992	33.11515196	42.52108200

	4	4.25	4.5	4.75
1	1.040810774	1.043416056	1.046027860	1.048646201
2	1.083287068	1.088717067	1.094174284	1.099658855
3	1.127496852	1.135984868	1.144536784	1.153153081
4	1.173510871	1.185304851	1.197217363	1.209249598
5	1.221402758	1.236766114	1.252322716	1.268074997
6	1.271249150	1.290461621	1.309964451	1.329762028
7	1.323129812	1.346488375	1.370259311	1.394449899
8	1.377127764	1.404947591	1.433329415	1.462284589
9	1.433329415	1.465944874	1.499302500	1.533419180
10	1.491824698	1.529590420	1.568312185	1.608014197
11	1.552707219	1.595999204	1.640498239	1.686237980
12	1.616074402	1.665291195	1.716006862	1.768267051
13	1.682027650	1.737591571	1.794990986	1.854286526
14	1.750672500	1.813030945	1.877610579	1.944490521
15	1.822118800	1.891745599	1.964032976	2.039082598
16	1.896480879	1.973877732	2.054433211	2.138276220
17	1.973877732	2.059575719	2.148994375	2.242295236
18	2.054433211	2.148994375	2.247907987	2.351374381
19	2.138276220	2.242295236	2.351374381	2.465759812
20	2.225540928	2.339646852	2.459603111	2.585709659
21	2.316366977	2.441225092	2.572813379	2.711494611
22	2.410899706	2.547213458	2.691234472	2.843398524
23	2.509290390	2.657803421	2.815106236	2.981719060
24	2.611696473	2.773194764	2.944679551	3.126768365
25	2.718281828	2.893595944	3.080216849	3.278873768
26	2.829217014	3.019224469	3.221992639	3.438378521
27	2.944679551	3.150307289	3.370294064	3.605642574
28	3.064854203	3.287081207	3.525421487	3.781043388
29	3.189933276	3.429793310	3.687689094	3.964976785
30	3.320116923	3.578701410	3.857425531	4.157857843
31	3.455613465	3.734074512	4.034974573	4.360121832
32	3.596639726	3.896193302	4.220695817	4.572225195
33	3.743421377	4.065350650	4.414965413	4.794646582
34	3.896193302	4.241852143	4.618176822	5.027887923
35	4.055199967	4.426016635	4.830741618	5.272475571
36	4.220695817	4.618176822	5.053090317	5.528961478
37	4.392945681	4.818679848	5.285673250	5.797924450
38	4.572225195	5.027887923	5.528961478	6.079971449
39	4.758821245	5.246178989	5.783447742	6.375738962
40	4.953032424	5.473947392	6.049647464	6.685894442
41	5.155169512	5.711604600	6.328099790	7.011137808
42	5.365555971	5.959579948	6.619368681	7.352203028
43	5.584528464	6.218321407	6.924044055	7.709859775
44	5.812437394	6.488296399	7.242742985	8.084915164
45	6.049647464	6.769992642	7.576110945	8.478215573
46	6.296538261	7.063919024	7.924823118	8.890648553
47	6.553504862	7.370606530	8.289585766	9.323144831
48	6.820958469	7.690609199	8.671137658	9.776680410
49	7.099327065	8.024505121	9.070251568	10.25227877
50	7.389056099	8.372897488	9.487735836	10.75101319
60	11.02317638	12.80710378	14.87973172	17.28778184
70	16.44464677	19.58962325	23.33606458	27.79899864
80	24.53253020	29.96410005	36.59823444	44.70118449
90	36.59823444	45.83280037	57.39745705	71.88013931
100	54.59815003	70.10541235	90.01713130	115.5842845

	5	5.25	5.5	5.75
1	1.051271096	1.053902562	1.056540615	1.059185271
2	1.105170918	1.110710610	1.116278070	1.121873438
3	1.161834243	1.170580758	1.179393119	1.188271821
4	1.221402758	1.233678060	1.246076731	1.258600010
5	1.284025417	1.300176468	1.316530675	1.333090592
6	1.349858808	1.370259311	1.390968128	1.411989920
7	1.419067549	1.444119799	1.469614321	1.495558925
8	1.491824698	1.521961556	1.552707219	1.584073985
9	1.568312185	1.603999183	1.640498239	1.677827833
10	1.648721271	1.690458848	1.733253018	1.777130527
11	1.733253018	1.781578911	1.831252209	1.882310478
12	1.822118800	1.877610579	1.934792334	1.993715533
13	1.915540829	1.978818600	2.044186682	2.111714127
14	2.013752707	2.085481993	2.159766254	2.236696499
15	2.117000017	2.197894815	2.281880765	2.369075986
16	2.225540928	2.316366977	2.410899706	2.509290390
17	2.339646852	2.441225092	2.547213458	2.657803421
18	2.459603111	2.572813379	2.691234472	2.815106236
19	2.585709659	2.711494611	2.843398524	2.981719060
20	2.718281828	2.857651118	3.004166024	3.158192910
21	2.857651118	3.011685835	3.174023418	3.345111412
22	3.004166024	3.174023418	3.353484653	3.543092736
23	3.158192910	3.345111412	3.543092736	3.752791639
24	3.320116923	3.525421487	3.743421377	3.974901627
25	3.490342957	3.715450738	3.955076723	4.210157256
26	3.669296668	3.915723052	4.178699192	4.459336553
27	3.857425531	4.126790557	4.414965413	4.723263594
28	4.055199967	4.349235141	4.664590271	5.002811228
29	4.263114515	4.583670058	4.928329072	5.298903964
30	4.481689070	4.830741618	5.206979827	5.612521030
31	4.711470183	5.091130968	5.501385667	5.944699606
32	4.953032424	5.365555971	5.812437394	6.296538261
33	5.206979827	5.654773185	6.141076177	6.669200582
34	5.473947392	5.959579948	6.488296399	7.063919024
35	5.754602676	6.280816576	6.855148666	7.481998983
36	6.049647464	6.619368681	7.242742985	7.924823118
37	6.359819523	6.976169612	7.652252125	8.393855919
38	6.685894442	7.352203028	8.084915164	8.890648553
39	7.028687581	7.748505608	8.542041237	9.416843994
40	7.389056099	8.166169913	9.025013499	9.974182455
41	7.767901106	8.606347393	9.535293310	10.56450714
42	8.166169913	9.070251568	10.07442466	11.18977036
43	8.584858397	9.559161366	10.64403882	11.85203994
44	9.025013499	10.07442466	11.24585931	12.55350614
45	9.487735836	10.61746196	11.88170711	13.29648880
46	9.974182455	11.18977036	12.55350614	14.08344508
47	10.48556972	11.79292765	13.26328909	14.91697759
48	11.02317638	12.42859666	14.01320361	15.79984295
49	11.58834672	13.09852987	14.80551875	16.73496093
50	12.18249396	13.80457419	15.64263188	17.72542412
60	20.08553692	23.33606458	27.11263892	31.50039231
70	33.11545196	39.41865686	46.99306323	55.98030878
80	54.59815003	66.68633104	81.45086866	99.48431564
90	90.01713130	112.7304984	141.1749639	176.7966143
100	148.4131591	190.5662685	241.6919323	314.1906603

	6	6.25	6.5	6.75
1	1.061836547	1.064494459	1.067159024	1.069830260
2	1.127496852	1.133148453	1.138828383	1.144536784
3	1.197217363	1.206230249	1.215310986	1.224460085
4	1.271249150	1.284025417	1.296930087	1.309964451
5	1.349858808	1.366837941	1.384030646	1.401439608
6	1.433329415	1.454991415	1.476980794	1.499302500
7	1.521961556	1.548830299	1.576173383	1.603999183
8	1.616074402	1.648721271	1.682027650	1.716006862
9	1.716006862	1.755054657	1.794990986	1.835836067
10	1.822118800	1.868245957	1.915540829	1.964032976
11	1.934792334	1.988737470	2.044186682	2.101181909
12	2.054433211	2.117000017	2.181472265	2.247907987
13	2.181472265	2.253534787	2.327977815	2.404879985
14	2.316366977	2.398875294	2.484322533	2.572813379
15	2.459603111	2.553589458	2.651167211	2.752473605
16	2.611696473	2.718281828	2.829217014	2.944679551
17	2.773194764	2.893595944	3.019224469	3.150307289
18	2.944679551	3.080216849	3.221992639	3.370294064
19	3.126768365	3.278873768	3.438378521	3.605642574
20	3.320116923	3.490342957	3.669296668	3.857425531
21	3.525421487	3.715450738	3.915723052	4.126790557
22	3.743421377	3.955076723	4.178699192	4.414965413
23	3.974901627	4.210157256	4.459336553	4.723263594
24	4.220695817	4.481689070	4.758821245	5.053090317
25	4.481689070	4.770733182	5.078419037	5.405948925
26	4.758821245	5.078419037	5.419480705	5.783447742
27	5.053090317	5.405948925	5.783447742	6.187307399
28	5.365555971	5.754602676	6.171858450	6.619368681
29	5.697343423	6.125742662	6.586354442	7.081600914
30	6.049647464	6.520819120	7.028687581	7.576110945
31	6.423736771	6.941375821	7.500727381	8.105152739
32	6.820958469	7.389056099	8.004468914	8.671137658
33	7.242742985	7.865609274	8.542041237	9.276645452
34	7.690609199	8.372897488	9.115716393	9.924436012
35	8.166169913	8.912902981	9.727919013	10.61746196
36	8.671137658	9.487735836	10.38123656	11.35888208
37	9.207330866	10.09964223	11.07843028	12.15207576
38	9.776680410	10.75101319	11.82244685	13.00065837
39	10.38123656	11.44439396	12.61643085	13.90849772
40	11.02317638	12.18249396	13.46373804	14.87973172
41	11.70481154	12.96819732	14.36794955	15.91878725
42	12.42859666	13.80457419	15.33288702	17.03040030
43	13.19713816	14.69489273	16.36262875	18.21963757
44	14.01320361	15.64263188	17.46152694	19.49191960
45	14.87973172	16.65149496	18.63422605	20.85304540
46	15.79984295	17.72542412	19.88568249	22.30921898
47	16.77685067	18.86861576	21.22118553	23.86707753
48	17.81427318	20.08553692	22.64637964	25.53372175
49	18.91584631	21.38094276	24.16728841	27.31674817
50	20.08553692	22.75989509	25.79033992	29.22428378
60	36.59823444	42.52108200	49.40244911	57.39745705
70	66.68633104	79.43983955	94.63240831	112.7304984
80	121.5104175	148.4131591	181.2722419	221.4064162
90	221.4064162	277.2722845	347.2343805	434.8495025
100	403.4287935	518.0129247	665.1416330	854.0587625

	7	7.25	7.5	7.75
1	1.072508181	1.075192806	1.077884151	1.080582232
2	1.150273799	1.156039570	1.161834243	1.167657961
3	1.233678060	1.242965430	1.252322716	1.261750446
4	1.323129812	1.336427488	1.349858808	1.363425114
5	1.419067549	1.436917221	1.454991415	1.473292954
6	1.521961556	1.544963059	1.568312185	1.592014189
7	1.632316220	1.661133167	1.690458848	1.720302246
8	1.750672500	1.786038431	1.822118800	1.858928042
9	1.877610579	1.920335672	1.964032976	2.008724613
10	2.013752707	2.064731100	2.117000017	2.170592127
11	2.159766254	2.219984025	2.281880765	2.345503287
12	2.316366977	2.386910854	2.459603111	2.534509178
13	2.484322533	2.566389378	2.651167211	2.738745585
14	2.664456242	2.759363397	2.857651118	2.959439819
15	2.857651118	2.966847674	3.080216849	3.197918086
16	3.064854203	3.189933276	3.320116923	3.455613465
17	3.287081207	3.429793310	3.578701410	3.734074512
18	3.525421487	3.687689094	3.857425531	4.034974573
19	3.781043388	3.964976785	4.157857843	4.360121832
20	4.055199967	4.263114515	4.481689070	4.711470183
21	4.349235141	4.583670058	4.830741618	5.091130968
22	4.664590271	4.928329072	5.206979827	5.501385667
23	5.002811228	5.298903964	5.612521030	5.944699606
24	5.365555971	5.697343423	6.049647464	6.423736771
25	5.754602676	6.125742662	6.520819120	6.941375821
26	6.171858450	6.586354442	7.028687581	7.500727381
27	6.619368681	7.081600914	7.576110945	8.105152739
28	7.099327065	7.614086359	8.166169913	8.758284041
29	7.614086359	8.186610878	8.802185122	9.464046121
30	8.166169913	8.802185122	9.487735836	10.22668009
31	8.758284041	9.464046121	10.22668009	11.05076880
32	9.393331287	10.17567431	11.02317638	11.94126442
33	10.07442466	10.94081181	11.88170711	12.90351816
34	10.80490286	11.76348215	12.80710378	13.94331246
35	11.58834672	12.64801138	13.80457419	15.06689571
36	12.42859666	13.59905085	14.87973172	16.28101980
37	13.32977160	14.62160165	16.03862700	17.59298072
38	14.29628910	15.72104090	17.28778184	19.01066239
39	15.33288702	16.90315008	18.63422605	20.54258400
40	16.44464677	18.17414537	20.08553692	22.19795128
41	17.63701820	19.54071036	21.64988191	23.98671175
42	18.91584631	21.01003120	23.33606458	25.91961453
43	20.28739993	22.58983441	25.15357416	28.00827494
44	21.75840240	24.28812744	27.11263892	30.26524426
45	23.33606458	26.11474246	29.22428378	32.70408521
46	25.02812018	28.07838322	31.50039231	35.33945340
47	26.84286366	30.18967565	33.95377362	38.18718545
48	28.78919088	32.45972208	36.59823444	41.26439411
49	30.87664275	34.90045966	39.44865686	44.58957111
50	33.11545196	37.52472316	42.52108200	48.18269829
60	66.68633104	77.47846293	90.01713130	104.5849856
70	134.2897797	159.9721920	190.5662685	227.0113463
80	270.4264074	330.2995599	403.4287935	492.7490411
90	544.5719101	681.9797737	854.0587625	1069.557189
100	1096.633158	1408.104848	1808.042414	2321.572415

	8	8.25	8.5	8.75
1	1.083287068	1.085998673	1.088717067	1.091442264
2	1.173510871	1.179393119	1.185304851	1.191246217
3	1.271249150	1.280819362	1.290461621	1.300176468
4	1.377127764	1.390968128	1.404947591	1.419067549
5	1.491824698	1.510589542	1.529590420	1.548830299
6	1.616074402	1.640498239	1.665291195	1.690458848
7	1.750672500	1.781578911	1.813030945	1.845038233
8	1.896480879	1.934792334	1.973877732	2.013752707
9	2.054433211	2.101181909	2.148994375	2.197894815
10	2.225540928	2.281880765	2.339646852	2.398875294
11	2.410899706	2.478119484	2.547213458	2.618233883
12	2.611696473	2.691234472	2.773194764	2.857651118
13	2.829217014	2.922677067	3.019224469	3.118961207
14	3.064854203	3.174023418	3.287081207	3.404166083
15	3.320116923	3.446985221	3.578701410	3.715450738
16	3.596639726	3.743421377	3.896193302	4.055199967
17	3.896193302	4.065350650	4.241852143	4.426016635
18	4.220695817	4.414965413	4.618176822	4.830741618
19	4.572225195	4.794646582	5.027887923	5.272475571
20	4.953032424	5.206979827	5.473947392	5.754602676
21	5.365555971	5.654773185	5.959579948	6.280816576
22	5.812437394	6.141076177	6.488296399	6.855148666
23	6.296538261	6.669200582	7.063919024	7.481998983
24	6.820958469	7.242742985	7.690609199	8.166169913
25	7.389056099	7.865609274	8.372897488	8.912902981
26	8.004468914	8.542041237	9.115716393	9.727919013
27	8.671137658	9.276645452	9.924436012	10.61746196
28	9.393331287	10.07442466	10.80490286	11.58834672
29	10.17567431	10.94081181	11.76348215	12.64801138
30	11.02317638	11.88170711	12.80710378	13.80457419
31	11.94126442	12.90351816	13.94331246	15.06689571
32	12.93581732	14.01320361	15.18032224	16.44464677
33	14.01320361	15.21832053	16.52707591	17.94838251
34	15.18032224	16.52707591	17.99330960	19.58962325
35	16.44464677	17.94838251	19.58962325	21.38094276
36	17.81427318	19.49191960	21.32755716	23.33606458
37	19.29797176	21.16819882	23.21967547	25.46996717
38	20.90524324	22.98863584	25.27965697	27.79899864
39	22.64637964	24.96562803	27.52239398	30.34100203
40	24.53253020	27.11263892	29.96410005	33.11545196
41	26.57577270	29.44428990	32.62242711	36.14360387
42	28.78919088	31.97645977	35.51659315	39.44865686
43	31.18695817	34.72639289	38.66752112	43.05593137
44	33.78442846	37.71281662	42.09799016	46.99306323
45	36.59823444	40.95606882	45.83280037	51.29021535
46	39.64639407	44.17823641	49.89895197	55.98030878
47	42.91842598	48.30330573	54.32584062	61.09927498
48	46.52547444	52.45732595	59.14546985	66.68633104
49	50.40044478	56.96858639	64.39268244	72.78428016
50	54.59815003	61.86780925	70.10541235	79.43983955
60	121.5104175	141.1749639	164.0219073	190.5662685
70	270.4264074	322.1144347	383.7533391	457.1447133
80	601.8450379	735.0951892	897.8472917	1096.633158
90	1339.430761	1677.399573	2100.645589	2630.686190
100	2980.957987	3827.625821	4914.768840	6310.688108

	9	9.25	9.5	9.75
1	1.094174284	1.096913142	1.099658855	1.102411442
2	1.197217363	1.203218440	1.209249598	1.215310986
3	1.309964451	1.319826119	1.329762028	1.339772737
4	1.433329415	1.447734615	1.462284589	1.476980794
5	1.568312185	1.588039124	1.608014197	1.628240526
6	1.716006862	1.741940985	1.768267051	1.794990986
7	1.877610579	1.910757958	1.944490521	1.978818600
8	2.054433211	2.095935514	2.138276220	2.181472265
9	2.247907987	2.299059210	2.351374381	2.404879985
10	2.459603111	2.521868260	2.585709659	2.651167211
11	2.691234472	2.766270436	2.843398524	2.922677067
12	2.944679551	3.034358394	3.126768365	3.221992639
13	3.221992639	3.328427599	3.438378521	3.551961549
14	3.525421487	3.650995974	3.781043388	3.915723052
15	3.857425531	4.004825464	4.157857843	4.316737895
16	4.220695817	4.392945681	4.572225195	4.758821245
17	4.618176822	4.818679848	5.027887923	5.246178989
18	5.053090317	5.285673250	5.528961478	5.783447742
19	5.528961478	5.797924450	6.079971449	6.375738962
20	6.049647464	6.359819523	6.685894442	7.028687581
21	6.619368681	6.976169612	7.352203028	7.748505608
22	7.242742985	7.652252125	8.084915164	8.542041237
23	7.924823118	8.393855919	8.890648553	9.416843994
24	8.671137658	9.207330866	9.776680410	10.38123656
25	9.487735836	10.09964223	10.75101319	11.44439396
26	10.38123656	11.07843028	11.82244685	12.61643085
27	11.35888208	12.15207576	13.00065837	13.90849772
28	12.42859666	13.32977160	14.29628910	15.33288702
29	13.59905085	14.62160165	15.72104090	16.90315008
30	14.87973172	16.03862700	17.28778184	18.63422605
31	16.28101980	17.59298072	19.01066239	20.54258400
32	17.81427318	19.29797176	20.90524324	22.64637964
33	19.49191960	21.16819882	22.98863584	24.96562803
34	21.32755716	23.21967547	25.27965697	27.52239398
35	23.33606458	25.46996717	27.79899864	30.34100203
36	25.53372175	27.93834170	30.56941502	33.44826778
37	27.93834170	30.64593417	33.61592792	36.87375311
38	30.56941502	33.61592792	36.96605281	40.65004732
39	33.44826778	36.87375311	40.65004732	44.81307726
40	36.59823444	40.44730436	44.70118449	49.40244911
41	40.04484696	44.36717969	49.15605336	54.46182514
42	43.81604174	48.66694246	54.05488936	60.03933916
43	47.94238608	53.38340874	59.44193775	66.18805443
44	52.45732595	58.55696259	65.36585321	72.96646850
45	57.39745705	64.23190180	71.88013931	80.43906972
46	62.80282145	70.45681719	79.04363170	88.67695081
47	68.71723217	77.28500869	86.92102954	97.75848518
48	75.18862829	84.77194167	95.58347983	107.7700726
49	82.26916350	92.99074760	105.1092200	118.8069611
50	90.01713130	102.0027731	115.5842845	130.9741532
60	221.4064162	257.2375559	298.8674010	347.2343805
70	544.5719101	648.7192276	772.7843255	920.5761041
80	1339.430764	1635.984430	1998.195895	2410.601978
90	3294.468075	4125.737208	5166.754427	6170.113938
100	8103.083928	10404.56572	13359.72683	17154.22881

	10	10.25	10.5	10.75
1	1.105170918	1.107937302	1.110710610	1.113490861
2	1.221402758	1.227525065	1.233678060	1.239861897
3	1.349858808	1.360020809	1.370259311	1.380574891
4	1.491824698	1.506817785	1.521961556	1.537257524
5	1.648721271	1.669459631	1.690458848	1.711722203
6	1.822118800	1.849656600	1.877610579	1.905987029
7	2.013752707	2.049303542	2.085481993	2.122299138
8	2.225540928	2.270499838	2.316366977	2.363160694
9	2.459603111	2.515571464	2.572813379	2.631357835
10	2.718281828	2.787095461	2.857651118	2.929992901
11	3.004166024	3.087927025	3.174023418	3.262520317
12	3.320116923	3.421229536	3.525421487	3.632786556
13	3.669296668	3.790507822	3.915723052	4.045074629
14	4.055199967	4.199645009	4.349235141	4.504153630
15	4.481689070	4.652943360	4.830741618	5.015333903
16	4.953032424	5.155169512	5.365555971	5.584528464
17	5.473947392	5.711604600	5.959579948	6.218321407
18	6.049647464	6.328099790	6.619368681	6.924044055
19	6.685894442	7.011137808	7.352203028	7.709859775
20	7.389056099	7.767901106	8.166169913	8.584858397
21	8.166169913	8.606347393	9.070251568	9.559161366
22	9.025013499	9.535293310	10.07442466	10.64403882
23	9.974182455	10.56450714	11.18977036	11.85203994
24	11.02317638	11.70481154	12.42859666	13.19713816
25	12.18249396	12.96819732	13.80457419	14.69489273
26	13.46373804	14.36794955	15.33288702	16.36262875
27	14.87973172	15.91878725	17.03040030	18.21963757
28	16.44464677	17.63701820	18.91584631	20.28739993
29	18.17414537	19.54071036	21.01003120	22.58983441
30	20.08553692	21.64988191	23.33606458	25.15357416
31	22.19795128	23.98671175	25.91961453	28.00827494
32	24.53253020	26.57577270	28.78919088	31.18695817
33	27.11263892	29.44428990	31.97645977	34.72639289
34	29.96410005	32.62242711	35.51659315	38.66752112
35	33.11545196	36.14360387	39.44865686	43.05593137
36	36.59823444	40.04484696	43.81604174	47.94238608
37	40.44730436	44.36717969	48.66694246	53.38340874
38	44.70118449	49.15605336	54.05488936	59.44193775
39	49.40244911	54.46182514	60.03933916	66.18805443
40	54.59815003	60.34028760	66.68633104	73.69979370
41	60.34028760	66.85325544	74.06921545	82.06404672
42	66.68633104	74.06921545	82.26946350	91.37756602
43	73.69979370	82.06404672	91.37756602	101.7480846
44	81.45086866	90.92181851	101.4940321	113.2955623
45	90.01713130	100.7356743	112.7304984	126.1535732
46	99.48431564	111.6088112	125.2109607	140.4708509
47	109.9471725	123.6555651	139.0731425	156.4130086
48	121.5104175	137.0026132	154.4700150	174.1644556
49	134.2897797	151.7903056	171.5714847	193.9305296
50	148.4131591	168.1741417	190.5662685	215.9398723
60	403.4287935	468.7173868	544.5719101	632.7022928
70	1096.633158	1306.360101	1556.196528	1853.813226
80	2980.957987	3640.950307	4147.066748	5431.659591
90	8103.083928	10147.67607	12708.16526	15914.72104
100	22026.46579	28282.54192	36315.50267	46630.02845

	11	11.25	11.5	11.75
1	1.116278070	1.119072257	1.121873438	1.124681630
2	1.246076731	1.252322716	1.258600010	1.264908769
3	1.390968128	1.401439608	1.411989920	1.422619656
4	1.552707219	1.568312185	1.584073985	1.599994193
5	1.733253018	1.755054657	1.777130527	1.799484077
6	1.934792334	1.964032976	1.993715533	2.023846685
7	2.159766254	2.197894815	2.236696499	2.276183188
8	2.410899706	2.459603111	2.509290390	2.559981418
9	2.691234472	2.752473605	2.815106236	2.879164074
10	3.004166024	3.080216849	3.158192910	3.238142944
11	3.353484653	3.446985221	3.543092736	3.641879884
12	3.743421377	3.857425531	3.974901627	4.095955404
13	4.178699192	4.316737895	4.459336553	4.606645800
14	4.664590271	4.830741618	5.002811228	5.181009907
15	5.206979827	5.405948925	5.612521030	5.826986667
16	5.812437394	6.049647464	6.296538261	6.553504862
17	6.488296399	6.769992642	7.063919024	7.370606530
18	7.242742985	7.576110945	7.924823118	8.289585766
19	8.084915164	8.478215573	8.890648553	9.323144831
20	9.025013499	9.487735836	9.974182455	10.48556972
21	10.07442466	10.61746196	11.18977036	11.79292765
22	11.24585931	11.88170711	12.55350614	13.26328909
23	12.55350614	13.29648880	14.08344508	14.91697759
24	14.01320361	14.87973172	15.79984295	16.77685067
25	15.64263188	16.65149496	17.72542412	18.86861576
26	17.46152694	18.63422605	19.88568249	21.22118553
27	19.49191960	20.85304540	22.30921898	23.86707753
28	21.75840240	23.33606458	25.02812018	26.84286366
29	24.28842744	26.11474246	28.07838322	30.18967565
30	27.11263892	29.22428378	31.50039231	33.95377362
31	30.26524426	32.70408521	35.33945340	38.18718545
32	33.78442846	36.59823444	39.64639407	42.94842598
33	37.71281662	40.95606882	44.47823641	48.30330573
34	42.09799016	45.83280037	49.89895197	54.32584062
35	46.99306323	51.29021535	55.98030878	61.09927498
36	52.45732595	57.39745705	62.80282145	68.71723217
37	58.55696259	64.23190180	70.45681719	77.28500869
38	65.36585321	71.88013931	79.04363170	86.92102954
39	72.96646850	80.43906972	88.67695081	97.75848518
40	81.45086866	90.01713130	99.48431564	109.9471725
41	90.92181851	100.7356743	111.6088112	123.6555651
42	101.4940321	112.7304984	125.2109607	139.0731425
43	113.2955623	126.1535732	140.4708509	156.4130086
44	126.4693517	141.1749639	157.5905163	175.9148375
45	141.1749639	157.9849855	176.7966143	197.8481862
46	157.5905163	176.7966143	198.3434254	222.5162205
47	175.9148375	197.8481862	222.5162205	250.2599055
48	196.3698754	221.4064162	249.6350372	281.4627185
49	219.2033856	247.7697779	280.0589173	316.5559490
50	244.6919323	277.2722845	314.1906603	356.0246607
60	735.0951892	854.0587625	992.2747156	1152.858743
70	2208.347992	2630.686190	3133.794971	3733.121103
80	6634.244006	8103.083928	9897.129059	12068.38074
90	19930.37044	24959.25564	31257.94282	[illegible]
100	59874.14172	76879.91976	98715.77[illegible]	[illegible]

	12	12.25	12.5	12.75
1	1.127496852	1.130319120	1.133148453	1.135984868
2	1.271249150	1.277621313	1.284025417	1.290461621
3	1.433329415	1.444119799	1.454991415	1.465944874
4	1.616074402	1.632316220	1.648721271	1.665291195
5	1.822118800	1.845038233	1.868245957	1.891745599
6	2.054433211	2.085481993	2.117000017	2.148994375
7	2.316366977	2.357260171	2.398875294	2.441225092
8	2.611696473	2.664456242	2.718281828	2.773194764
9	2.944679551	3.011685835	3.080216849	3.150307289
10	3.320116923	3.404166083	3.490342957	3.578701410
11	3.743421377	3.847794011	3.955076723	4.065350650
12	4.220695817	4.349235141	4.481689070	4.618176822
13	4.758821245	4.916023638	5.078419037	5.246178989
14	5.365555971	5.556675512	5.754602676	5.959579948
15	6.049647464	6.280816576	6.520819120	6.769992642
16	6.820958469	7.099327065	7.389056099	7.690609199
17	7.690609199	8.024505121	8.372897488	8.736415677
18	8.671137658	9.070251568	9.487735836	9.924436012
19	9.776680410	10.25227877	10.75101319	11.27400914
20	11.02317638	11.58834672	12.18249396	12.80710378
21	12.42859666	13.09852987	13.80457419	14.54867610
22	14.01320361	14.80551875	15.64263188	16.52707591
23	15.79984295	16.73496093	17.72542412	18.77450815
24	17.81427318	18.91584631	20.08553692	21.32755716
25	20.08553692	21.38094276	22.75989509	24.22778221
26	22.64637964	24.16728841	25.79033992	27.52239398
27	25.53372175	27.31674817	29.22428378	31.26502310
28	28.78919088	30.87664275	33.11545196	35.51659315
29	32.45972208	34.90045966	37.52472316	40.34631239
30	36.59823444	39.44865686	42.52108200	45.83280037
31	41.26439411	44.58957111	48.18269829	52.06536769
32	46.52547444	50.40044478	54.59815003	59.14546985
33	52.45732595	56.96858639	61.86780925	67.18835877
34	59.14546985	64.39268244	70.10541235	76.32495889
35	66.68633104	72.78428016	79.43983955	86.70399837
36	75.18862829	82.26946350	90.01713130	98.49443016
37	84.77494167	92.99074760	102.0027731	111.8881823
38	95.58347983	105.1092200	115.5842845	127.1032820
39	107.7700726	118.8069611	130.9741532	144.3874050
40	121.5104175	134.2897797	148.4131591	164.0219073
41	137.0026132	151.7903056	168.1741417	186.3264048
42	154.4700150	171.5714847	190.5662685	211.6639764
43	174.1644556	193.9305296	215.9398723	240.4470743
44	196.3698754	219.2033856	244.6919323	273.1442380
45	221.4064162	247.7697779	277.2722845	310.2877212
46	249.6350372	280.0589173	314.1906603	352.4821561
47	281.4627185	316.5559490	356.0246607	400.4143957
48	317.3483289	357.8092417	403.4287935	454.8646945
49	357.8092417	404.4386272	457.1447133	516.7194100
50	403.4287935	457.1447133	518.0128247	586.9854309
60	1339.430764	1556.196528	1808.042414	2100.645589
70	4417.066748	5297.551438	6310.688108	7517.583333
80	14764.78157	18033.74493	22026.46579	26903.18607
90	49020.80114	61389.86283	76879.91976	96278.46994
100	162754.7914	208981.2889	268337.2865	344551.8961

	13	13.25	13.5	13.75
1	1.138828383	1.141679016	1.144536784	1.147401706
2	1.296930087	1.303430976	1.309964451	1.316530675
3	1.476980794	1.488099794	1.499302500	1.510589542
4	1.682027650	1.698932309	1.716006862	1.733253018
5	1.915540829	1.939635367	1.964032976	1.988737470
6	2.181472265	2.214440997	2.247907987	2.281880765
7	2.484322533	2.528180818	2.572813379	2.618233883
8	2.829217014	2.886370989	2.944679551	3.004166024
9	3.221992639	3.295309191	3.370294064	3.446985221
10	3.669296668	3.762185355	3.857425531	3.955076723
11	4.178699192	4.295208074	4.414965413	4.538061779
12	4.758821245	4.903748928	5.053090317	5.206979827
13	5.419480705	5.598507252	5.783447742	5.974497537
14	6.171858450	6.391698251	6.619368681	6.855148666
15	7.028687581	7.297267770	7.576110945	7.865609274
16	8.004468914	8.331137488	8.671137658	9.025013499
17	9.115716393	9.511484850	9.924436012	10.35531589
18	10.38123656	10.85906266	11.35888208	11.88170711
19	11.82244685	12.39756398	13.00065837	13.63309101
20	13.46373804	14.15403865	14.87973172	15.64263188
21	15.33288702	16.15936891	17.03040030	17.94838251
22	17.46152694	18.44881240	19.49191960	20.59400471
23	19.88568249	21.06262199	22.30921898	23.62959614
24	22.64637964	24.04675355	25.53372175	27.11263892
25	25.79033992	27.45367394	29.22428378	31.10908815
26	29.37077111	31.34328345	33.44826778	35.69462082
27	33.44826778	35.78396901	38.28277285	40.95606882
28	38.09183673	40.85380653	43.81604174	46.99306323
29	43.38006484	46.64193364	50.14907151	53.91992092
30	49.40244911	53.25011691	57.39745705	61.86780925
31	56.26091125	60.79454108	65.69350092	70.98722988
32	64.07152260	69.40785184	75.18862829	81.45086866
33	72.96646850	79.24148800	86.05615085	93.45686566
34	83.09628536	90.46834405	98.49443016	107.2325671
35	94.63240831	103.2858100	112.7304984	123.0388304
36	107.7700726	117.9192420	129.0242021	141.1749639
37	122.7316175	134.6259241	147.6729454	161.9843944
38	139.7702496	153.6995926	169.0171180	185.8611705
39	159.1743273	175.4755997	193.4463088	213.2574241
40	181.2722419	200.3368100	221.4064162	244.6919323
41	206.4379742	228.7203321	253.4077876	280.7599405
42	235.0974244	261.1252037	290.0345344	322.1444347
43	267.7356197	298.1211656	331.9551933	369.6290740
44	304.9049230	340.3586791	379.9349295	424.1130300
45	347.2343805	388.5803618	434.8495025	486.6280142
46	395.4403682	443.6340452	497.7012513	558.3578137
47	450.3387152	506.4876802	569.6373897	640.6607079
48	512.8585109	578.2463564	651.9709463	735.0951892
49	584.0578289	660.1717312	746.2047303	843.4494742
50	665.1416330	753.7042126	854.0587625	967.7753656
60	2440.601978	2835.574950	3294.468075	3827.625821
70	8955.292703	10667.95855	12708.16526	15138.55379
80	32859.62567	40134.83743	49020.80114	59874.14172
90	120571.7150	150994.6976	189094.0898	236806.8242
100	442413.3920	568070.0400	729416.3698	936589.1582

Таблица П.9. Дисконтные множители (непрерывные проценты)

Число периодов	Ставка непрерывных процентов			
	.25 (1/4)	.333 (1/3)	.417 (5/12)	.5 (1/2)
1	.997503122	.996675538	.995838682	.995012479
2	.995012479	.993362129	.991694681	.990049834
3	.992528055	.990059734	.987567925	.985111940
4	.990049834	.986768319	.983458341	.980198673
5	.987577800	.983487845	.979365858	.975309912
6	.985111940	.980218277	.975290406	.970445534
7	.982652236	.976959579	.971231913	.965605416
8	.980198673	.973711715	.967190308	.960789439
9	.977751237	.970474647	.963165522	.955997482
10	.975309912	.967248342	.959157485	.951229425
11	.972874683	.964032761	.955166126	.946485148
12	.970445534	.960827871	.951191376	.941764534
13	.968022450	.957633636	.947233167	.937067463
14	.965605416	.954450020	.943291429	.932393820
15	.963194418	.951276987	.939366093	.927743486
16	.960789439	.948114503	.935457093	.923116346
17	.958390466	.944962533	.931564359	.918512284
18	.955997482	.941821041	.927687823	.913931185
19	.953610473	.938689993	.923827420	.909372934
20	.951229425	.935569354	.919983080	.904837418
21	.948854321	.932459090	.916154739	.900324523
22	.946485148	.929359165	.912342328	.895834135
23	.944121890	.926269546	.908545782	.891366144
24	.941764534	.923190199	.904765034	.886920437
25	.939413063	.920121088	.901000019	.882496903
26	.937067463	.917062181	.897250672	.878095431
27	.934727721	.914013443	.893516927	.873715912
28	.932393820	.910974840	.889798719	.869358235
29	.930065747	.907946339	.886095984	.865022293
30	.927743486	.904927906	.882408657	.860707976
31	.925427024	.901919508	.878736675	.856415177
32	.923116346	.898921111	.875079972	.852143789
33	.920811438	.895932682	.871438486	.847893704
34	.918512284	.892954189	.867812154	.843664817
35	.916218872	.889985597	.864200912	.839457021
36	.913931185	.887026874	.860604698	.835270211
37	.911649211	.884077987	.857023448	.831104284
38	.909372934	.881138903	.853457101	.826959134
39	.907102342	.878209591	.849905595	.822834658
40	.904837418	.875290017	.846368868	.818730753
41	.902578150	.872380148	.842846859	.814647316
42	.900324523	.869479954	.839339505	.810584246
43	.898076522	.866589401	.835846747	.806541440
44	.895834135	.863708458	.832368523	.802518798
45	.893597347	.860837092	.828904773	.798516219
46	.891366144	.857975272	.825455437	.794533603
47	.889140512	.855122966	.822020455	.790570850
48	.886920437	.852280143	.818599767	.786627861
49	.884705905	.849416770	.815193313	.782704538
50	.882496903	.846622817	.811801035	.778800783
60	.860707976	.818894516	.778645038	.740818221
70	.839157021	.792074362	.746843217	.704688090
80	.818730753	.766132613	.716340261	.670320046
90	.798516219	.741040499	.687083123	.637628152
100	.778800783	.716770194	.659020920	.606530660

	.583 (7/12)	.667 (2/3)	.75 (3/4)	.833 (5/6)
1	.994186961	.993352195	.992528055	.991704598
2	.988407714	.986748583	.985111940	.983478010
3	.982662062	.980188871	.977751237	.975319665
4	.976949810	.973672767	.970445534	.967228997
5	.971270763	.967199980	.963194418	.959205444
6	.965624729	.960770224	.955997482	.951218449
7	.960011515	.954383211	.948854321	.943357461
8	.954430931	.948038657	.941764534	.935531932
9	.948882787	.941736281	.934727721	.927771319
10	.943366895	.935475802	.927743486	.920075083
11	.937883067	.929256941	.920811438	.912442691
12	.932431116	.923079422	.913931185	.904873612
13	.927010858	.916942971	.907102342	.897367322
14	.921622109	.910847313	.900324523	.889923300
15	.916264684	.904792177	.893597347	.882541029
16	.910938402	.898777295	.886920437	.875219996
17	.905643082	.892802399	.880293416	.867959695
18	.900378544	.886867223	.873715912	.860759620
19	.895144609	.880971503	.867187554	.853619274
20	.889941098	.875114976	.860707976	.846538159
21	.884767837	.869297382	.854276814	.839515785
22	.879624647	.863518463	.847893704	.832551664
23	.874511355	.857777961	.841558289	.825645314
24	.869427787	.852075620	.835270211	.818796254
25	.864373770	.846411188	.829029118	.812004010
26	.859349132	.840784411	.822834658	.805268111
27	.854353702	.835195040	.816686483	.798588088
28	.849387311	.829642827	.810584246	.791963479
29	.844449790	.824127523	.804527605	.785393824
30	.839540971	.818648884	.798516219	.778878667
31	.834660687	.813206666	.792549749	.772417556
32	.829808772	.807800627	.786627861	.766010042
33	.824985062	.802430526	.780750221	.759655681
34	.820189392	.797096124	.774916498	.753354032
35	.815421599	.791797185	.769126364	.747104657
36	.810681522	.786533471	.763379494	.740907124
37	.805968999	.781304750	.757675565	.734761002
38	.801283870	.776110789	.752014254	.728665864
39	.796625976	.770951356	.746395245	.722621288
40	.791995159	.765826221	.740818221	.716626854
41	.787391260	.760735158	.735282868	.710682147
42	.782814125	.755677939	.729788874	.704786753
43	.778263596	.750654340	.724335932	.698940264
44	.773739520	.745664136	.718923733	.693142274
45	.769241742	.740707106	.713551975	.687392380
46	.764770110	.735783030	.708220353	.681690184
47	.760324472	.730891688	.702928570	.676035290
48	.755904677	.726032863	.697676326	.670127306
49	.751510574	.721206338	.692463327	.664865812
50	.747142014	.716411899	.687289279	.659350513
60	.704829041	.670185995	.637628152	.606651978
70	.664912384	.626942782	.591555364	.558165369
80	.627256331	.586489801	.548811636	[illegible]
90	.591732858	.548647017	.509156421	[illegible]
100	.558221188	[illegible]	.472366553	[illegible]

	1	1.25	1.5	1.75
1	.990049834	.987577800	.985111940	.982652236
2	.980198673	.975309912	.970445534	.965605416
3	.970445534	.963194418	.955997482	.948854321
4	.960789439	.951229425	.941764534	.932393820
5	.951229425	.939413063	.927743486	.916218872
6	.941764534	.927743486	.913931185	.900324523
7	.932393820	.916218872	.900324523	.884705905
8	.923116346	.904837418	.886920437	.869358235
9	.913931185	.893597347	.873715912	.854276814
10	.904837418	.882496903	.860707976	.839457021
11	.895834135	.871534350	.847893704	.824894318
12	.886920437	.860707976	.835270211	.810584246
13	.878095431	.850016090	.822834658	.796522422
14	.869358235	.839457021	.810584246	.782704538
15	.860707976	.829029118	.798516219	.769126364
16	.852143789	.818730753	.786627861	.755783741
17	.843664817	.808560316	.774916498	.742672583
18	.835270211	.798516219	.763379494	.729788874
19	.826959134	.788596891	.752014254	.717128669
20	.818730753	.778800783	.740818221	.704688090
21	.810584246	.769126364	.729788874	.692463327
22	.802518798	.759572123	.718923733	.680450636
23	.794533603	.750136567	.708220353	.668646339
24	.786627861	.740818221	.697676326	.657046820
25	.778800783	.731615629	.687289279	.645648526
26	.771051586	.722527354	.677056875	.634447968
27	.763379494	.713551975	.666976811	.623441714
28	.755783741	.704688090	.657046820	.612626394
29	.748263568	.695934314	.647264667	.601998696
30	.740818221	.687289279	.637628152	.591555364
31	.733446956	.678751634	.628135105	.581293201
32	.726149037	.670320046	.618783392	.571209064
33	.718923733	.661993197	.609570907	.561299864
34	.711770323	.653769785	.600495579	.551562566
35	.704688090	.645648526	.591555364	.541994188
36	.697676326	.637628152	.582748252	.532591801
37	.690734331	.629707408	.574072261	.523352524
38	.683861409	.621885057	.565525439	.514273528
39	.677056875	.614159876	.557105862	.505352032
40	.670320046	.606530660	.548811636	.496585304
41	.663650250	.598996215	.540640895	.487970659
42	.657046820	.591555364	.532591801	.479505459
43	.650509095	.584206946	.524662542	.471187111
44	.644036421	.576949810	.516851334	.463013068
45	.637628152	.569782825	.509156421	.454980827
46	.631283646	.562704869	.501576069	.447087927
47	.625002268	.555714837	.494108574	.439331951
48	.618783392	.548811636	.486752256	.431710523
49	.612626394	.541994188	.479505459	.424221311
50	.606530660	.535261429	.472366553	.416862020
60	.548811636	.472366553	.406569660	.349937749
70	.496585304	.416862020	.349937749	.293757700
80	.449328964	.367879441	.301194212	.246596964
90	.406569660	.324652467	.259240261	.207007553
100	.367879441	.286504797	.223130160	.173773943

	2	2.25	2.5	2.75
1	.980198673	.977751237	.975309912	.972874683
2	.960789439	.955997482	.951229425	.946485148
3	.941764534	.934727721	.927743486	.920811438
4	.923116346	.913931185	.904837418	.895834135
5	.904837418	.893597347	.882496903	.871534350
6	.886920437	.873715912	.860707976	.847893704
7	.869358235	.854276814	.839457021	.824894318
8	.852143789	.835270211	.818730753	.802518798
9	.835270211	.816686483	.798516219	.780750221
10	.818730753	.798516219	.778800783	.759572123
11	.802518798	.780750221	.759572123	.738968488
12	.786627861	.763379494	.740818221	.718923733
13	.771051586	.746395245	.722527354	.699422699
14	.755783741	.729788874	.704688090	.680450636
15	.740818221	.713551975	.687289279	.661993197
16	.726149037	.697676326	.670320046	.644036421
17	.711770323	.682153891	.653769785	.626566729
18	.697676326	.666976811	.637628152	.609570907
19	.683861409	.652137402	.621885057	.593036103
20	.670320046	.637628152	.606530660	.576949810
21	.657046820	.623441714	.591555364	.561299864
22	.644036421	.609570907	.576949810	.546074427
23	.631283646	.596008709	.562704869	.531261984
24	.618783392	.582748252	.548811636	.516851334
25	.606530660	.569782825	.535261429	.502831578
26	.594520548	.557105862	.522045777	.489192112
27	.582748252	.544710946	.509156421	.475922620
28	.571209064	.532591801	.496585304	.463013068
29	.559898367	.520742292	.484324569	.450453692
30	.548811636	.509156421	.472366553	.438234992
31	.537944438	.497828320	.460703781	.426347729
32	.527292424	.486752256	.449328964	.414782912
33	.516851334	.475922620	.438234992	.403531794
34	.506616992	.465333931	.427414932	.392585866
35	.496585304	.454980827	.416862020	.381936849
36	.486752256	.444858066	.406569660	.371576691
37	.477113916	.434960525	.396531419	.361497555
38	.467666427	.425283191	.386741023	.351691819
39	.458406011	.415821166	.377192354	.342152067
40	.449328964	.406569660	.367879441	.332871084
41	.440431655	.397523988	.358796465	.323841850
42	.431710523	.388679571	.349937749	.315057537
43	.423162082	.380031931	.341297755	.306511501
44	.414782912	.371576691	.332871084	.298197279
45	.406569660	.363309569	.324652467	.290108584
46	.398519041	.355226381	.316636769	.282239296
47	.390627835	.347323033	.308818980	.274583466
48	.382892886	.339595526	.301194212	.267135302
49	.375311099	.332039945	.293757700	.259889172
50	.367879441	.324652467	.286504797	.252839596
60	.301194212	.259240261	.223130160	.192049909
70	.246596964	.207007553	.173773943	.145875757
80	.201896518	.165298888	.135335283	.110803158
90	.165298888	.131993843	.105399225	.084162990
100	[illegible]	.105399225	.082084999	.063927861

	3	3.25	3.5	3.75
1	.970445534	.968022450	.965605416	.963194418
2	.941764534	.937067463	.932393820	.927743486
3	.913931185	.907102342	.900324523	.893597347
4	.886920437	.878095431	.869358235	.860707976
5	.860707976	.850016090	.839457021	.829029118
6	.835270211	.822834658	.810584246	.798516219
7	.810584246	.796522422	.782704538	.769126364
8	.786627861	.771051586	.755783741	.740818221
9	.763379494	.746395245	.729788874	.713551975
10	.740818221	.722527354	.704688090	.687289279
11	.718923733	.699422699	.680450636	.661993197
12	.697676326	.677056875	.657046820	.637628152
13	.677056875	.655406254	.634447968	.614159876
14	.657046820	.634447968	.612626394	.591555364
15	.637628152	.614159876	.591555364	.569782825
16	.618783392	.594520548	.571209064	.548811636
17	.600495579	.575509237	.551562566	.528612304
18	.582748252	.557105862	.532591801	.509156421
19	.565525439	.539290981	.514273528	.490416622
20	.548811636	.522045777	.496585304	.472366553
21	.532591801	.505352032	.479505459	.454980827
22	.516851334	.489192112	.463013068	.438234992
23	.501576069	.473548946	.447087927	.422105498
24	.486752256	.458406011	.431710523	.406569660
25	.472366553	.443747310	.416862020	.391605627
26	.458406011	.429557358	.402524224	.377192354
27	.444858066	.415821166	.388679571	.363309569
28	.431710523	.402524224	.375311099	.349937749
29	.418951549	.389652485	.362402430	.337058086
30	.406569660	.377192354	.349937749	.324652467
31	.394553710	.365130666	.337901786	.312703444
32	.382892886	.353454682	.326279795	.301194212
33	.371576691	.342152067	.315057537	.290108584
34	.360594940	.331210882	.304221264	.279430968
35	.349937749	.320619570	.293757700	.269146349
36	.339595526	.310366941	.283654026	.259240261
37	.329558961	.300442167	.273897864	.249698772
38	.319819022	.290834762	.264477261	.240508463
39	.310366941	.281534579	.255380676	.231656409
40	.301194212	.272531793	.246596964	.223130160
41	.292292578	.263816894	.238115364	.214917725
42	.283654026	.255380676	.229925485	.207007553
43	.275270783	.247214228	.222017294	.199388519
44	.267135302	.239308922	.214381101	.192049909
45	.259240261	.231656409	.207007553	.184981400
46	.251578553	.224248605	.199887614	.178173052
47	.244143283	.217077684	.193012563	.171615289
48	.236927759	.210136071	.186373976	.165298888
49	.229925485	.203416434	.179963721	.159214966
50	.223130160	.196911675	.173773943	.153354967
60	.165298888	.142274072	.122456428	.105399225
70	.122456428	.102796908	.086293586	.072439757
80	.090717953	.074273578	.060810063	.049787068
90	.067205513	.053664692	.042852127	.034218118
100	.049787068	.038774208	.030197383	.02[illegible]46

	4	4.25	4.5	4.75
1	.960789439	.958390466	.955997482	.953610473
2	.923116346	.918512284	.913931185	.909372934
3	.886920437	.880293416	.873715912	.867187554
4	.852143789	.843664817	.835270211	.826959134
5	.818730753	.808560316	.798516219	.788596891
6	.786627861	.774916498	.763379494	.752014254
7	.755783741	.742672583	.729788874	.717128669
8	.726149037	.711770323	.697676326	.683861409
9	.697676326	.682153891	.666976811	.652137402
10	.670320046	.653769785	.637628152	.621885057
11	.644036421	.626566729	.609570907	.593036103
12	.618783392	.600495579	.582748252	.565525439
13	.594520548	.575509237	.557105862	.539290981
14	.571209064	.551562566	.532591801	.514273528
15	.548811636	.528612304	.509156421	.490416622
16	.527292424	.506616992	.486752256	.467666427
17	.506616992	.485536895	.465333931	.445971603
18	.486752256	.465333931	.444858066	.425283191
19	.467666427	.445971603	.425283191	.405554505
20	.449328964	.427414932	.406569660	.386741023
21	.431710523	.409630396	.388679571	.368800290
22	.414782912	.392585866	.371576691	.351691819
23	.398519041	.376250550	.355226381	.335377002
24	.382892886	.360594940	.339595526	.319819022
25	.367879441	.345590753	.324652467	.304982769
26	.353454682	.331210882	.310366941	.290834762
27	.339595526	.317429352	.296710014	.277343075
28	.326279795	.304221264	.283654026	.264477261
29	.313486181	.291562759	.271172535	.252208286
30	.301194212	.279430968	.259240261	.240508463
31	.289384218	.267803976	.247833036	.229351389
32	.278037300	.256660777	.236927759	.218711887
33	.267135302	.245981242	.226502341	.208565946
34	.256660777	.235746077	.216535667	.198890670
35	.246596964	.225936792	.207007553	.189664226
36	.236927759	.216535667	.197898699	.180865793
37	.227637688	.207525719	.189190658	.172475514
38	.218711887	.198890670	.180865793	.164474457
39	.210136071	.190614922	.172907242	.156844564
40	.201896518	.182683524	.165298888	.149568619
41	.193980042	.175082148	.158025321	.142630202
42	.186373976	.167797061	.151071809	.136013654
43	.179066148	.160815103	.144424269	.129704045
44	.172044864	.154123662	.138069237	.123687136
45	.165298888	.147710648	.131993843	.117949348
46	.158817426	.141564177	.126185782	.112477734
47	.152590106	.135674045	.120633290	.107259945
48	.146606962	.130028711	.115325121	.102284207
49	.140858421	.124618277	.110250525	.097539291
50	.135335283	.119432968	.105399225	.093014489
60	.090717953	.078081666	.067205513	.057844321
70	.060810063	.051047434	.042852127	.035972519
80	.040762204	.033373270	.027323722	.022370772
90	.027323722	.021818136	.017422375	.013912049
100	.018315639	.014264234	.011108997	.008651695

	5	5.25	5.5	5.75
1	.951229425	.948854321	.946485148	.944121890
2	.904837418	.900324523	.895834135	.891366144
3	.860707976	.854276814	.847893704	.841558289
4	.818730753	.810584246	.802518798	.794533603
5	.778800783	.769126364	.759572123	.750136567
6	.740818221	.729788874	.718923733	.708220353
7	.704688090	.692463327	.680450636	.668646339
8	.670320046	.657046820	.644036421	.631283646
9	.637628152	.623441714	.609570907	.596008709
10	.606530660	.591555364	.576949810	.562704869
11	.576949810	.561299864	.546074427	.531261984
12	.548811636	.532591801	.516851334	.501576069
13	.522045777	.505352032	.489192112	.473548946
14	.496585304	.479505459	.463013068	.447087927
15	.472366553	.454980827	.438234992	.422105498
16	.449328964	.431710523	.414782912	.398519041
17	.427414932	.409630396	.392585866	.376250550
18	.406569660	.388679571	.371576691	.355226381
19	.386741023	.368800290	.351691819	.335377002
20	.367879441	.349937749	.332871084	.316636769
21	.349937749	.332039945	.315057537	.298943705
22	.332871084	.315057537	.298197279	.282239296
23	.316636769	.298943705	.282239296	.266468298
24	.301194212	.283654026	.267135302	.251578553
25	.286504797	.269146349	.252839596	.237520819
26	.272531793	.255380676	.239308922	.224248605
27	.259240261	.242319058	.226502341	.211718017
28	.246596964	.229925485	.214381101	.199887614
29	.234570288	.218165790	.202908529	.188718272
30	.223130160	.207007553	.192049909	.178173052
31	.212247974	.196420011	.181772386	.168217078
32	.201896518	.186373976	.172044864	.158817426
33	.192049909	.176841752	.162837908	.149943009
34	.182683524	.167797061	.154123662	.141564477
35	.173773943	.159214966	.145875757	.133654121
36	.165298888	.151071809	.138069237	.126185782
37	.157237166	.143345139	.130680483	.119134759
38	.149568619	.136013654	.123687136	.112477734
39	.142274072	.129057143	.117068037	.106192691
40	.135335283	.122456428	.110803158	.100258844
41	.128734904	.116193311	.104873544	.094656569
42	.122456428	.110250525	.099261252	.089367339
43	.116484158	.104611687	.093949300	.084373661
44	.110803158	.099261252	.088921617	.079659020
45	.105399225	.094184467	.084162990	.075207825
46	.100258844	.089367339	.079659020	.071005354
47	.095369162	.084796586	.075396080	.067037709
48	.090717953	.080459607	.071361270	.063291768
49	.086293586	.076344446	.067542382	.059755144
50	.082084999	.072439757	.063927861	.056416140
60	.049787068	.042852127	.036883167	.031745636
70	.030197383	.025349406	.021279736	.017863424
80	.018315639	.014995577	.012277340	.010051836
90	.011108997	.008870714	.007083409	.005656217
100	.006737947	.005247518	.004086771	.003182781

	6	6.25	6.5	6.75
1	.941764534	.939413063	.937067463	.934727721
2	.886920437	.882496903	.878095431	.873715912
3	.835270211	.829029118	.822834658	.816686483
4	.786627861	.778800783	.771051586	.763379494
5	.740818221	.731615629	.722527354	.713551975
6	.697676326	.687289279	.677056875	.666976811
7	.657046820	.645648526	.634447968	.623441714
8	.618783392	.606530660	.594520548	.582748252
9	.582748252	.569782825	.557105862	.544710946
10	.548811636	.535261429	.522045777	.509156421
11	.516851334	.502831578	.489192112	.475922620
12	.486752256	.472366553	.458406011	.444858066
13	.458406011	.443747310	.429557358	.415821166
14	.431710523	.416862020	.402524224	.388679571
15	.406569660	.391605627	.377192354	.363309569
16	.382892886	.367879441	.353454682	.339595526
17	.360594940	.345590753	.331210882	.317429352
18	.339595526	.324652467	.310366941	.296710014
19	.319819022	.304982769	.290834762	.277343075
20	.301194212	.286504797	.272531793	.259240261
21	.283654026	.269146349	.255380676	.242319058
22	.267135302	.252839596	.239308922	.226502341
23	.251578553	.237520819	.224248605	.211718017
24	.236927759	.223130160	.210136071	.197898699
25	.223130160	.209611387	.196911675	.184981400
26	.210136071	.196911675	.184519524	.172907242
27	.197898699	.184981400	.172907242	.161621192
28	.186373976	.173773943	.162025751	.151071809
29	.175520401	.163245512	.151829059	.141211008
30	.165298888	.153354967	.142274072	.131993843
31	.155672630	.144063659	.133320403	.123378304
32	.146606962	.135335283	.124930212	.115325121
33	.138069237	.127135733	.117068037	.107797588
34	.130028711	.119432968	.109700649	.100761393
35	.122456428	.112196891	.102796908	.094184467
36	.115325121	.105399225	.096327638	.088036833
37	.108609109	.099013408	.090265496	.082290468
38	.102284207	.093014489	.084584859	.076919181
39	.096327638	.087379026	.079261719	.071898491
40	.090717953	.082084999	.074273578	.067205513
41	.085434951	.077111720	.069599354	.062818856
42	.080459607	.072439757	.065219290	.058718526
43	.075774004	.068050854	.061114874	.054885834
44	.071361270	.063927861	.057268760	.051303310
45	.067205513	.060054668	.053664692	.047954626
46	.063291768	.056416140	.050287437	.044824519
47	.059605943	.052998058	.047122721	.041898720
48	.056134763	.049787068	.044157168	.039163895
49	.052865729	.046770622	.041378246	.036607578
50	.049787068	.043936934	.038774208	.034218118
60	.027323722	.023517746	.020241911	.017422375
70	.014995577	.012588142	.010567204	.008870714
80	.008229747	.006737947	.005516564	.004516581
90	.004516581	.003606563	.002879899	.002299646
100	.002478752	.001930454	.001503439	.001170880

	7	7.25	7.5	7.75
1	.932393820	.930065747	.927743486	.925427024
2	.869358235	.865022293	.860707976	.856415177
3	.810584246	.804527605	.798516219	.792549749
4	.755783741	.748263568	.740818221	.733446956
5	.704688090	.695934314	.687289279	.678751634
6	.657046820	.647264667	.637628152	.628135105
7	.612626394	.601998696	.591555364	.581293201
8	.571209064	.559898367	.548811636	.537944438
9	.532591801	.520742292	.509156421	.497828320
10	.496585304	.484324569	.472366553	.460703781
11	.463013068	.450453692	.438234992	.426347729
12	.431710523	.418951549	.406569660	.394553710
13	.402524224	.389652485	.377192354	.365130666
14	.375311099	.362402430	.349937749	.337901786
15	.349937749	.337058086	.324652467	.312703444
16	.326279795	.313486181	.301194212	.289384218
17	.304221264	.291562759	.279430968	.267803976
18	.283654026	.271172535	.259240261	.247833036
19	.264477261	.252208286	.240508463	.229351389
20	.246596964	.234570288	.223130160	.212247974
21	.229925485	.218165790	.207007553	.196420011
22	.214381101	.202908529	.192049909	.181772386
23	.199887614	.188718272	.178173052	.168217078
24	.186373976	.175520401	.165298888	.155672630
25	.173773943	.163245512	.153354967	.144063659
26	.162025751	.151829059	.142274072	.133320403
27	.151071809	.141211008	.131993843	.123378304
28	.140858421	.131335521	.122456428	.114177617
29	.131335521	.122150670	.113608154	.105663052
30	.122456428	.113608154	.105399225	.097783444
31	.114177617	.105663052	.097783444	.090491442
32	.106458504	.098273586	.090717953	.083743226
33	.099261252	.091400896	.084162990	.077498244
34	.092550578	.085008842	.078081666	.071718969
35	.086293586	.079063812	.072439757	.066370672
36	.080459607	.073534544	.067205513	.061421214
37	.075020040	.068391960	.062349477	.056840851
38	.069948222	.063609020	.057844321	.052602060
39	.065219290	.059160570	.053664692	.048679368
40	.060810063	.055023220	.049787068	.045049202
41	.056698927	.051175212	.046189628	.041689749
42	.052865729	.047596312	.042852127	.038580821
43	.049291679	.044267699	.039755782	.035703734
44	.045959257	.041171871	.036883167	.033041200
45	.042852127	.038292547	.034218118	.030577220
46	.039955058	.035614586	.031745636	.028296985
47	.037253849	.033123907	.029451807	.026186795
48	.034735259	.030807411	.027323722	.024233968
49	.032386941	.028652918	.025349406	.022426769
50	.030197383	.026649097	.023517746	.020754338
60	.014995577	.012906813	.011108997	.009561602
70	.007146583	.006251086	.005247518	.004405066
80	.003097864	.003027555	.002478752	.002029431
90	.001836305	.001466319	.001170880	.000934966
100	.000911882	.000710174	.000553084	.000430743

	8	8.25	8.5	8.75
1	.923116346	.920811438	.918512284	.916218872
2	.852143789	.847893704	.843664817	.839457021
3	.786627861	.780750221	.774916498	.769126364
4	.726149037	.718923733	.711770323	.704688090
5	.670320046	.661993197	.653769785	.645648526
6	.618783392	.609570907	.600495579	.591555364
7	.571209064	.561299864	.551562566	.541994188
8	.527292424	.516851334	.506616992	.496585304
9	.486752256	.475922620	.465333931	.454980827
10	.449328964	.438234992	.427414932	.416862020
11	.414782912	.403531794	.392585866	.381936849
12	.382892886	.371576691	.360594940	.349937749
13	.353454682	.342152067	.331210882	.320619570
14	.326279795	.315057537	.304221264	.293757700
15	.301194212	.290108584	.279430968	.269146349
16	.278037300	.267135302	.256660777	.246596964
17	.256660777	.245981242	.235746077	.225936792
18	.236927759	.226502341	.216535667	.207007553
19	.218711887	.208565946	.198890670	.189664226
20	.201896518	.192049909	.182683524	.173773943
21	.186373976	.176841752	.167797061	.159214966
22	.172044864	.162837908	.154123662	.145875757
23	.158817426	.149943009	.141564477	.133654121
24	.146606962	.138069237	.130028711	.122456428
25	.135335283	.127135733	.119432968	.112196891
26	.124930212	.117068037	.109700649	.102796908
27	.115325121	.107797588	.100761393	.094184467
28	.106458504	.099261252	.092550578	.086293586
29	.098273586	.091400896	.085008842	.079063812
30	.090717953	.084162990	.078081666	.072439757
31	.083743226	.077498244	.071718969	.066370672
32	.077304740	.071361270	.065874754	.060810063
33	.071361270	.065710273	.060506771	.055715327
34	.065874754	.060506771	.055576213	.051047434
35	.060810063	.055715327	.051047434	.046770622
36	.056134763	.051303310	.046887695	.042852127
37	.051818917	.047240675	.043066924	.039261927
38	.047834889	.043499754	.039557499	.035972519
39	.044157168	.040055071	.036334049	.032958701
40	.040762204	.036883167	.033373270	.030197383
41	.037628257	.033962442	.030653758	.027667413
42	.034735259	.031273005	.028155854	.025349406
43	.032064685	.028796541	.025861497	.023225604
44	.029599435	.026516184	.023754103	.021279736
45	.027323722	.024416406	.021818436	.019496896
46	.025222975	.022482906	.020040501	.017863124
47	.023283740	.020702517	.018407446	.016366806
48	.021493601	.019063114	.016907466	.014995577
49	.019841095	.017553534	.015529715	.013739230
50	.018315639	.016163495	.014261234	.012588142
60	.008229747	.007083409	.006096747	.005247518
70	.003697864	.003104198	.002605841	.002187491
80	.001661557	.001360368	.001113775	.000911882
90	.000746586	.000596161	.000476041	.000380129
100	.000335463	.000261259	.000203468	.000158461

	9	9.25	9.5	9.75
1	.913931185	.911649211	.909372934	.907102342
2	.835270211	.831104284	.826959134	.822834658
3	.763379494	.757675565	.752014254	.746395245
4	.697676326	.690734331	.683861409	.677056875
5	.637628152	.629707408	.621885057	.614159876
6	.582748252	.574072261	.565525439	.557105862
7	.532591801	.523352524	.514273528	.505352032
8	.486752256	.477113916	.467666427	.458406011
9	.444858066	.434960525	.425283191	.415821166
10	.406569660	.396531419	.386741023	.377192354
11	.371576691	.361497555	.351691819	.342152067
12	.339595526	.329558961	.319819022	.310366941
13	.310366941	.300442167	.290834762	.281534579
14	.283654026	.273897864	.264477261	.255380676
15	.259240261	.249698772	.240508463	.231656409
16	.236927759	.227637688	.218711887	.210136071
17	.216535667	.207525719	.198890670	.190614922
18	.197898699	.189190658	.180865793	.172907242
19	.180865793	.172475514	.164474457	.156844564
20	.165298888	.157237166	.149568619	.142274072
21	.151071809	.143345139	.136013654	.129057143
22	.138069237	.130680483	.123687136	.117068037
23	.126185782	.119134759	.112477734	.106192691
24	.115325121	.108609109	.102284207	.096327638
25	.105399225	.099013408	.093014489	.087379026
26	.096327638	.090265496	.084584859	.079261719
27	.088036833	.082290468	.076919181	.071898491
28	.080459607	.075020040	.069948222	.065219290
29	.073534544	.068391960	.063609020	.059160570
30	.067205513	.062349477	.057844321	.053664692
31	.061421214	.056840851	.052602060	.048679368
32	.056134763	.051818917	.047834889	.044157168
33	.051303310	.047240675	.043499754	.040055071
34	.046887695	.043066924	.039557499	.036334049
35	.042852127	.039261927	.035972519	.032958701
36	.039163895	.035793105	.032712435	.029896914
37	.035793105	.032630756	.029747803	.027119561
38	.032712435	.029747803	.027051847	.024600217
39	.029896914	.027119561	.024600217	.022314915
40	.027323722	.024723526	.022370772	.020241911
41	.024972002	.022539183	.020343374	.018361485
42	.022822691	.020547829	.018499714	.016655746
43	.020858369	.018732412	.016823139	.015108466
44	.019063114	.017077389	.015298508	.013704925
45	.017422375	.015568588	.013912049	.012431770
46	.015922852	.014193091	.012651241	.011276888
47	.014552391	.012939120	.011504696	.010229291
48	.013299884	.011795939	.010462059	.009279014
49	.012155178	.010753758	.009513913	.008417015
50	.011108997	.009803655	.008651695	.007635094
60	.004516581	.003887457	.003345965	.002879899
70	.001836305	.001541499	.001294022	.001086276
80	.000746586	.000611253	.000500451	.000409735
90	.000303539	.000242381	.000193545	.000154549
100	.000123410	.000096112	.000074852	.000058295

	10	10.25	10.5	10.75
1	.904837418	.902578150	.900324523	.898076522
2	.818730753	.814647316	.810584246	.806541440
3	.740818221	.735282868	.729788874	.724335932
4	.670320046	.663650250	.657046820	.650509095
5	.606530660	.598996215	.591555364	.584206946
6	.548811636	.540640895	.532591801	.524662542
7	.496585304	.487970659	.479505459	.471187111
8	.449328964	.440431655	.431710523	.423162082
9	.406569660	.397523988	.388679571	.380031931
10	.367879441	.358796465	.349937749	.341297755
11	.332871084	.323841850	.315057537	.306511501
12	.301194212	.292292578	.283654026	.275270783
13	.272531793	.263816894	.255380676	.247214228
14	.246596964	.238115364	.229925485	.222017294
15	.223130160	.214917725	.207007553	.199388519
16	.201896518	.193980042	.186373976	.179066148
17	.182683524	.175082148	.167797061	.160815103
18	.165298888	.158025321	.151071809	.144424269
19	.149568619	.142630202	.136013654	.129704045
20	.135335283	.128734904	.122456428	.116484158
21	.122456428	.116193311	.110250525	.104611687
22	.110803158	.104873544	.099261252	.093949300
23	.100258844	.094656569	.089367339	.084373661
24	.090717953	.085434951	.080459607	.075774004
25	.082084999	.077111720	.072439757	.068050854
26	.074273578	.069599354	.065219290	.061114874
27	.067205513	.062818856	.058718526	.054885834
28	.060810063	.056698927	.052865729	.049291679
29	.055023220	.051175212	.047596312	.044267699
30	.049787068	.046189628	.042852127	.039755782
31	.045049202	.041689749	.038580821	.035703734
32	.040762204	.037628257	.034735259	.032064685
33	.036883167	.033962442	.031273005	.028796541
34	.033373270	.030653758	.028155854	.025861497
35	.030197383	.027667413	.025349406	.023225604
36	.027323722	.024972002	.022822691	.020858369
37	.024723526	.022539183	.020547829	.018732412
38	.022370772	.020343374	.018499714	.016823139
39	.020241911	.018361485	.016655746	.015108466
40	.018315639	.016572675	.014995577	.013568559
41	.016572675	.014958135	.013500886	.012185604
42	.014995577	.013500886	.012155178	.010943605
43	.013568559	.012185604	.010943605	.009828195
44	.012277340	.010998460	.009852796	.008826471
45	.011108997	.009926970	.008870714	.007926846
46	.010051836	.008959866	.007986521	.007118915
47	.009095277	.008086979	.007190461	.006393330
48	.008229747	.007299131	.006473748	.005741700
49	.007446583	.006588036	.005828474	.005156486
50	.006737947	.005946217	.005247518	.004630919
60	.002478752	.002133482	.001836305	.001580522
70	.000911882	.000765486	.000642592	.000539429
80	.000335463	.000274654	.000224867	.000184106
90	.000123410	.000098545	.000078690	.000062835
100	.000045400	.000035358	.000027536	.000021445

	11	11.25	11.5	11.75
1	.895834135	.893597347	.891366144	.889140512
2	.802518798	.798516219	.794533603	.790570850
3	.718923733	.713551975	.708220353	.702928570
4	.644036421	.637628152	.631283646	.625002268
5	.576949810	.569782825	.562704869	.555714837
6	.516851334	.509156421	.501576069	.494108574
7	.463013068	.454980827	.447087927	.439331951
8	.414782912	.406569660	.398519041	.390627835
9	.371576691	.363309569	.355226381	.347323033
10	.332871084	.324652467	.316636769	.308818980
11	.298197279	.290108584	.282239296	.274583466
12	.267135302	.259240261	.251578553	.244143283
13	.239308922	.231656409	.224248605	.217077684
14	.214381101	.207007553	.199887614	.193012563
15	.192049909	.184981400	.178173052	.171615289
16	.172044864	.165298888	.158817426	.152590106
17	.154123662	.147710648	.141564477	.135674045
18	.138069237	.131993843	.126185782	.120633290
19	.123687136	.117949348	.112477734	.107259945
20	.110803158	.105399225	.100258844	.095369162
21	.099261252	.094184467	.089367339	.084796586
22	.088921617	.084162990	.079659020	.075396080
23	.079659020	.075207825	.071005354	.067037709
24	.071361270	.067205513	.063291768	.059605943
25	.063927861	.060054668	.056416140	.052998058
26	.057268760	.053664692	.050287437	.047122721
27	.051303310	.047954626	.044824519	.041898720
28	.045959257	.042852127	.039955058	.037253849
29	.041171871	.038292547	.035614586	.033123907
30	.036883167	.034218118	.031745636	.029451807
31	.033041200	.030577220	.028296985	.026186795
32	.029599435	.027323722	.025222975	.023283740
33	.026516184	.024416406	.022482906	.020702517
34	.023754103	.021818436	.020040501	.018407446
35	.021279736	.019496896	.017863424	.016366806
36	.019063114	.017422375	.015922852	.014552391
37	.017077389	.015568588	.014193091	.012939120
38	.015298508	.013912049	.012651241	.011504696
39	.013704925	.012431770	.011276888	.010229291
40	.012277340	.011108997	.010051836	.009095277
41	.010998460	.009926970	.008959866	.008086979
42	.009852796	.008870714	.007986521	.007190461
43	.008826471	.007926846	.007118915	.006393330
44	.007907054	.007083409	.006345560	.005684569
45	.007083409	.006329715	.005656217	.005054380
46	.006345560	.005656217	.005041760	.004494054
47	.005684569	.005054380	.004494054	.003995846
48	.005092431	.004516581	.004005848	.003552868
49	.004561973	.004036005	.003570677	.003158999
50	.004086771	.003606563	.003182781	.002808794
60	.001360368	.001170880	.001007785	.000867409
70	.000452827	.000380129	.000319102	.000267872
80	.000150733	.000123410	.000101039	.000082724
90	.000050175	.000040065	.000031993	.000025547
100	.00001[illegible]762	.000013007	.000010130	.000007889

	12	12.25	12.5	12.75
1	.886920437	.884705905	.882496903	.880293416
2	.786627861	.782704538	.778800783	.774916498
3	.697676326	.692463327	.687289279	.682153891
4	.618783392	.612626394	.606530660	.600495579
5	.548811636	.541994188	.535261429	.528612304
6	.486752256	.479505459	.472366553	.465333931
7	.431710523	.424221311	.416862020	.409630396
8	.382892886	.375311099	.367879441	.360594940
9	.339595526	.332039945	.324652467	.317429352
10	.301194212	.293757700	.286504797	.279430968
11	.267135302	.259889172	.252839596	.245981242
12	.236927759	.229925485	.223130160	.216535667
13	.210136071	.203416434	.196911675	.190614922
14	.186373976	.179963721	.173773943	.167797061
15	.165298888	.159214966	.153354967	.147710648
16	.146606962	.140858421	.135335283	.130028711
17	.130028711	.124618277	.119432968	.114463418
18	.115325121	.110250525	.105399225	.100761393
19	.102284207	.097539291	.093014489	.088699591
20	.090717953	.086293586	.082084999	.078081666
21	.080459607	.076344446	.072439757	.068734776
22	.071361270	.067542382	.063927861	.060506771
23	.063291768	.059755144	.056416140	.053263712
24	.056134763	.052865729	.049787068	.046887695
25	.049787068	.046770622	.043936934	.041274929
26	.044157168	.041378246	.038774208	.036334049
27	.039163895	.036607578	.034218118	.031984624
28	.034735259	.032386941	.030197383	.028155854
29	.030807411	.028652918	.026649097	.024785413
30	.027323722	.025349406	.023517746	.021818436
31	.024233968	.022426769	.020754338	.019206625
32	.021493601	.019841095	.018315639	.016907466
33	.019063114	.017553534	.016163495	.014883531
34	.016907466	.015529715	.014264234	.013101874
35	.014995577	.013739230	.012588142	.011533493
36	.013299884	.012155178	.011108997	.010152858
37	.011795939	.010753758	.009803655	.008937494
38	.010462059	.009513913	.008651695	.007867617
39	.009279014	.008417015	.007635094	.006925812
40	.008229747	.007446583	.006737947	.006096747
41	.007299131	.006588036	.005946217	.005366926
42	.006473748	.005828474	.005247518	.004724469
43	.005741700	.005156486	.004630919	.004158919
44	.005092431	.004561973	.004086771	.003661069
45	.004516581	.004036005	.003606563	.003222815
46	.004005848	.003570677	.003182781	.002837023
47	.003552868	.003158999	.002808794	.002497413
48	.003151112	.002794785	.002478752	.002198456
49	.002794785	.002472563	.002187491	.001935286
50	.002478752	.002187491	.001930454	.001703620
60	.000746586	.000642592	.000553084	.000476044
70	.000224867	.000188766	.000158461	.000133021
80	.000067729	.000055452	.000045400	.000037170
90	.000020400	.000016289	.000013007	.000010387
100	.000006144	.000004785	.000003727	.000002902

	13	13.25	13.5	13.75
1	.878095431	.875902934	.873715912	.871534350
2	.771051586	.767205950	.763379494	.759572123
3	.677056875	.671997943	.666976811	.661993197
4	.594520548	.588604970	.582748252	.576949810
5	.522045777	.515560820	.509156421	.502831578
6	.458406011	.451581235	.444858066	.438234992
7	.402524224	.395541329	.388679571	.381936849
8	.353454682	.346455810	.339595526	.332871084
9	.310366941	.303461661	.296710014	.290108584
10	.272531793	.265802959	.259240261	.252839596
11	.239308922	.232817592	.226502341	.220358393
12	.210136071	.203925612	.197898699	.192049909
13	.184519524	.178619042	.172907242	.167378092
14	.162025751	.156452943	.151071809	.145875757
15	.142274072	.137037592	.131993843	.127135733
16	.124930212	.120031629	.115325121	.110803158
17	.109700649	.105136056	.100761393	.096568759
18	.096327638	.092088980	.088036833	.084162990
19	.084584859	.080661007	.076919181	.073350937
20	.074273578	.070651213	.067205513	.063927861
21	.065219290	.061883605	.058718526	.055715327
22	.057268760	.054204031	.051303310	.048557821
23	.050287437	.047477470	.044824519	.042319809
24	.044157168	.041585655	.039163895	.036883167
25	.038774208	.036424997	.034218118	.032144947
26	.034047455	.031904762	.029896914	.028015426
27	.029896914	.027945475	.026121410	.024416406
28	.026252344	.024477523	.022822691	.021279736
29	.023052063	.021439934	.019940549	.018546021
30	.020241911	.018779301	.017422375	.016163495
31	.017774330	.016448845	.015222206	.014087041
32	.015607558	.014407592	.013299884	.012277340
33	.013704925	.012619652	.011620320	.010700123
34	.012034232	.011053590	.010152858	.009325525
35	.010567204	.009681872	.008870714	.008127515
36	.009279014	.008480380	.007750484	.007083409
37	.008147860	.007427990	.006771721	.006173434
38	.007154598	.006506198	.005916560	.005380360
39	.006282420	.005698798	.005169393	.004689169
40	.005516564	.004991594	.004516581	.004086771
41	.004844070	.004372152	.003946209	.003561762
42	.004253556	.003829581	.003447865	.003104198
43	.003735028	.003354341	.003012455	.002705415
44	.003279711	.002938077	.002632030	.002357862
45	.002879899	.002573470	.002299646	.002054958
46	.002528826	.002254110	.002009237	.001790966
47	.002220551	.001974382	.001755503	.001560889
48	.001949856	.001729367	.001533811	.001360368
49	.001712159	.001514757	.001340115	.001185607
50	.001503439	.001326780	.001170880	.001033298
60	.000409735	.000352662	.000303539	.000261259
70	.000111666	.000093739	.000078690	.000066057
80	.000030432	.000024916	.000020400	.000016702
90	.000008294	.000006623	.000005288	.000004223
100	.000002260	.000001760	.000001371	.000001068

Таблица П.10. Коэффициенты наращения годовой ренты (сложные проценты)

Число периодов	Ставка процентов			
	.25 (1/4)	.333 (1/3)	.417 (5/12)	.5 (1/2)
1	1	1	1	1
2	2.002500000	2.003330000	2.004170000	2.005000000
3	3.007506250	3.010001089	3.012527389	3.015025000
4	4.015025016	4.020024393	4.025089628	4.030100125
5	5.025062578	5.033411074	5.041874252	5.050250626
6	6.037625235	6.050172333	6.062898867	6.075501879
7	7.052719298	7.070319406	7.088181156	7.105879388
8	8.070351096	8.093863570	8.117738871	8.141408785
9	9.090526974	9.120816136	9.151589842	9.182115829
10	10.11325329	10.15118845	10.18975197	10.22802641
11	11.13853642	11.18499191	11.23224324	11.27916654
12	12.16638277	12.22223793	12.27908169	12.33556237
13	13.19679872	13.26293799	13.33028546	13.39724018
14	14.22979072	14.30710357	14.38587275	14.46422639
15	15.26536520	15.35474622	15.44586184	15.53654752
16	16.30352861	16.40587753	16.51027109	16.61423026
17	17.34428743	17.46050910	17.57911892	17.69730141
18	18.38764815	18.51865260	18.65242384	18.78578791
19	19.43361727	19.58031971	19.73020445	19.87971685
20	20.48220131	20.64552218	20.81247940	20.97911544
21	21.53340682	21.71427176	21.89926744	22.08401101
22	22.58724033	22.78658029	22.99058739	23.19443107
23	23.64370843	23.86245960	24.08645814	24.31040322
24	24.70281770	24.94192159	25.18689867	25.43195524
25	25.76457475	26.02497819	26.29192803	26.55911502
26	26.82898619	27.11164137	27.40156537	27.69191059
27	27.89605865	28.20192313	28.51582990	28.83037015
28	28.96579880	29.29583554	29.63474091	29.97452200
29	30.03821330	30.39339067	30.75831778	31.12439461
30	31.11330883	31.49460066	31.88657997	32.28001658
31	32.19109210	32.59947768	33.01954701	33.44141666
32	33.27156983	33.70803394	34.15723852	34.60862375
33	34.35474876	34.82028169	35.29967420	35.78166686
34	35.44063563	35.93623323	36.44687384	36.96057520
35	36.52923722	37.05590089	37.59885731	38.14537807
36	37.62056031	38.17929704	38.75564454	39.33610496
37	38.71461171	39.30643410	39.91725558	40.53278549
38	39.81139824	40.43732452	41.08371054	41.73544942
39	40.91092673	41.57198081	42.25502961	42.94412666
40	42.01320405	42.71041551	43.43123308	44.15884730
41	43.11823706	43.85264119	44.61234132	45.37964153
42	44.22603265	44.99867049	45.79837479	46.60653974
43	45.33659774	46.14851606	46.98935401	47.83957244
44	46.44993923	47.30219062	48.18529962	49.07877030
45	47.56606408	48.45970692	49.38623232	50.32416415
46	48.68497924	49.62107774	50.59217290	51.57578497
47	49.80669169	50.78631593	51.80314226	52.83366390
48	50.93120842	51.95543436	53.01916137	54.09783222
49	52.05853644	53.12844596	54.24025127	55.36832138
50	53.18868278	54.30536368	55.46643312	56.64516299
60	64.64671262	66.29226119	68.01302404	69.77003051
70	76.39443736	78.68435728	81.09273549	83.56610549
80	88.43918139	91.49534907	94.72822043	98.06771357
90	100.7884543	104.7393967	108.9430944	113.3109358
100	113.4499555	118.4311389	123.7619763	129.3336984

	.583 (7/12)	.667 (2/3)	.75 (3/4)	.833 (5/6)
1	1	1	1	1
2	2.005830000	2.006670000	2.007500000	2.008330000
3	3.017523989	3.020054489	3.022556250	3.025059389
4	4.035116154	4.040198252	4.045225422	4.050258134
5	5.058640881	5.067146375	5.075564613	5.083996784
6	6.088132757	6.100944241	6.113631347	6.126346477
7	7.123626571	7.141637539	7.159483582	7.177378943
8	8.165157314	8.189272261	8.213179709	8.237166510
9	9.212760181	9.243894707	9.274778557	9.305782107
10	10.26647057	10.30555149	10.34433940	10.38329927
11	11.32632410	11.37428951	11.42192194	11.46979215
12	12.39235657	12.45015602	12.50758636	12.56533552
13	13.46460400	13.53319857	13.60139325	13.67000477
14	14.54310265	14.62346500	14.70340370	14.78387591
15	15.62788893	15.72100351	15.81367923	15.90702559
16	16.71899953	16.82586260	16.93228183	17.03953112
17	17.81647129	17.93809111	18.05927394	18.18147041
18	18.92034132	19.05773818	19.19471849	19.33292206
19	20.03064691	20.18485329	20.33867888	20.49396530
20	21.14742558	21.31948626	21.49121897	21.66468003
21	22.27071507	22.46168723	22.65240312	22.84514682
22	23.40055334	23.61150669	23.82229614	24.03544689
23	24.53697857	24.76899544	25.00096336	25.23566216
24	25.68002915	25.93420464	26.18847059	26.44587523
25	26.82974372	27.10718578	27.38488412	27.66616937
26	27.98616113	28.28799071	28.59027075	28.89662856
27	29.14932045	29.47667161	29.80469778	30.13733748
28	30.31926099	30.67328101	31.02823301	31.38838150
29	31.49602228	31.87787179	32.26094476	32.64984671
30	32.67964409	33.09049720	33.50290184	33.92181994
31	33.87016641	34.31121081	34.75417361	35.20438870
32	35.06762948	35.54006659	36.01482991	36.49764126
33	36.27207376	36.77711884	37.28494113	37.80166661
34	37.48353995	38.02242222	38.56457819	39.11655449
35	38.70206899	39.27603177	39.85381253	40.44239539
36	39.92770205	40.53800291	41.15271612	41.77928054
37	41.16048056	41.80839139	42.46136149	43.12730195
38	42.40044616	43.08725336	43.77982170	44.48655237
39	43.64764076	44.37464534	45.10817037	45.85712536
40	44.90210651	45.67062422	46.44648164	47.23911521
41	46.16388579	46.97524728	47.79483026	48.63261704
42	47.43302124	48.28857218	49.15329148	50.03772674
43	48.70955576	49.61065696	50.52194117	51.45454100
44	49.99353247	50.94156004	51.90085573	52.88315733
45	51.28499476	52.28134025	53.29011215	54.32367403
46	52.58398628	53.63005679	54.68978799	55.77619024
47	53.89055092	54.98776926	56.09996140	57.24080590
48	55.20473283	56.35453769	57.52071111	58.71762181
49	56.52657642	57.73042245	58.95211644	60.20673960
50	57.85612636	59.11548437	60.39425732	61.70826174
60	71.58548995	73.48451770	75.42413693	77.42888647
70	86.13660433	88.84125005	91.62007285	94.50923336
80	101.5586542	105.2535739	109.0725307	113.0669087
90	117.9037680	122.7940485	127.8789947	[illegible]
100	135.2271945	141.5402208	148.1445120	[illegible]

	1.0	1.25	1.5	1.75
1	1	1	1	1
2	2.010000000	2.012500000	2.015000000	2.017500000
3	3.030100000	3.037656250	3.045225000	3.052806250
4	4.060401000	4.075626953	4.090903375	4.106230359
5	5.101005010	5.126572290	5.152266926	5.178089391
6	6.152015060	6.190654444	6.229550930	6.268705955
7	7.213535211	7.268037624	7.322994193	7.378408309
8	8.285670563	8.358888095	8.432839106	8.507530455
9	9.368527268	9.463374196	9.559331693	9.656412238
10	10.46221254	10.58166637	10.70272167	10.82539945
11	11.56683467	11.71393720	11.86326249	12.01484394
12	12.68250301	12.86036142	13.04121143	13.22510371
13	13.80932804	14.02111594	14.23682960	14.45654303
14	14.94742132	15.19637988	15.45038205	15.70953253
15	16.09689554	16.38633463	16.68213778	16.98444935
16	17.25786449	17.59116382	17.93236984	18.28167721
17	18.43044314	18.81105336	19.20135539	19.60160656
18	19.61474757	20.04619153	20.48937572	20.94463468
19	20.81089504	21.29676893	21.79671636	22.31116578
20	22.01900399	22.56297854	23.12366710	23.70161119
21	23.23919403	23.84501577	24.47052211	25.11638938
22	24.47158598	25.14307847	25.83757994	26.55592620
23	25.71630183	26.45736695	27.22514364	28.02065490
24	26.97346485	27.78808403	28.63352080	29.51101637
25	28.24319950	29.13543508	30.06302361	31.02745915
26	29.52563150	30.49962802	31.51396896	32.57043969
27	30.82088781	31.88087337	32.98667850	34.14042238
28	32.12909669	33.27938429	34.48147867	35.73787977
29	33.45038766	34.69537659	35.99870085	37.36329267
30	34.78489153	36.12906880	37.53868137	39.01715029
31	36.13274045	37.58068216	39.10176159	40.69995042
32	37.49406785	39.05044069	40.68828801	42.41219955
33	38.86900853	40.53857120	42.29861233	44.15441305
34	40.25769862	42.04530334	43.93309152	45.92711527
35	41.66027560	43.57086963	45.59208789	47.73083979
36	43.07687836	45.11550550	47.27596921	49.56612949
37	44.50764714	46.67944932	48.98510874	51.43353675
38	45.95272361	48.26294243	50.71988538	53.33362365
39	47.41225085	49.86622921	52.48068366	55.26696206
40	48.88637336	51.48955708	54.26789391	57.23413390
41	50.37523709	53.13317654	56.08191232	59.23573124
42	51.87898946	54.79734125	57.92314100	61.27235654
43	53.39777936	56.48230801	59.79198812	63.34462278
44	54.93175715	58.18833687	61.68886794	65.45315367
45	56.48107472	59.91569108	63.61420096	67.59858386
46	58.04588547	61.66463721	65.56841398	69.78155908
47	59.62634432	63.43544518	67.55194018	72.00273637
48	61.22260777	65.22838824	69.56521929	74.26278425
49	62.83483385	67.04374310	71.60869758	76.56238298
50	64.46318218	68.88178989	73.68282804	78.90222468
60	81.66966986	88.57450776	96.21465171	104.6752159
70	100.6763368	110.8719978	122.3637529	135.3307583
80	121.6715217	136.1187953	152.7108525	171.7938242
90	144.8632675	164.7050076	187.9299004	215.1646172
100	170.4813829	197.0723420	228.8030433	266.7517679

	2.0	2.25	2.5	2.75
1	1	1	1	1
2	2.020000000	2.022500000	2.025000000	2.027500000
3	3.060400000	3.068006250	3.075625000	3.083256250
4	4.121608000	4.137036391	4.152515625	4.168045797
5	5.204040160	5.230119709	5.256328516	5.282667056
6	6.308120963	6.347797403	6.387736729	6.427940400
7	7.434283382	7.490622844	7.547430147	7.604708761
8	8.582969050	8.659161858	8.736115900	8.813838252
9	9.754628431	9.853993000	9.954518798	10.05621880
10	10.94972100	11.07570784	11.20338177	11.33276482
11	12.16871542	12.32491127	12.48346631	12.64441585
12	13.41208973	13.60222177	13.79555297	13.99213729
13	14.68033152	14.90827176	15.14044179	15.37692107
14	15.97393815	16.24370788	16.51895284	16.79978639
15	17.29341692	17.60919130	17.93192666	18.26178052
16	18.63928525	19.00539811	19.38022483	19.76397948
17	20.01207096	20.43301957	20.86473045	21.30748892
18	21.41231238	21.89276251	22.38634871	22.89344487
19	22.84055863	23.38534966	23.94600743	24.52301460
20	24.29736980	24.91152003	25.54465761	26.19739750
21	25.78331719	26.47202923	27.18327405	27.91782593
22	27.29898354	28.06764989	28.86285590	29.68556615
23	28.84496321	29.69917201	30.58442730	31.50191921
24	30.42186247	31.36740338	32.34903798	33.36822199
25	32.03029972	33.07316996	34.15776393	35.28584810
26	33.67090572	34.81731628	36.01170803	37.25620892
27	35.34432383	36.60070590	37.91200073	39.28075467
28	37.05121031	38.42422178	39.85980075	41.36097542
29	38.79223451	40.28876677	41.85629577	43.49840224
30	40.56807921	42.19526402	43.90270316	45.69460831
31	42.37944079	44.14465746	46.00027074	47.95121003
32	44.22702961	46.13791226	48.15027751	50.26986831
33	46.11157020	48.17601528	50.35403445	52.65228969
34	48.03380160	50.25997563	52.61288531	55.10022765
35	49.99447763	52.39082508	54.92820744	57.61548391
36	51.99436719	54.56961864	57.30141263	60.19990972
37	54.03425453	56.79743506	59.73394794	62.85540724
38	56.11493962	59.07537735	62.22729664	65.58393094
39	58.23723841	61.40457334	64.78297906	68.38748904
40	60.40198318	63.78617624	67.40255354	71.26814499
41	62.61002284	66.22136521	70.08761737	74.22801898
42	64.86222330	68.71134592	72.83980781	77.26928950
43	67.15946777	71.25735121	75.66080300	80.39419496
44	69.50265712	73.86064161	78.55232308	83.60503532
45	71.89271027	76.52250605	81.51613116	86.90417379
46	74.33056447	79.24426243	84.55403443	90.29403857
47	76.81717576	82.02725834	87.66788530	93.77712463
48	79.35351927	84.87287165	90.85958243	97.35599556
49	81.94058966	87.78251126	94.13107199	101.0332854
50	84.57940145	90.75761776	97.48434879	104.8117008
60	114.0515394	124.4504349	135.9915900	148.8091404
70	149.9779111	166.5396176	185.2841142	206.5184275
80	193.7719578	219.1175688	248.3827126	282.2128735
90	247.1566563	284.7981255	329.1542533	381.4975717
100	312.2323059	366.8465021	432.5486540	511.7244487

	3.0	3.25	3.5	3.75
1	1	1	1	1
2	2.030000000	2.032500000	2.035000000	2.037500000
3	3.090900000	3.098556250	3.106225000	3.113906250
4	4.183627000	4.199259328	4.214942875	4.230677734
5	5.309135810	5.335735256	5.362465876	5.389328149
6	6.468409884	6.509146652	6.550152181	6.591427955
7	7.662462181	7.720693918	7.779407508	7.838606503
8	8.892336046	8.971616471	9.051686770	9.132554247
9	10.15910613	10.26319401	10.36849581	10.47502503
10	11.46387931	11.59674781	11.73139316	11.86783847
11	12.80779569	12.97364212	13.14199192	13.31288241
12	14.19202956	14.39528548	14.60196164	14.81211550
13	15.61779045	15.86313226	16.11303030	16.36756983
14	17.08632416	17.37868406	17.67698636	17.98135370
15	18.59891389	18.94349129	19.29568088	19.65565447
16	20.15688130	20.55915476	20.97102971	21.39274151
17	21.76158774	22.22732729	22.70501575	23.19496932
18	23.41443537	23.94971543	24.49969130	25.06478067
19	25.11686844	25.72808118	26.35718050	27.00470994
20	26.87037449	27.56424382	28.27968181	29.01738656
21	28.67648572	29.46008174	30.26947068	31.10553856
22	30.53678030	31.41753440	32.32890215	33.27199626
23	32.45288370	33.43860426	34.46041373	35.51969612
24	34.42647022	35.52535890	36.66652821	37.85168472
25	36.45926432	37.67993307	38.94985669	40.27112290
26	38.55304225	39.90453089	41.31310168	42.78129001
27	40.70963352	42.20142815	43.75906024	45.38558838
28	42.93092252	44.57297456	46.29062734	48.08754794
29	45.21885020	47.02159623	48.91079930	50.89083099
30	47.57541571	49.54979811	51.62267728	53.79923715
31	50.00267818	52.16016655	54.42947098	56.81670855
32	52.50275852	54.85537196	57.33450247	59.94733512
33	55.07784128	57.63817155	60.34121005	63.19536019
34	57.73017652	60.51141213	63.45315240	66.56518619
35	60.46208181	63.47803302	66.67401274	70.06138067
36	63.27594427	66.54106909	70.00760318	73.68868245
37	66.17422259	69.70365384	73.45786930	77.45200804
38	69.15944927	72.96902259	77.02889472	81.35645834
39	72.23423275	76.34051582	80.72490604	85.40732553
40	75.40125973	79.82158259	84.55027775	89.61010024
41	78.66329753	83.41578402	88.50953747	93.97047900
42	82.02319645	87.12679700	92.60737128	98.49437196
43	85.48389234	90.95841791	96.84862928	103.1879109
44	89.04840911	94.91456649	101.2383313	108.0574576
45	92.71986139	98.99928990	105.7816729	113.1096122
46	96.50145723	103.2167668	110.4840314	118.3512227
47	100.3965009	107.5713117	115.3509725	123.7893935
48	104.4083960	112.0673794	120.3882566	129.4314958
49	108.5406479	116.7095692	125.6018156	135.2851769
50	112.7968673	121.5026302	130.9979102	141.3583710
60	163.0534368	178.8930272	196.5168829	216.1368963
70	230.5940637	257.9135380	288.9378646	324.1951512
80	321.3630185	366.7164292	419.3067868	480.3140779
90	443.3489037	516.5263103	603.2050270	705.9861386
100	607.2877327	722.7991576	862.6116567	1032.048832

	4.0	4.25	4.5	4.75
1	1	1	1	1
2	2.040000000	2.042500000	2.045000000	2.047500000
3	3.121600000	3.129306250	3.137025000	3.144756250
4	4.246464000	4.262301766	4.278191125	4.294132172
5	5.416322560	5.443449591	5.470709726	5.498103450
6	6.632975462	6.674796198	6.716891663	6.759263364
7	7.898294481	7.958475037	8.019151788	8.080328374
8	9.214226260	9.296710226	9.380013619	9.464143971
9	10.58279531	10.69182041	10.80211423	10.91369081
10	12.00610712	12.14622278	12.28820937	12.43209112
11	13.48635141	13.66243725	13.84117879	14.02261545
12	15.02580546	15.24309083	15.46403184	15.68868969
13	16.62683768	16.89092219	17.15991327	17.43390245
14	18.29191119	18.60878638	18.93210937	19.26201281
15	20.02358764	20.39965980	20.78405429	21.17695842
16	21.82453114	22.26664534	22.71933673	23.18286395
17	23.69751239	24.21297777	24.74170689	25.28404998
18	25.64541288	26.24202933	26.85508370	27.48504236
19	27.67122940	28.35731557	29.06356246	29.79058187
20	29.77807858	30.56250149	31.37142277	32.20563451
21	31.96920172	32.86140780	33.78313680	34.73540215
22	34.24796979	35.25801763	36.30337795	37.38533375
23	36.61788858	37.75648338	38.93702996	40.16113710
24	39.08260412	40.36113392	41.68919631	43.06879111
25	41.64590829	43.07648211	44.56521015	46.11455869
26	44.31174462	45.90723260	47.57064460	49.30500023
27	47.08421440	48.85828999	50.71132361	52.64698774
28	49.96758298	51.93476732	53.99333317	56.14771966
29	52.96628630	55.14199493	57.42303316	59.81473634
30	56.08493775	58.48552971	61.00706966	63.65593632
31	59.32833526	61.97116472	64.75238779	67.67959329
32	62.70146867	65.60493922	68.66624524	71.89437398
33	66.20952742	69.39314914	72.75622628	76.30935674
34	69.85790851	73.34235798	77.03025646	80.93405119
35	73.65222486	77.45940819	81.49661800	85.77841862
36	77.59831385	81.75143304	86.16396581	90.85289350
37	81.70224640	86.22586895	91.04134427	96.16840594
38	85.97033626	90.89046838	96.13820476	101.7364052
39	90.40914971	95.75331328	101.4644240	107.5688845
40	95.02551570	100.8228291	107.0303231	113.6784065
41	99.82653633	106.1077993	112.8466876	120.0781308
42	104.8195978	111.6173808	118.9247885	126.7818420
43	110.0123817	117.3611195	125.2764040	133.8039795
44	115.4128770	123.3489671	131.9138422	141.1596685
45	121.0293920	129.5912982	138.8499651	148.8647528
46	126.8705677	136.0989283	146.0982135	156.9358285
47	132.9453904	142.8831328	153.6726331	165.3902804
48	139.2632060	149.9556659	161.5879016	174.2463187
49	145.8337343	157.3287817	169.8593572	183.5230189
50	152.6670837	165.0152550	178.5030283	193.2403622
60	237.9906852	262.3447398	289.4979540	319.7855885
70	364.2904588	409.9171129	461.8696795	521.0588495
80	551.2449767	633.6681800	729.5576985	841.1888678
90	827.9833335	972.9235402	1145.269007	1350.363450
100	1237.623705	1487.306971	1790.855956	2160.218011

	5.0	5.25	5.5	5.75
1	1	1	1	1
2	2.050000000	2.052500000	2.055000000	2.057500000
3	3.152500000	3.160256250	3.168025000	3.175806250
4	4.310125000	4.326169703	4.342266375	4.358415109
5	5.525631250	5.553293613	5.581091026	5.609023978
6	6.801912813	6.844841527	6.888051032	6.931542857
7	8.142008453	8.204195707	8.266893839	8.330106571
8	9.549108876	9.634915982	9.721573000	9.809087699
9	11.02656432	11.14074907	11.25625951	11.37311024
10	12.57789254	12.72563840	12.87535379	13.02706408
11	14.20678716	14.39373441	14.58349825	14.77612027
12	15.91712652	16.14940547	16.38559065	16.62574718
13	17.71298285	17.99724926	18.28679814	18.58172764
14	19.59863199	19.94210484	20.29257203	20.65017698
15	21.57856359	21.98906535	22.40866350	22.83756216
16	23.65749177	24.14349128	24.64113999	25.15072198
17	25.84036636	26.41102457	26.99640269	27.59688850
18	28.13238467	28.79760336	29.48120483	30.18370959
19	30.53900391	31.30947754	32.10267110	32.91927289
20	33.06595410	33.95322511	34.86831801	35.81213108
21	35.71925181	36.73576943	37.78607550	38.87132862
22	38.50521440	39.66439732	40.86430965	42.10643001
23	41.43047512	42.74677818	44.11184669	45.52754974
24	44.50199887	45.99098403	47.53799825	49.14538385
25	47.72709882	49.40551070	51.15258816	52.97124342
26	51.11345376	52.99930001	54.96598051	57.01708991
27	54.66912645	56.78176326	58.98910943	61.29557258
28	58.40258277	60.76280583	63.23351045	65.82006801
29	62.32271191	64.95285313	67.71135353	70.60472192
30	66.43884750	69.36287792	72.43547797	75.66449343
31	70.76078988	74.00442901	77.41942926	81.01520180
32	75.29882937	78.88966154	82.67749787	86.67357590
33	80.06377084	84.03136877	88.22476025	92.65730652
34	85.06695938	89.44301563	94.07712207	98.98510164
35	90.32030735	95.13877395	100.2513638	105.6767450
36	95.83632272	101.1335596	106.7651888	112.7531578
37	101.6281389	107.4430715	113.6372742	120.2364644
38	107.7095458	114.0838327	120.8873242	128.1500611
39	114.0950231	121.0732339	128.5361271	136.5186896
40	120.7997742	128.4295787	136.6056141	145.3685143
41	127.8397630	136.1721316	145.1189228	154.7272038
42	135.2317511	144.3211685	154.1004636	164.6240181
43	142.9933387	152.8980298	163.5759891	175.0898991
44	151.1430056	161.9251764	173.5726685	186.1575683
45	159.7001559	171.4262482	184.1191653	197.8616285
46	168.6851637	181.4261262	195.2457194	210.2386721
47	178.1194218	191.9509978	206.9842339	223.3273958
48	188.0253929	203.0284252	219.3683668	237.1687210
49	198.4266626	214.6874175	232.4336270	251.8059225
50	209.3479957	226.9585070	246.2174764	267.2847630
60	353.5837179	391.3142196	433.4503717	480.5231319
70	588.5285107	665.4753291	753.2712042	853.4890198
80	971.2288213	1122.802384	1299.571387	1505.827313
90	1594.607301	1885.667821	2232.731017	2646.803638
100	2610.025157	3158.200618	3826.702467	4642.435337

	6.0	6.25	6.5	6.75
1	1	1	1	1
2	2.060000000	2.062500000	2.065000000	2.067500000
3	3.183600000	3.191406250	3.199225000	3.207056250
4	4.374616000	4.390869141	4.407174625	4.423532547
5	5.637092960	5.665298462	5.693640976	5.722120994
6	6.975318538	7.019379616	7.063727639	7.108364161
7	8.393837650	8.458090842	8.522869936	8.588178742
8	9.897467909	9.986721519	10.07685648	10.16788081
9	11.49131598	11.61089161	11.73185215	11.85421276
10	13.18079494	13.33657234	13.49442254	13.65437212
11	14.97164264	15.17010811	15.37156001	15.57604224
12	16.86994120	17.11823987	17.37071141	17.62742509
13	18.88213767	19.18812986	19.49980765	19.81727629
14	21.01506593	21.38738798	21.76729515	22.15494244
15	23.27596988	23.72409973	24.18216933	24.65040105
16	25.67252808	26.20685596	26.75401034	27.31430312
17	28.21287976	28.84478446	29.49302101	30.15801858
18	30.90565255	31.64758348	32.41006738	33.19368484
19	33.75999170	34.62555745	35.51672176	36.43425856
20	36.78559120	37.78965479	38.82530867	39.89357101
21	39.99272668	41.15150822	42.34895373	43.58638706
22	43.39229028	44.72347748	46.10163573	47.52846818
23	46.99582769	48.51869482	50.09824205	51.73663979
24	50.81557735	52.55111325	54.35462778	56.22886297
25	54.86451200	56.83555783	58.88767859	61.02431122
26	59.15638272	61.38778019	63.71537769	66.14345223
27	63.70576568	66.22451645	68.85687725	71.60813526
28	68.52811162	71.36354873	74.33257427	77.44168439
29	73.63979832	76.82377053	80.16419159	83.66899808
30	79.05818622	82.62525619	86.37486405	90.31665545
31	84.80167739	88.78933470	92.98923021	97.41302970
32	90.88977803	95.33866812	100.0335302	104.9884092
33	97.34316471	102.2973349	107.5357096	113.0751268
34	104.1837546	109.6909183	115.5255308	121.7076979
35	111.4347799	117.5466007	124.0346903	130.9229675
36	119.1208667	125.8932632	133.0969451	140.7602678
37	127.2681187	134.7615922	142.7482466	151.2615859
38	135.9042058	144.1841917	153.0268826	162.4717429
39	145.0584581	154.1957037	163.9736300	174.4385856
40	154.7619656	164.8329352	175.6319159	187.2131901
41	165.0476836	176.1349936	188.0479904	200.8500804
42	175.9505446	188.1434307	201.2711098	215.4074608
43	187.5075772	200.9023951	215.3537320	230.9474645
44	199.7580319	214.4587948	230.3517245	247.5364183
45	212.7435138	228.8624695	246.3245866	265.2451265
46	226.5081246	244.1663739	263.3356848	284.1491726
47	241.0986121	260.4267722	281.4525043	304.3292417
48	256.5645288	277.7034455	300.7469170	325.8714655
49	272.9584006	296.0599108	321.2954666	348.8677895
50	290.3359046	315.5636552	343.1796720	373.4163653
60	533.1281809	591.9338224	657.6898421	731.2374129
70	967.9321696	1098.668410	1248.068666	1418.851516
80	1746.599891	2027.784403	2356.290874	2740.218932
90	3141.075187	3731.351811	4436.576302	5279.451211
100	5638.368059	6854.903593	8341.558016	10[illegible]9.01801

	7.0	7.25	7.5	7.75
1	1	1	1	1
2	2.070000000	2.072500000	2.075000000	2.077500000
3	3.214900000	3.222756250	3.230625000	3.238506250
4	4.439943000	4.456406078	4.472921875	4.489490484
5	5.750739010	5.779495519	5.808391016	5.837425997
6	7.153290741	7.198508944	7.244020342	7.289826512
7	8.654021093	8.720400842	8.787321867	8.854788066
8	10.25980257	10.35262990	10.44637101	10.54103414
9	11.97798875	12.10319557	12.22984883	12.35796429
10	13.81644796	13.98067725	14.14708750	14.31570652
11	15.78359932	15.99427635	16.20811906	16.42517377
12	17.88845127	18.15386139	18.42372799	18.69812474
13	20.14064286	20.47001634	20.80550759	21.14722941
14	22.55048786	22.95409252	23.36592066	23.78613969
15	25.12902201	25.61826423	26.11836470	26.62956552
16	27.88805355	28.47558839	29.07724206	29.69335684
17	30.84021730	31.54006854	32.25803521	32.99459200
18	33.99903251	34.82672351	35.67738785	36.55167288
19	37.37896479	38.35166097	39.35319194	40.38442753
20	40.99549232	42.13215639	43.30468134	44.51422066
21	44.86517678	46.18673773	47.55253244	48.96407276
22	49.00573916	50.53527621	52.11897237	53.75878840
23	53.43614090	55.19908374	57.02789530	58.92509450
24	58.17667076	60.20101731	62.30498744	64.49178932
25	63.24903772	65.56559106	67.97786150	70.48990300
26	68.67647036	71.31909641	74.07620112	76.95287048
27	74.48382328	77.48973090	80.63191620	83.91671794
28	80.69769091	84.10773639	87.67930991	91.42026358
29	87.34652927	91.20554728	95.25525816	99.50533401
30	94.46078632	98.81794946	103.3994025	108.2169974
31	102.0730414	106.9822508	112.1543577	117.6038147
32	110.2181543	115.7384640	121.5659345	127.7181103
33	118.9334251	125.1295026	131.6833796	138.6162639
34	128.2587648	135.2013916	142.5596331	150.3590243
35	138.2368784	146.0034924	154.2516056	163.0118487
36	148.9134598	157.5887456	166.8204760	176.6452670
37	160.3374020	170.0139297	180.3320117	191.3352752
38	172.5610202	183.3399396	194.8569126	207.1637590
39	185.6402916	197.6320852	210.4711810	224.2189503
40	199.6351120	212.9604114	227.2565196	242.5959190
41	214.6095698	229.4000412	245.3007586	262.3971027
42	230.6322397	247.0315442	264.6983155	283.7328782
43	247.7764965	265.9413312	285.5506891	306.7221762
44	266.1208513	286.2220777	307.9669908	331.4931449
45	285.7493108	307.9731783	332.0645151	358.1838636
46	306.7517626	331.3012338	357.9693537	386.9431130
47	329.2243860	356.3205732	385.8170553	417.9312043
48	353.2700930	383.1538148	415.7533344	451.3208726
49	378.9989995	411.9324663	447.9348345	487.2982403
50	406.5289295	442.7975701	482.5299471	526.0638539
60	813.5203834	905.5974663	1008.656538	1124.030180
70	1614.134174	1837.490921	2093.020048	2385.120566
80	3189.062680	3713.950743	4327.927467	5046.282281
90	6287.185127	7192.388553	8934.142195	10659.28291
100	12381.66179	15100.64753	18427.69613	22499.72403

	8.0	8.25	8.5	8.75
1	1	1	1	1
2	2.080000000	2.082500000	2.085000000	2.087500000
3	3.246400000	3.254306250	3.262225000	3.270156250
4	4.506112000	4.522786516	4.539514125	4.556294922
5	5.866600960	5.895916403	5.925372826	5.954970728
6	7.335929037	7.382329506	7.429029516	7.476030666
7	8.922803360	8.991371691	9.060497025	9.130183349
8	10.63662763	10.73315986	10.83063927	10.92907439
9	12.48755784	12.61864554	12.75124361	12.88536840
10	14.48656247	14.65968380	14.83509932	15.01283814
11	16.64548746	16.86910771	17.09608276	17.32646147
12	18.97712646	19.26080910	19.54924979	19.84252685
13	21.49529658	21.84982585	22.21093603	22.57874795
14	24.21492030	24.65243648	25.09886559	25.55438840
15	27.15211393	27.68626249	28.23226916	28.79039738
16	30.32428304	30.97037915	31.63201204	32.30955715
17	33.75022569	34.52543543	35.32073306	36.13664341
18	37.45024374	38.37378385	39.32299538	40.29859970
19	41.44626324	42.53962102	43.66544998	44.82472718
20	45.76196430	47.04913975	48.37701323	49.74689081
21	50.42292144	51.93069378	53.48905936	55.09974375
22	55.45675516	57.21497602	59.03562940	60.92097133
23	60.89329557	62.93521154	65.05365790	67.25155632
24	66.76475922	69.12736650	71.58321882	74.13606750
25	73.10593995	75.83037423	78.66779242	81.62297340
26	79.95441515	83.08638011	86.35455478	89.76498358
27	87.35076836	90.94100646	94.69469193	98.61941964
28	95.33882983	99.44363950	103.7437407	108.2486189
29	103.9659362	108.6477398	113.5619587	118.7203730
30	113.2832111	118.6111783	124.2147252	130.1084056
31	123.3458680	129.3966005	135.7729768	142.4928911
32	134.2135374	141.0718200	148.3136799	155.9610191
33	145.9506204	153.7102452	161.9203427	170.6076083
34	158.6266701	167.3913404	176.6835718	186.5357740
35	172.3168037	182.2011260	192.7016754	203.8576542
36	187.1021480	198.2327189	210.0813178	222.6951990
37	203.0703198	215.5869182	228.9382298	243.1810289
38	220.3159454	234.3728390	249.3979793	265.4593689
39	238.9412210	254.7085982	271.5968076	289.6870637
40	259.0565187	276.7220575	295.6825362	316.0346818
41	280.7810402	300.5516273	321.8155518	344.6877164
42	304.2435234	326.3471365	350.1698737	375.8478916
43	329.5830053	354.2707753	380.9343130	409.7345821
44	356.9496457	384.4981142	414.3137296	446.5863581
45	386.5056174	417.2192087	450.5303966	486.6626644
46	418.4260668	452.6397934	489.8254803	530.2456476
47	452.9001521	490.9825763	532.4606461	577.6421417
48	490.1321643	532.4886389	578.7198011	629.1858291
49	530.3427374	577.4189516	628.9109842	685.2395892
50	573.7701564	626.0560151	683.3684178	746.1980532
60	1253.213296	1397.882815	1559.919777	1741.434068
70	2720.080074	3103.175403	3541.787885	4044.035338
80	5886.935428	6870.889627	8022.758863	9371.387371
90	12723.93862	15195.36753	18154.16005	21696.87336
100	27484.51570	33587.66809	41061.09037	50213.40539

	9.0	9.25	9.5	9.75
1	1	1	1	1
2	2.090000000	2.092500000	2.095000000	2.097500000
3	3.278100000	3.286056250	3.294025000	3.302006250
4	4.573129000	4.590016453	4.606957375	4.623951859
5	5.984710610	6.014592975	6.044618326	6.074787166
6	7.523334565	7.570942825	7.618857067	7.667078914
7	9.200434676	9.271255037	9.342648488	9.414619108
8	11.02847380	11.12884613	11.23020009	11.33254447
9	13.02103644	13.15826439	13.29706910	13.43746756
10	15.19292972	15.37540385	15.56029067	15.74762064
11	17.56029339	17.79762871	18.03851828	18.28301366
12	20.14071980	20.44390936	20.75217752	21.06560749
13	22.95338458	23.33497098	23.72363438	24.11950422
14	26.01918919	26.49345579	26.97737965	27.47115588
15	29.36091622	29.94410045	30.54023072	31.14959358
16	33.00339868	33.71392975	34.44155263	35.18667895
17	36.97370456	37.83246825	38.71350013	39.61738015
18	41.30133797	42.33197156	43.39128265	44.48007472
19	46.01845839	47.24767893	48.51345450	49.81688200
20	51.16011964	52.61808923	54.12223267	55.67402799
21	56.76453041	58.48526249	60.26384478	62.10224572
22	62.87333815	64.89514927	66.98891003	69.15721468
23	69.53193858	71.89795057	74.35285649	76.90004311
24	76.78981305	79.54851100	82.41637785	85.39779732
25	84.70089623	87.90674827	91.24593375	94.72408256
26	93.32397689	97.03812248	100.9142975	104.9596806
27	102.7231348	107.0141488	111.5011557	116.1932495
28	112.9682169	117.9129576	123.0937655	128.5220913
29	124.1353565	129.8199062	135.7876732	142.0529952
30	136.3075385	142.8282475	149.6875022	156.9031622
31	149.5752170	157.0398604	164.9078149	173.2012205
32	164.0369865	172.5660474	181.5740573	191.0883395
33	179.8003153	189.5284068	199.8235928	210.7194526
34	196.9823437	208.0597845	219.8068341	232.2645993
35	215.7107547	228.3053145	241.6884833	255.9103977
36	236.1247226	250.4235561	265.6488892	281.8616615
37	258.3759476	274.5877351	291.8855337	310.3431735
38	282.6297829	300.9871006	320.6146594	341.6016329
39	309.0664633	329.8284074	352.0730520	375.9077921
40	337.8824450	361.3375350	386.5199920	413.5588018
41	369.2918651	395.7612570	424.2393912	454.8807850
42	403.5281330	433.3691733	465.5421334	500.2316615
43	440.8456649	474.4558218	510.7686360	550.0042485
44	481.5217748	519.3429854	560.2916565	604.6296628
45	525.8587345	568.3822115	614.5193638	664.5810549
46	574.1860206	621.9575661	673.8987034	730.3777077
47	626.8627625	680.4886409	738.9190802	802.5895342
48	684.2804111	744.4338402	810.1163928	881.8420138
49	746.8656481	814.2939704	888.0774502	968.8216102
50	815.0835564	890.6161627	973.4448079	1064.281717
60	1944.792133	2172.648011	2427.978094	2714.120050
70	4619.223180	5278.017419	6032.642648	6897.108632
80	10950.57409	12799.92039	14965.82188	17582.62865
90	25939.18425	31019.66072	37104.27331	44391.79002
100	61422.67516	75151.96863	91965.32505	112566.3819

	10.0	10.25	10.5	10.75
1	1	1	1	1
2	2.100000000	2.102500000	2.105000000	2.107500000
3	3.310000000	3.318006250	3.326025000	3.334056250
4	4.641000000	4.658101891	4.675257625	4.692467297
5	6.105100000	6.135557334	6.166159676	6.196907531
6	7.715610000	7.764451961	7.813606442	7.863075091
7	9.487171000	9.560308287	9.634035118	9.708355663
8	11.43588810	11.54023989	11.64560881	11.75200390
9	13.57947691	13.72311448	13.86839773	14.01534432
10	15.93742460	16.12973371	16.32457949	16.52199383
11	18.53116706	18.78303141	19.03866034	19.29810817
12	21.38428377	21.70829213	22.03771967	22.37265479
13	24.52271214	24.93339208	25.35168024	25.77771518
14	27.97498336	28.48906477	29.01360666	29.54881957
15	31.77248169	32.40919390	33.06003536	33.72531767
16	35.94972986	36.73113628	37.53133908	38.35078932
17	40.54470285	41.49607775	42.47212968	43.47349917
18	45.59917313	46.74942572	47.93170330	49.14690033
19	51.15909045	52.54124185	53.96453214	55.43019212
20	57.27499949	58.92671914	60.63080802	62.38893777
21	64.00249944	65.96670785	67.99704286	70.09574858
22	71.40274939	73.72829541	76.13673236	78.63104155
23	79.54302433	82.28544569	85.13108926	88.08387852
24	88.49732676	91.71970387	95.06985363	98.55289546
25	98.34705943	102.1209735	106.0521883	110.1473317
26	109.1817654	113.5883733	118.1876680	122.9881699
27	121.0999419	126.2311816	131.5973732	137.2093981
28	134.2099361	140.1698777	146.4150974	152.9594084
29	148.6309297	155.5372901	162.7886826	170.4025449
30	164.4940227	172.4798624	180.8814942	189.7208184
31	181.9434250	191.1590483	200.8740511	211.1158064
32	201.1377675	211.7528507	222.9658265	234.8107556
33	222.2515442	234.4575179	247.3772383	261.0529118
34	245.4766986	259.4894135	274.3518483	290.1160998
35	271.0243685	287.0870784	304.1587924	322.3035806
36	299.1268053	317.5135039	337.0954656	357.9512155
37	330.0394859	351.0586381	373.4904895	397.4309712
38	364.0434344	388.0421485	413.7069909	441.1548006
39	401.4477779	428.8164687	458.1462249	489.5789416
40	442.5925557	473.7701567	507.2515785	543.2086778
41	487.8518112	523.3315978	561.5129943	602.6036107
42	537.6369924	577.9730866	621.4718587	668.3834989
43	592.4006916	638.2153280	687.7264038	741.2347250
44	652.6407608	704.6323991	760.9376762	821.9174579
45	718.9048369	777.8572200	841.8361323	911.2735847
46	791.7953205	858.5875850	931.2289261	1010.235495
47	871.9748526	947.5928125	1030.007963	1119.835811
48	960.1723378	1045.721076	1139.158800	1241.218160
49	1057.189572	1153.907486	1259.770473	1375.649113
50	1163.908529	1273.183003	1393.046373	1524.531392
60	3034.816395	3394.263275	3797.165059	4248.795449
70	7887.469568	9022.120691	10322.13754	11811.66395
80	20474.00215	23954.50186	28031.44037	32807.05163
90	53120.22612	63574.55455	76095.91999	91092.64837
100	137796.1234	168698.3494	206546.8035	252900.1291

	11.0	11.25	11.5	11.75
1	1	1	1	1
2	2.110000000	2.112500000	2.115000000	2.117500000
3	3.342100000	3.350156250	3.358225000	3.366306250
4	4.709731000	4.727048828	4.744420875	4.761847234
5	6.227801410	6.258841821	6.290029276	6.321364284
6	7.912859565	7.962961526	8.013382642	8.064124588
7	9.783274117	9.858794698	9.934921646	10.01165923
8	11.85943427	11.96790910	12.07743764	12.18802919
9	14.16397204	14.31429888	14.46634296	14.62012262
10	16.72200896	16.92465750	17.12997240	17.33798702
11	19.56142995	19.82868147	20.09991923	20.37520050
12	22.71318724	23.05940813	23.41140994	23.76928656
13	26.21163784	26.65359155	27.10372209	27.56217773
14	30.09491800	30.65212060	31.22065013	31.80073361
15	34.40535898	35.10048416	35.81102489	36.53731981
16	39.18994847	40.04928863	40.92929275	41.83045489
17	44.50084281	45.55483360	46.63616142	47.74553334
18	50.39593551	51.67975238	52.99931998	54.35563350
19	56.93948842	58.49372453	60.09424178	61.74242044
20	64.20283215	66.07426854	68.00507958	69.99715484
21	72.26514368	74.50762375	76.82566374	79.22182053
22	81.21430949	83.88973142	86.66061507	89.53038445
23	91.14788353	94.32732620	97.62658580	101.0502046
24	102.1741507	105.9391504	109.8536432	113.9236037
25	114.4133073	118.8573048	123.4868121	128.3096271
26	127.9987711	133.2287516	138.6877955	144.3860083
27	143.0786359	149.2169862	155.6368920	162.3513642
28	159.8172859	167.0038971	174.5351346	182.4276495
29	178.3971873	186.7918355	195.6066751	204.8628984
30	199.0208779	208.8059170	219.1014427	229.9342889
31	221.9131745	233.2965827	245.2981086	257.9515679
32	247.3236237	260.5424483	274.5073911	289.2608771
33	275.5292223	290.8534737	307.0757411	324.2490302
34	306.8374368	324.5744895	343.3894513	363.3482912
35	341.5895548	362.0891195	383.8792382	407.0417154
36	380.1644058	403.8241455	429.0253506	455.8691170
37	422.9824905	450.2543619	479.3632659	510.4337382
38	470.5105644	501.9079776	535.4900415	571.4097025
39	523.2667265	559.3726250	598.0713963	639.5503425
40	581.8260664	623.3020454	667.8496068	715.6975078
41	646.8269337	694.4235255	745.6523116	800.7919649
42	718.9778964	773.5461721	832.4023275	895.8850208
43	799.0654650	861.5701164	929.1285951	1002.151511
44	887.9626662	959.4967545	1036.978384	1120.904313
45	986.6385595	1068.440139	1157.230898	1253.610570
46	1096.168801	1189.639655	1291.312451	1401.909812
47	1217.747369	1324.474116	1440.813383	1567.634215
48	1352.699580	1474.477454	1607.506922	1752.831235
49	1502.496533	1641.356168	1793.370218	1959.788905
50	1668.771152	1827.008737	2000.607793	2191.064102
60	4755.065839	5322.601820	5958.828738	6672.067402
70	13518.35574	15473.88792	17714.53447	20281.83101
80	38101.02500	44953.46606	52628.35541	61617.58842
90	109053.3983	130562.8676	156320.5471	187163.1079
100	309665.2297	379174.6215	461282.8428	568471.6512

	12.0	12.25	12.5	12.75
1	1	1	1	1
2	2.120000000	2.122500000	2.125000000	2.127500000
3	3.374400000	3.382506250	3.390625000	3.398756250
4	4.779328000	4.796863266	4.814453125	4.832097672
5	6.352847360	6.384479016	6.416259766	6.448190125
6	8.115189043	8.166577695	8.218292236	8.270334366
7	10.08901173	10.16698346	10.24557877	10.32480200
8	12.29969314	12.41243894	12.52627611	12.64121425
9	14.77565631	14.93296271	15.09206063	15.25296907
10	17.54873507	17.76225064	17.97856820	18.19772263
11	20.65458328	20.93812634	21.22588923	21.51793226
12	24.13313327	24.50304682	24.87912538	25.26146862
13	28.02910926	28.50467005	28.98901606	29.48230587
14	32.39260238	32.99649214	33.61264306	34.24129987
15	37.27971466	38.03856242	38.81422345	39.60706561
16	42.75328042	43.69828632	44.66600138	45.65696647
17	48.88367407	50.05132639	51.24925155	52.47822970
18	55.74971496	57.18261388	58.65540799	60.16920398
19	63.43968075	65.18748408	66.98733399	68.84077749
20	72.05244244	74.17295087	76.36075074	78.61797662
21	81.69873554	84.25913736	86.90584458	89.64176864
22	92.50258380	95.58088168	98.76907515	102.0710941
23	104.6028939	108.2895397	112.1152095	116.0851586
24	118.1552411	122.5550083	127.1296107	131.8860164
25	133.3338701	138.5679968	144.0208121	149.7014835
26	150.3339345	156.5425764	163.0234136	169.7884226
27	169.3740066	176.7190420	184.4013403	192.4364465
28	190.6988874	199.3671247	208.4515078	217.9720934
29	214.5827539	224.7895975	235.5079463	246.7635353
30	241.3326843	253.3263232	265.9464396	279.2258861
31	271.2926065	285.3587977	300.1897446	315.8271865
32	304.8477192	321.3152505	338.7134626	357.0951528
33	342.4294455	361.6763686	382.0526454	403.6247848
34	384.5209790	406.9817238	430.8092261	456.0869449
35	431.6634965	457.8369850	485.6603794	515.2380303
36	484.4631161	514.9220156	547.3679268	581.9308792
37	543.5986900	578.9999625	616.7889177	657.1270663
38	609.8305328	650.9274580	694.8875324	741.9107673
39	684.0101967	731.6660716	782.7484739	837.5043901
40	767.0914203	822.2951653	881.5920332	945.2861998
41	860.1423908	924.0263231	992.7910373	1066.810190
42	964.3594777	1038.219548	1117.889917	1203.828490
43	1081.082615	1166.401442	1258.626157	1358.316622
44	1211.812529	1310.285619	1416.954426	1532.501991
45	1358.230032	1471.795607	1595.073729	1728.895995
46	1522.217636	1653.090569	1795.457946	1950.330235
47	1705.883752	1856.594164	2020.890189	2199.997339
48	1911.589803	2085.026949	2274.501462	2481.497000
49	2141.980579	2341.442750	2559.814145	2798.887868
50	2400.018249	2629.269487	2880.790913	3156.746071
60	7471.641112	8367.995332	9372.831471	10499.25644
70	23223.33190	26593.47531	30454.57127	34877.93012
80	72145.69250	84475.33435	98913.74818	115820.2373
90	224091.1185	268300.9241	321222.6728	384565.6657
100	696010.5477	852108.1483	1043131.118	1276856.826

	13	13.25	13.5	13.75
1	1	1	1	1
2	2.130000000	2.132500000	2.135000000	2.137500000
3	3.406900000	3.415056250	3.423225000	3.431406250
4	4.849797000	4.867551203	4.885360375	4.903224609
5	6.480270610	6.512501738	6.544884026	6.577417993
6	8.322705789	8.375408218	8.428443369	8.481812967
7	10.40465754	10.48514981	10.56628322	10.64806225
8	12.75726302	12.87443216	12.99273146	13.11217081
9	15.41570722	15.58029442	15.74675021	15.91509430
10	18.41974915	18.64468343	18.87256148	19.10341976
11	21.81431654	22.11510398	22.42035728	22.73013998
12	25.65017769	26.04535526	26.44710552	26.85553423
13	29.98470079	30.49636483	31.01746476	31.54817018
14	34.88271190	35.53713317	36.20482251	36.88604358
15	40.41746444	41.24580332	42.09247354	42.95787457
16	46.67173482	47.71087225	48.77495747	49.86458233
17	53.73906035	55.03256283	56.35957673	57.72096240
18	61.72513819	63.32437740	64.96811959	66.65759473
19	70.74940616	72.71485741	74.73881573	76.82301400
20	80.94682896	83.34957602	85.82855586	88.38617843
21	92.46991672	95.39339484	98.41541090	101.5392780
22	105.4910059	109.0330197	112.7014914	116.5009287
23	120.2048367	124.4798948	128.9161927	133.5198064
24	136.8314654	141.9734808	147.3198787	152.8787798
25	155.6195559	161.7849670	168.2080623	174.8996120
26	176.8500982	184.2214752	191.9161508	199.9483086
27	200.8406110	209.6308206	218.8248311	228.4412011
28	227.9498904	238.4069043	249.3661833	260.8518662
29	258.5833762	270.9958192	284.0306181	297.7189978
30	293.1992151	307.9027652	323.3747515	339.6553600
31	332.3151130	349.6998816	368.0303430	387.3579720
32	376.5160777	397.0351159	418.7144393	441.6196931
33	426.4631678	450.6422688	476.2408886	503.3424010
34	482.9033796	511.3523694	541.5334085	573.5519811
35	546.6808190	580.1065583	615.6404187	653.4153785
36	618.7493254	657.9706773	699.7518752	744.2599930
37	700.1867377	746.1517920	795.2183783	847.5957421
38	792.2110137	846.0169045	903.5728594	965.1401566
39	896.1984454	959.1141443	1026.555195	1098.846928
40	1013.704243	1087.196768	1166.140147	1250.938381
41	1146.485795	1232.250340	1324.569067	1423.942408
42	1296.528948	1396.523510	1504.385891	1620.734489
43	1466.077712	1582.562875	1708.477986	1844.585481
44	1657.667814	1793.252456	1940.122514	2099.215985
45	1874.164630	2031.858407	2203.039053	2388.858183
46	2118.806032	2302.079646	2501.449326	2718.326183
47	2395.250816	2608.105199	2840.144984	3093.096034
48	2707.633422	2954.679138	3224.564557	3519.396738
49	3060.625767	3347.174124	3660.880773	4004.313790
50	3459.507117	3791.674695	4156.099677	4555.906936
60	11761.94979	13177.35048	14763.86554	16542.10321
70	39945.15096	45749.59263	52398.05272	60012.68357
80	135614.9266	158788.9713	185916.4640	217668.3162
90	460372.4271	551083.1544	659612.5226	789441.1865
100	1562783.648	1912508.951	2340189.410	2863101.415

Таблица П.11. Коэффициенты приведения годовой ренты (сложные проценты)

Число периодов	Ставка процентов			
	.25 (1/4)	.333 (1/3)	.417 (5/12)	.5 (1/2)
1	.997506234	.996681052	.995847317	.995024876
2	1.992524922	1.990054172	1.987559195	1.985099379
3	2.985062266	2.980130338	2.975152808	2.970248138
4	3.975124455	3.966920492	3.958645257	3.950495660
5	4.962717661	4.950435542	4.938053573	4.925866328
6	5.947848041	5.930686356	5.913394717	5.896384406
7	6.930521736	6.907683769	6.884685579	6.862074036
8	7.910744874	7.881438579	7.851942976	7.822959240
9	8.888523565	8.851961547	8.815183660	8.779063920
10	9.863863906	9.819263400	9.774424311	9.730411861
11	10.83677198	10.78335483	10.72968154	10.67702673
12	11.80725384	11.74424649	11.68097189	11.61893207
13	12.77531555	12.70194900	12.62831183	12.55615131
14	13.74096314	13.65647294	13.57171776	13.48870777
15	14.70420264	14.60782887	14.51120603	14.41662465
16	15.66504004	15.55602730	15.44679291	15.33992502
17	16.62348133	16.50107871	16.37849458	16.25863186
18	17.57953250	17.44299354	17.30632720	17.17276802
19	18.53319950	18.38178221	18.23030682	18.08235624
20	19.48448828	19.31745508	19.15044945	18.98741915
21	20.43340477	20.25002251	20.06677101	19.88797925
22	21.37995488	21.17949479	20.97928738	20.78405896
23	22.32414452	22.10588220	21.88801436	21.67568055
24	23.26597957	23.02919498	22.79296769	22.56286622
25	24.20546591	23.94944333	23.69416303	23.44563803
26	25.14260939	24.86663743	24.59161599	24.32401794
27	26.07741585	25.78078741	25.48534211	25.19802780
28	27.00989112	26.69190337	26.37535687	26.06768936
29	27.94004102	27.59999539	27.26167569	26.93302423
30	28.86787134	28.50507349	28.14431390	27.79405396
31	29.79338787	29.40714769	29.02328679	28.65079996
32	30.71659638	30.30622795	29.89860959	29.50328355
33	31.63750262	31.20232421	30.77029745	30.35152592
34	32.55611234	32.09544638	31.63836547	31.19554818
35	33.47243126	32.98560431	32.50282867	32.03537132
36	34.38646510	33.87280786	33.36370203	32.87101624
37	35.29821955	34.75706683	34.22100046	33.70250372
38	36.20770030	35.63839099	35.07473880	34.52985445
39	37.11491302	36.51679008	35.92493183	35.35308900
40	38.01986336	37.39227381	36.77159429	36.17222786
41	38.92255697	38.26485185	37.61474082	36.98729141
42	39.82299947	39.13453385	38.45438603	37.79829991
43	40.72119648	40.00132942	39.29054446	38.60527354
44	41.61715359	40.86524815	40.12323058	39.40823238
45	42.51087640	41.72629957	40.95245883	40.20719639
46	43.40237047	42.58449321	41.77824356	41.00218547
47	44.29164137	43.43983854	42.60059906	41.79321937
48	45.17869463	44.29234504	43.41953958	42.58031778
49	46.06353579	45.14202210	44.23507930	43.36350028
50	46.94617037	45.98887913	45.04723234	44.14278635
60	55.65235769	54.30439140	52.98556077	51.72556075
70	64.14385339	62.34800182	60.60032809	58.93941756
80	72.42595169	70.12860108	67.90472246	65.80230538
90	80.50381627	77.65478917	74.91139146	72.33129958
100	88.38248346	84.93488181	81.63247907	78.54264476

	.583 (7/12)	.667 (2/3)	.75 (3/4)	.833 (5/6)
1	.994203792	.993374194	.992555831	.991738816
2	1.982644972	1.980166484	1.977722909	1.975284694
3	2.965356941	2.960420479	2.955556238	2.950705319
4	3.942372907	3.934179502	3.926110410	3.918067814
5	4.913725885	4.901486586	4.889439612	4.877438749
6	5.879448699	5.862384482	5.845597630	5.828884144
7	6.839573982	6.816915654	6.794637846	6.772469473
8	7.794134180	7.765122289	7.736613247	7.708259670
9	8.743161548	8.707046290	8.671576424	8.636319132
10	9.686688156	9.642729285	9.599579577	9.556711723
11	10.62474589	10.57221263	10.52067452	10.46950078
12	11.55736644	11.49553739	11.43491267	11.37474912
13	12.48458133	12.41274439	12.34234508	12.27251904
14	13.40642189	13.32387415	13.24302242	13.16287231
15	14.32291927	14.22896694	14.13699495	14.04587021
16	15.23410444	15.12806276	15.02431261	14.92157351
17	16.14000820	16.02120135	15.90502492	15.79004245
18	17.04066114	16.90842217	16.77918106	16.65133682
19	17.93609372	17.78976444	17.64682984	17.50551587
20	18.82633618	18.66526711	18.50801969	18.35263839
21	19.71141861	19.53496887	19.36279870	19.19276268
22	20.59137091	20.39890815	20.21121459	20.02594654
23	21.46622283	21.25712314	21.05331473	20.85224732
24	22.33600393	22.10965176	21.88914614	21.67172188
25	23.20074360	22.95653169	22.71875547	22.48442661
26	24.06047105	23.79780037	23.54218905	23.29041743
27	24.91521534	24.63349495	24.35949286	24.08974981
28	25.76500536	25.46365239	25.17071251	24.88247876
29	26.60986982	26.28830937	25.97589331	25.66865884
30	27.44983727	27.10750233	26.77508021	26.44834413
31	28.28493609	27.92126748	27.56831783	27.22158830
32	29.11519451	28.72964077	28.35565045	27.98844456
33	29.94064057	29.53265794	29.13712203	28.74896567
34	30.76130218	30.33035448	29.91277621	29.50320398
35	31.57720707	31.12276563	30.68265629	30.25121139
36	32.38838279	31.90992642	31.44680525	30.99303937
37	33.19485678	32.69187164	32.20526576	31.72873898
38	33.99665627	33.46863584	32.95808016	32.45836083
39	34.79380837	34.24025335	33.70529048	33.18195515
40	35.58634001	35.00675827	34.44693844	33.89957171
41	36.37427797	35.76818448	35.18306545	34.61125992
42	37.15764887	36.52456563	35.91371260	35.31706873
43	37.93647920	37.27593514	36.63892070	36.01704674
44	38.71079526	38.02232622	37.35873022	36.71124209
45	39.48062323	38.76377186	38.07318136	37.39970257
46	40.24598911	39.50030483	38.78231401	38.08247554
47	41.00691878	40.23195767	39.48616775	38.75960801
48	41.76343793	40.95876273	40.18478188	39.43114656
49	42.51557215	41.68075211	40.87819542	40.09713740
50	43.26334684	42.39795773	41.56644706	40.75762638
60	50.50680705	49.31377738	48.17337352	47.06972908
70	57.34120449	55.78479223	54.30462210	52.87934165
80	63.78964033	61.83961079	59.99441012	58.22646601
90	69.87391112	67.50500157	65.27160918	63.14791966
100	75.61458252	72.80601138	70.17462272	67.67758914

	1.0	1.25	1.5	1.75
1	.990099010	.987654321	.985221675	.982800983
2	1.970395059	1.963115379	1.955883423	1.948698755
3	2.940985207	2.926533707	2.912200417	2.897984034
4	3.901965552	3.878057983	3.854384647	3.830942540
5	4.853431239	4.817835044	4.782644973	4.747855076
6	5.795476474	5.746009920	5.697187165	5.648997617
7	6.728194529	6.662725847	6.598213956	6.534641393
8	7.651677752	7.568124294	7.485925080	7.405052966
9	8.566017576	8.462344981	8.360517320	8.260494315
10	9.471304531	9.345525908	9.222184552	9.101222914
11	10.36762825	10.21780337	10.07111778	9.927491808
12	11.25507747	11.07931197	10.90750521	10.73954969
13	12.13374007	11.93018466	11.73153222	11.53764097
14	13.00370304	12.77055275	12.54338150	12.32200587
15	13.86505252	13.60054592	13.34323301	13.09288046
16	14.71787378	14.42029227	14.13126404	13.85049677
17	15.56225127	15.22991829	14.90764931	14.59508282
18	16.39826858	16.02954893	15.67256089	15.32686272
19	17.22600850	16.81930759	16.42616837	16.04605673
20	18.04555297	17.59931613	17.16863878	16.75288130
21	18.85698313	18.36969495	17.90013673	17.44754919
22	19.66037934	19.13056291	18.62082437	18.13026948
23	20.45582113	19.88203744	19.33086145	18.80124764
24	21.24338726	20.62423451	20.03040537	19.46068564
25	22.02315570	21.35726865	20.71961120	20.10878196
26	22.79520366	22.08125299	21.39863172	20.74573166
27	23.55960759	22.79629925	22.06761746	21.37172644
28	24.31644316	23.50251778	22.72671671	21.98695473
29	25.06578530	24.20001756	23.37607557	22.59160170
30	25.80770822	24.88890623	24.01583800	23.18584934
31	26.54228537	25.56929010	24.64614582	23.76987650
32	27.26958947	26.24127418	25.26713874	24.34385897
33	27.98969255	26.90496215	25.87895442	24.90796950
34	28.70266589	27.56045644	26.48172849	25.46237789
35	29.40858009	28.20785821	27.07559457	26.00725100
36	30.10750504	28.84726737	27.66068431	26.54275283
37	30.79950994	29.47878259	28.23712740	27.06904455
38	31.48466330	30.10250132	28.80505162	27.58628457
39	32.16303297	30.71851982	29.36458288	28.09462857
40	32.83468611	31.32693316	29.91584520	28.59422955
41	33.49968922	31.92783522	30.45896079	29.08523789
42	34.15810814	32.52131873	30.99405004	29.56780136
43	34.81000806	33.10747529	31.52123157	30.04206522
44	35.45545352	33.68639535	32.04062223	30.50817221
45	36.09450844	34.25816825	32.55233718	30.96626261
46	36.72723608	34.82288222	33.05648983	31.41647431
47	37.35369908	35.38062442	33.55319195	31.85894281
48	37.97395949	35.93148091	34.04255365	32.29380129
49	38.58807870	36.47553670	34.52468339	32.72118063
50	39.19611753	37.01287575	34.99968807	33.14120946
60	44.95503841	42.03459179	39.38026889	36.96398552
70	50.16851435	46.46967562	43.15487183	40.17790267
80	54.88820611	50.38665706	46.40732349	42.87993474
90	59.16088148	53.84606036	49.20985452	45.15161037
100	63.02887877	56.90133936	51.62470367	47.06147304

	2.0	2.25	2.5	2.75
1	.980392157	.977995110	.975609756	.973236010
2	1.941560938	1.934469545	1.927424152	1.920424340
3	2.883883273	2.869896866	2.856023563	2.842262132
4	3.807728699	3.784740211	3.761974208	3.739427865
5	4.713459508	4.679452529	4.645828496	4.612581864
6	5.601430891	5.554476801	5.508125361	5.462366778
7	6.471991069	6.410246260	6.349390597	6.289408056
8	7.325481440	7.247184606	7.170137167	7.094314410
9	8.162236706	8.065706217	7.970865529	7.877678258
10	8.982585006	8.866216349	8.752063931	8.640076163
11	9.786848045	9.649111343	9.514208713	9.382069258
12	10.57534122	10.41477882	10.25776460	10.10420366
13	11.34837375	11.16359787	10.98318497	10.80701086
14	12.10624877	11.89593923	11.69091217	11.49100814
15	12.84926350	12.61216551	12.38137773	12.15669891
16	13.57770931	13.31263131	13.05500266	12.80457315
17	14.29187188	13.99768343	13.71219772	13.43510769
18	14.99203125	14.66766105	14.35336363	14.04876661
19	15.67846201	15.32289590	14.97889134	14.64600157
20	16.35143334	15.96371237	15.58916228	15.22725213
21	17.01120916	16.59042774	16.18454857	15.79294611
22	17.65804820	17.20335232	16.76541324	16.34349987
23	18.29220411	17.80278955	17.33211048	16.87931861
24	18.91392560	18.38903624	17.88498583	17.40079670
25	19.52345647	18.96238263	18.42437642	17.90831795
26	20.12103576	19.52311260	18.95061114	18.40225592
27	20.70689780	20.07150376	19.46401087	18.88297413
28	21.28127235	20.60782764	19.96488866	19.35082640
29	21.84438466	21.13234977	20.45354991	19.80615708
30	22.39645555	21.64532985	20.93029259	20.24930130
31	22.93770152	22.14702186	21.39540741	20.68058520
32	23.46833482	22.63767419	21.84917796	21.10032623
33	23.98856355	23.11752977	22.29188094	21.50883332
34	24.49859172	23.58682618	22.72378628	21.90640712
35	24.99861933	24.04579577	23.14515734	22.29334026
36	25.48884248	24.49466579	23.55625107	22.66991753
37	25.96945341	24.93365848	23.95731812	23.03641609
38	26.44064060	25.36299118	24.34860304	23.39310568
39	26.90258883	25.78287646	24.73034443	23.74024884
40	27.35547924	26.19352221	25.10277505	24.07810106
41	27.79948945	26.59513174	25.46612200	24.40691101
42	28.23479358	26.98790390	25.82060683	24.72692069
43	28.66156233	27.37203316	26.16644569	25.03836563
44	29.07996307	27.74770969	26.50384945	25.34147507
45	29.49015987	28.11511950	26.83302386	25.63647209
46	29.89231360	28.47444450	27.15416962	25.92357381
47	30.28658196	28.82586259	27.46748255	26.20299154
48	30.67311957	29.16954777	27.77315371	26.47493094
49	31.05207801	29.50567019	28.07136947	26.73959215
50	31.42360589	29.83439627	28.36231168	26.99716998
60	34.76088668	32.74895285	30.90865649	29.22266201
70	37.49861929	35.08208492	32.89785698	30.91937247
80	39.74451359	36.94978079	34.45181722	32.21294098
90	41.58692916	38.44489025	35.66576848	33.19915489
100	43.09835164	39.64174052	36.61410526	33.95104232

	3.0	3.25	3.5	3.75
1	.970873786	.968523002	.966183575	.963855422
2	1.913469696	1.906559809	1.899694275	1.892872696
3	2.828611355	2.815070033	2.801636981	2.788311032
4	3.717098403	3.694983082	3.673079209	3.651384127
5	4.579707187	4.547199111	4.515052375	4.483261809
6	5.417191444	5.372589938	5.328553020	5.285071623
7	6.230282955	6.171999940	6.114543980	6.057900360
8	7.019692189	6.946246915	6.873955536	6.802795527
9	7.786108922	7.696122920	7.607686509	7.520766773
10	8.530202836	8.422395080	8.316605322	8.212787251
11	9.252624113	9.125806373	9.001551036	8.879794941
12	9.954003993	9.807076390	9.663334334	9.522693919
13	10.63495533	10.46690207	10.30273849	10.14235558
14	11.29607314	11.10595842	10.92052028	10.73961984
15	11.93793509	11.72489920	11.51741089	11.31529623
16	12.56110202	12.32435758	12.09411681	11.87016504
17	13.16611847	12.90494681	12.65132059	12.40497835
18	13.75351308	13.46726083	13.18968173	12.92046106
19	14.32379910	14.01187490	13.70983742	13.41731187
20	14.87747486	14.53934615	14.21240330	13.89620421
21	15.41502414	15.05021419	14.69797420	14.35778719
22	15.93691664	15.54500163	15.16712484	14.80268645
23	16.44360839	16.02421466	15.62041047	15.23150501
24	16.93554212	16.48834349	16.05836760	15.64482411
25	17.41314769	16.93786295	16.48151459	16.04320396
26	17.87684242	17.37323288	16.89035226	16.42718454
27	18.32703147	17.79489867	17.28536451	16.79728630
28	18.76410823	18.20329169	17.66701885	17.15401089
29	19.18845459	18.59882973	18.03576700	17.49784183
30	19.60044135	18.98191741	18.39204541	17.82924513
31	20.00042849	19.35294664	18.73627576	18.14867001
32	20.38876553	19.71229699	19.06886547	18.45654941
33	20.76579178	20.06033607	19.39020818	18.75330063
34	21.13183668	20.39741992	19.70068423	19.03932591
35	21.48722007	20.72389339	20.00066110	19.31501293
36	21.83225250	21.04009045	20.29049381	19.58073535
37	22.16723544	21.34633457	20.57052542	19.83685335
38	22.49246159	21.64293905	20.84108736	20.08371407
39	22.80821513	21.93020732	21.10249987	20.32165212
40	23.11477197	22.20843324	21.35507234	20.55098999
41	23.41239997	22.47790144	21.59910371	20.77203855
42	23.70135920	22.73888759	21.83488281	20.98509739
43	23.98190213	22.99165869	22.06268870	21.19045532
44	24.25427392	23.23647330	22.28279102	21.38839067
45	24.51871254	23.47358189	22.49545026	21.57917173
46	24.77544907	23.70322701	22.70091813	21.76305709
47	25.02470783	23.92564360	22.89943780	21.94029599
48	25.26670664	24.14105917	23.09124425	22.11112866
49	25.50165693	24.34969412	23.27656450	22.27578666
50	25.72976401	24.55176185	23.45561787	22.43449317
60	27.67556367	26.25365619	24.94473412	23.73791594
70	29.12342135	27.48969467	26.00039664	24.63991119
80	30.20076345	28.38739500	26.74877567	25.26411037
90	31.00240714	29.03936976	27.27931564	25.69606899
100	31.59890534	29.51288088	27.65542540	25.99499320

	4.0	4.25	4.5	4.75
1	.961538462	.959232614	.956937799	.954653938
2	1.886094675	1.879359821	1.872667750	1.866018079
3	2.775091033	2.761975848	2.748964354	2.736055445
4	3.629895224	3.608609926	3.587525698	3.566640043
5	4.451822331	4.420728946	4.389976744	4.359560901
6	5.242136857	5.199739996	5.157872483	5.116525919
7	6.002054670	5.946992802	5.892700940	5.839165555
8	6.732744875	6.663782064	6.595886067	6.529036330
9	7.435331610	7.351349701	7.268790495	7.187624181
10	8.110895779	8.010887004	7.912718176	7.816347666
11	8.760476710	8.643536694	8.528916915	8.416561018
12	9.385073760	9.250394910	9.118580779	8.989557057
13	9.985647845	9.832513102	9.682852420	9.536569984
14	10.56312293	10.39089986	10.22282528	10.05877803
15	11.11838743	10.92652265	10.73954573	10.55730599
16	11.65229561	11.44030949	11.23401505	11.03322768
17	12.16566885	11.93315059	11.70719143	11.48756819
18	12.65929697	12.40589985	12.15999180	11.92130615
19	13.13393940	12.85937636	12.59329359	12.33537580
20	13.59032634	13.29436581	13.00793645	12.73066902
21	14.02915995	13.71162188	13.40472388	13.10803725
22	14.45111533	14.11186751	13.78442476	13.46829332
23	14.85684167	14.49579617	14.14777489	13.81221319
24	15.24696314	14.86407307	14.49547837	14.14053765
25	15.62207994	15.21733627	14.82820896	14.45397389
26	15.98276918	15.55619787	15.14661145	14.75319703
27	16.32958575	15.88124496	15.45130282	15.03885158
28	16.66306322	16.19304072	15.74287351	15.31155282
29	16.98371463	16.49212539	16.02188853	15.57188814
30	17.29203330	16.77901717	16.28888854	15.82041827
31	17.58849356	17.05421311	16.54439095	16.05767854
32	17.87355150	17.31819003	16.78889086	16.28417999
33	18.14764567	17.57140531	17.02286207	16.50041049
34	18.41119776	17.81429766	17.24675796	16.70683579
35	18.66461323	18.04728792	17.46101240	16.90390052
36	18.90828195	18.27077978	17.66604058	17.09202913
37	19.14257880	18.48516046	17.86223979	17.27162686
38	19.36786423	18.69080140	18.04999023	17.44308053
39	19.58448484	18.88805890	18.22965572	17.60675946
40	19.79277388	19.07727472	18.40158442	17.76301619
41	19.99305181	19.25877671	18.56610949	17.91218729
42	20.18562674	19.43287934	18.72354975	18.05459407
43	20.37079494	19.59988426	18.87421029	18.19054327
44	20.54884129	19.76008082	19.01838305	18.32032770
45	20.72003970	19.91374659	19.15634742	18.44422692
46	20.88165356	20.06114781	19.28837074	18.56250780
47	21.04293612	20.20253987	19.41470884	18.67542511
48	21.19513088	20.33816774	19.53560654	18.78322206
49	21.34147200	20.46826642	19.65129813	18.88613085
50	21.48218462	20.59306131	19.76200778	18.98437312
60	22.62348997	21.59277911	20.63802204	19.75226891
70	23.39451498	22.25213029	21.20211187	20.23506303
80	23.91539185	22.68699698	21.56334493	20.53850703
90	24.26727759	22.97380779	21.79924075	20.72945227
100	24.50499900	23.16297022	21.94985274	20.84944116

	5.0	5.25	5.5	5.75
1	.952380952	.950118765	.947867299	.945626478
2	1.859410431	1.852844432	1.846319714	1.839835913
3	2.723248029	2.710541028	2.697933378	2.685424031
4	3.545950504	3.525454659	3.505150122	3.485034544
5	4.329476671	4.299719390	4.270284475	4.241167418
6	5.075692067	5.035362841	4.995530308	4.956186683
7	5.786373397	5.734311488	5.682967117	5.632327833
8	6.463212759	6.398395713	6.334565987	6.271704806
9	7.107821675	7.029354596	6.952195248	6.876316601
10	7.721734928	7.628840471	7.537625827	7.448053523
11	8.306414217	8.198423250	8.092536330	7.988703097
12	8.863251636	8.739594538	8.618517849	8.499955647
13	9.393572987	9.253771533	9.117078530	8.983409595
14	9.898640940	9.742300744	9.589647895	9.440576449
15	10.37965804	10.20646151	10.03758094	9.872885531
16	10.83776956	10.64746937	10.46216203	10.28168845
17	11.27406625	11.06647921	10.86460856	10.66826331
18	11.68958690	11.46458833	11.24607447	11.03381873
19	12.08532086	11.84283926	11.60765352	11.37949762
20	12.46221034	12.20222258	11.95038248	11.70638072
21	12.82115271	12.54367941	12.27524406	12.01549005
22	13.16300258	12.86810395	12.58316973	12.30779201
23	13.48857388	13.17634580	12.87504239	12.58420048
24	13.79864179	13.46921216	13.15169895	12.84557965
25	14.09394457	13.74746999	13.41393266	13.09274671
26	14.37518530	14.01184797	13.66249541	13.32647443
27	14.64303362	14.26303845	13.89809991	13.54749355
28	14.89812726	14.50169924	14.12142172	13.75649509
29	15.14107358	14.72845533	14.33310116	13.95413247
30	15.37245103	14.94390055	14.53374517	14.14102361
31	15.59281050	15.14859910	14.72392907	14.31775282
32	15.80267667	15.34308703	14.90419817	14.48487265
33	16.00254921	15.52787367	15.07506936	14.64290558
34	16.19290401	15.70344291	15.23703257	14.79234570
35	16.37419429	15.87025455	15.39055220	14.93366024
36	16.54685171	16.02874541	15.53606843	15.06729100
37	16.71128734	16.17933056	15.67399851	15.19365579
38	16.86789271	16.32240433	15.80473793	15.31314969
39	17.01704067	16.45834141	15.92866154	15.42614628
40	17.15908635	16.58749778	16.04612469	15.53299884
41	17.29436796	16.71021166	16.15746416	15.63404146
42	17.42320758	16.82680443	16.26299920	15.72959003
43	17.54591198	16.93758141	16.36303242	15.81994329
44	17.66277331	17.04283269	16.45785063	15.90538373
45	17.77406982	17.14283391	16.54772572	15.98617847
46	17.88006650	17.23784695	16.63291537	16.06258011
47	17.98101571	17.32812061	16.71366386	16.13482753
48	18.07715782	17.41389132	16.79020271	16.20314660
49	18.16872173	17.49538368	16.86275139	16.26775092
50	18.25592546	17.57281109	16.93151790	16.32884248
60	18.92928953	18.16349251	17.44985416	16.78385567
70	19.34267665	18.51759768	17.75330406	17.04400351
80	19.59646048	18.72987872	17.93095291	17.19273964
90	19.75226174	18.85713821	18.03495398	17.27777757
100	19.84791020	18.93342818	18.09583939	17.32639690

	6.0	6.25	6.5	6.75
1	.943396226	.941176471	.938967136	.936768150
2	1.833392666	1.826989619	1.820626419	1.814302716
3	2.673011949	2.660696112	2.648475511	2.636349149
4	3.465105613	3.445361047	3.425798602	3.406416064
5	4.212363785	4.183869220	4.155679438	4.127790224
6	4.917324326	4.878935737	4.841013557	4.803550561
7	5.582381439	5.533115987	5.484519771	5.436581322
8	6.209793810	6.148815047	6.088750959	6.029584376
9	6.801692274	6.728296514	6.656104186	6.585090751
10	7.360087051	7.273690838	7.188830223	7.105471430
11	7.886874577	7.787003141	7.689042463	7.592947475
12	8.383843940	8.270120604	8.158725317	8.049599508
13	8.852682963	8.724819392	8.599742082	8.477376589
14	9.294983927	9.152771192	9.013842330	8.878104533
15	9.712248988	9.555549357	9.402668855	9.253493707
16	10.10589527	9.934634689	9.767764183	9.605146330
17	10.47725969	10.29142088	10.11057670	9.934563307
18	10.82760348	10.62721966	10.43246638	10.24315064
19	11.15811649	10.94326556	10.73471022	10.53222542
20	11.46992122	11.24072053	11.01850725	10.80302147
21	11.76407662	11.52067814	11.28498333	11.05669459
22	12.04158172	11.78416766	11.53519562	11.29432748
23	12.30337898	12.03215780	11.77013673	11.51693441
24	12.55035753	12.26556028	11.99073871	11.72546549
25	12.78335616	12.48523321	12.19787673	11.92081076
26	13.00316619	12.69198419	12.39237251	12.10380399
27	13.21053414	12.88657336	12.57499766	12.27522622
28	13.40616428	13.06971610	12.74647668	12.43580911
29	13.59072102	13.24208574	12.90748984	12.58623804
30	13.76483115	13.40431599	13.05867591	12.72715507
31	13.92908599	13.55700329	13.20063465	12.85916166
32	14.08404339	13.70070898	13.33392925	12.98282123
33	14.23022961	13.83596139	13.45908850	13.09866157
34	14.36814114	13.96325778	13.57660892	13.20717712
35	14.49824636	14.08306615	13.68695673	13.30883102
36	14.62098713	14.19582696	13.79056970	13.40405716
37	14.73678031	14.30195479	13.88785887	13.49326198
38	14.84601916	14.40183980	13.97921021	13.57682621
39	14.94907468	14.49584922	14.06498611	13.65510652
40	15.04629687	14.58432868	14.14552687	13.72843702
41	15.13801592	14.66760346	14.22115199	13.79713070
42	15.22454332	14.74597973	14.29216149	13.86148075
43	15.30617294	14.81974563	14.35883708	13.92176183
44	15.38318202	14.88917236	14.42144327	13.97823122
45	15.45583209	14.95451516	14.48022842	14.03112995
46	15.52436990	15.01601427	14.53542575	14.08068379
47	15.58902821	15.07389578	14.58725422	14.12710425
48	15.65002661	15.12837250	14.63591946	14.17058947
49	15.70757227	15.17964471	14.68161451	14.21132503
50	15.76186064	15.22790090	14.72452067	14.24948480
60	16.16142771	15.57890153	15.03296574	14.52062800
70	16.38454387	15.77033529	15.19728247	14.66172568
80	16.50913077	15.87474217	15.28481926	14.73515019
90	16.57869944	15.93168509	15.33145086	14.77335888
100	16.61754623	15.96274144	15.35629726	14.79324195

	7.0	7.25	7.5	7.75
1	.934579439	.932400932	.930232558	.928074246
2	1.808018167	1.801772431	1.795565170	1.789396052
3	2.624316044	2.612375227	2.600525740	2.588766637
4	3.387211256	3.368182030	3.349326270	3.330641891
5	4.100197436	4.072896997	4.045884902	4.019157207
6	4.766539659	4.729973890	4.693846420	4.658150540
7	5.389289401	5.342632998	5.296601321	5.251183796
8	5.971298505	5.913876920	5.857303555	5.801562688
9	6.515232249	6.446505288	6.378887028	6.312355163
10	7.023581541	6.943128474	6.864080956	6.786408504
11	7.498674337	7.406180395	7.315424145	7.226365201
12	7.942686297	7.837930438	7.735278275	7.634677681
13	8.357650744	8.240494581	8.125840255	8.013621977
14	8.745467985	8.615845763	8.489153726	8.365310420
15	9.107914005	8.965823556	8.827119745	8.691703406
16	9.446648603	9.292143175	9.141506740	8.994620330
17	9.763222993	9.596403893	9.433959758	9.275749726
18	10.05908691	9.880096870	9.706009077	9.536658679
19	10.33559524	10.14461247	9.959078211	9.778801558
20	10.59401425	10.39124705	10.19449136	10.00352813
21	10.83552733	10.62120938	10.41348033	10.21209107
22	11.06124050	10.83562646	10.61719101	10.40565297
23	11.27218738	11.03554914	10.80668931	10.58529278
24	11.46933400	11.22195724	10.98296680	10.75201186
25	11.65358318	11.39576433	11.14694586	10.90673954
26	11.82577867	11.55782222	11.29948452	11.05033832
27	11.98670904	11.70892515	11.44138095	11.18360865
28	12.13711125	11.84981366	11.57337763	11.30729341
29	12.27767407	11.98117823	11.69616524	11.42208205
30	12.40904118	12.10366269	11.81038627	11.52861443
31	12.53181419	12.21786731	11.91663839	11.62748439
32	12.64655532	12.32435180	12.01547757	11.71924306
33	12.75379002	12.42363805	12.10742099	11.80440191
34	12.85400936	12.51621263	12.19294976	11.88343565
35	12.94767230	12.60252926	12.27251141	11.95678482
36	13.03520776	12.68301096	12.34652224	12.02485830
37	13.11701660	12.75805218	12.41536952	12.08803555
38	13.19347345	12.82802068	12.47941351	12.14666872
39	13.26492846	12.89325938	12.53898931	12.20108466
40	13.33170884	12.95408800	12.59440866	12.25158669
41	13.39412041	13.01080466	12.64596155	12.29845633
42	13.45244898	13.06368733	12.69391772	12.34195483
43	13.50696167	13.11299518	12.73852811	12.38232467
44	13.55790810	13.15896986	12.78002615	12.41979087
45	13.60552159	13.20183670	12.81862898	12.45456230
46	13.65002018	13.24180578	12.85453858	12.48683276
47	13.69160764	13.27907299	12.88794287	12.51678214
48	13.73047413	13.31382097	12.91901662	12.54457739
49	13.76679853	13.34622002	12.94792244	12.57037345
50	13.80074629	13.37642892	12.97481157	12.59431411
60	14.03918115	13.58617322	13.15938075	12.75678518
70	14.16038934	13.69033710	13.24893260	12.83380514
80	14.22200544	13.74206730	13.29238261	12.87031671
90	14.25332794	13.76775771	13.31316429	12.88762514
100	14.26925971	13.78051617	13.32369299	12.89583026

	8.0	8.25	8.5	8.75
1	.925925926	.923787529	.921658986	.919540230
2	1.783264746	1.777170927	1.771114273	1.765094464
3	2.577096987	2.565515868	2.554022371	2.542615599
4	3.312126840	3.293779093	3.275596656	3.257577562
5	3.992710037	3.966539578	3.940642079	3.915013850
6	4.622879663	4.588027323	4.553587169	4.519552966
7	5.206370058	5.162149952	5.118513519	5.075451003
8	5.746638944	5.692517277	5.639182968	5.586621612
9	6.246887911	6.182463997	6.119062643	6.056663552
10	6.710081399	6.635070667	6.561348058	6.488886024
11	7.138964258	7.053183065	6.968984386	6.886331976
12	7.536078017	7.439430083	7.344686070	7.251799519
13	7.903775942	7.796240261	7.690954903	7.587861626
14	8.244236983	8.125857054	8.010096685	7.896884254
15	8.559478688	8.430352937	8.304236576	8.181042992
16	8.851369155	8.711642436	8.575333250	8.442338384
17	9.121638107	8.971494167	8.825191935	8.682610008
18	9.371887136	9.211541956	9.055476438	8.903549433
19	9.603599200	9.433295109	9.267720219	9.106712122
20	9.818147407	9.638147907	9.463336608	9.293528388
21	10.01680316	9.827388367	9.643628210	9.465313460
22	10.20074366	10.00220634	9.809795585	9.623276745
23	10.37105895	10.16370101	9.962945240	9.768530340
24	10.52875828	10.31288777	10.10409700	9.902096865
25	10.67477619	10.45070464	10.23419078	10.02491666
26	10.80997795	10.57801814	10.35409288	10.13785440
27	10.93516477	10.69562877	10.46460174	10.24170519
28	11.05107849	10.80427600	10.56645321	10.33720018
29	11.15840601	10.90464295	10.66032554	10.42501166
30	11.25778334	10.99736070	10.74684382	10.50575785
31	11.34979939	11.08301219	10.82658416	10.58000721
32	11.43499944	11.16213597	10.90007757	10.64828250
33	11.51388837	11.23522954	10.96781343	10.71106436
34	11.58693367	11.30275246	11.03024279	10.76879482
35	11.65456822	11.36512929	11.08778137	10.82188029
36	11.71719279	11.42275223	11.14081233	10.87069452
37	11.77517851	11.47598359	11.18968878	10.91558117
38	11.82886899	11.52515805	11.23473620	10.95685625
39	11.87858240	11.57058480	11.27625457	10.99481034
40	11.92461333	11.61254947	11.31452034	11.02971066
41	11.96723457	11.65131591	11.34978833	11.06180291
42	12.00669867	11.68712786	11.38229339	11.09131302
43	12.04323951	11.72021049	11.41225197	11.11844875
44	12.07707362	11.75077182	11.43986357	11.14340115
45	12.10840150	11.77900399	11.46531205	11.16634589
46	12.13740880	11.80508452	11.48876686	11.18744449
47	12.16426741	11.82917738	11.51038420	11.20684551
48	12.18913649	11.85143107	11.53030802	11.22468553
49	12.21216341	11.87199452	11.54867099	11.24109014
50	12.23348464	11.89098801	11.56559538	11.25617484
60	12.37655182	12.01701115	11.67664221	11.35405775
70	12.44281961	12.07405007	11.72575661	11.39636494
80	12.47351441	12.09986626	11.74747919	11.44165106
90	12.48773205	12.11155081	11.75708677	11.45255473
100	12.49431757	12.11683936	11.76133606	11.45347088

	9.0	9.25	9.5	9.75
1	.917431193	.915331808	.913242009	.911161731
2	1.759111186	1.753164126	1.747252976	1.741377432
3	2.531294666	2.520058697	2.508906828	2.497838206
4	3.239719877	3.222021690	3.204481121	3.187096316
5	3.889651263	3.864550746	3.839708786	3.815121927
6	4.485918590	4.452678028	4.419825375	4.387354831
7	5.032952835	4.991009637	4.949612215	4.908751555
8	5.534819115	5.483761682	5.433435813	5.383828296
9	5.995246894	5.934793301	5.875283848	5.816700042
10	6.417657701	6.347636889	6.278798034	6.211116211
11	6.805190552	6.725525757	6.647304141	6.570493131
12	7.160725277	7.071419457	6.983839398	6.897943627
13	7.486903924	7.388026963	7.291177533	7.196303989
14	7.786150389	7.677827884	7.571851628	7.468158532
15	8.060688430	7.943091884	7.828175003	7.715861988
16	8.312558193	8.185896462	8.062260276	7.941559898
17	8.543631369	8.408143214	8.276036782	8.147207196
18	8.755625109	8.611572736	8.471266468	8.334585145
19	8.950114779	8.797778248	8.649558418	8.505316760
20	9.128545669	8.968218076	8.812382117	8.660880875
21	9.292243733	9.124227072	8.961079559	8.802624943
22	9.442425443	9.267027068	9.096876309	8.931776714
23	9.580206829	9.397736447	9.220891607	9.049454864
24	9.706611769	9.517378899	9.334147586	9.156678692
25	9.822579605	9.626891440	9.437577704	9.254376940
26	9.928972115	9.727131753	9.532034433	9.343395845
27	10.02657992	9.818884900	9.618296286	9.424506465
28	10.11612837	9.902869474	9.697074234	9.498411358
29	10.19828291	9.979743225	9.769017565	9.565750668
30	10.27365404	10.05010822	9.834719237	9.627107670
31	10.34280187	10.11451553	9.894720765	9.683013822
32	10.40624025	10.17346959	9.949516680	9.733953369
33	10.46444060	10.22743212	9.999558612	9.780367534
34	10.51783541	10.27682574	10.04525901	9.822658345
35	10.56682148	10.32203729	10.08699453	9.861192114
36	10.61176282	10.36342086	10.12510916	9.896302610
37	10.65299342	10.40130056	10.15991704	9.928293950
38	10.69081965	10.43597305	10.19170506	9.957443234
39	10.72552261	10.46770989	10.22073521	9.984002947
40	10.75736020	10.49675962	10.24724677	10.00820314
41	10.78656899	10.52334977	10.27145824	10.03025343
42	10.81336604	10.54768858	10.29356917	10.05034481
43	10.83795050	10.56996666	10.31376180	10.06865131
44	10.86050504	10.59035850	10.33220255	10.08533149
45	10.88119729	10.60902380	10.34904343	10.10052983
46	10.90018100	10.62610874	10.36442322	10.11437798
47	10.91759725	10.64174713	10.37846870	10.12699588
48	10.93357546	10.65606145	10.39129561	10.13849283
49	10.94823436	10.66916379	10.40300969	10.14896841
50	10.96168290	10.68115679	10.41370748	10.15851336
60	11.04799102	10.75728398	10.48087674	10.21779814
70	11.08444850	10.78871260	10.50798049	10.24118101
80	11.09984854	10.80168771	10.51891724	10.25010360
90	11.10635368	10.80701410	10.52333037	10.25401113
100	11.10910152	10.80925587	10.52511113	10.25547581

	10.0	10.25	10.5	10.75
1	.909090909	.907029478	.904977376	.902934537
2	1.735537190	1.729731953	1.723961426	1.718225316
3	2.486851991	2.475947350	2.465123462	2.454379518
4	3.169865446	3.152786712	3.135858337	3.119078571
5	3.790786769	3.766699965	3.742858223	3.719258303
6	4.355260699	4.323537384	4.292179388	4.261181313
7	4.868418818	4.828605337	4.789302613	4.750502314
8	5.334926198	5.286716859	5.239187885	5.192327146
9	5.759023816	5.702237513	5.646323878	5.591266046
10	6.144567106	6.079126996	6.014772740	5.951481757
11	6.495061005	6.420976867	6.348210625	6.276732963
12	6.813691823	6.731044778	6.649964366	6.570413511
13	7.103356203	7.012285513	6.923044675	6.835587820
14	7.366687457	7.267379150	7.170176177	7.075022862
15	7.606079506	7.498756598	7.393824594	7.291217032
16	7.823708642	7.708622765	7.596221352	7.486426214
17	8.021553311	7.898977565	7.779385839	7.662687326
18	8.201412101	8.071634979	7.945145556	7.821839572
19	8.364920092	8.228240344	8.095154349	7.965543632
20	8.513563720	8.370286026	8.230908913	8.095298990
21	8.648694291	8.499125647	8.353763723	8.212459585
22	8.771540264	8.615986982	8.464944545	8.318247932
23	8.883218422	8.721983657	8.565560674	8.413767885
24	8.984744020	8.818125766	8.656615995	8.500016149
25	9.077040018	8.905329493	8.739019000	8.577892685
26	9.160945471	8.984425844	8.813591855	8.648210099
27	9.237223156	9.056168566	8.881078602	8.711702121
28	9.306566505	9.121241330	8.942152581	8.769031261
29	9.369605914	9.180264245	8.997423150	8.820795721
30	9.426914467	9.233799768	9.047441765	8.867535639
31	9.479013152	9.282358067	9.092707480	8.909738726
32	9.526375593	9.326401874	9.133671927	8.947845351
33	9.569432357	9.366350906	9.170743826	8.982253139
34	9.608574870	9.402585856	9.204293055	9.013321119
35	9.644158973	9.435452024	9.234654348	9.041373470
36	9.676508157	9.465262607	9.262130632	9.066702908
37	9.705916506	9.492301684	9.286996047	9.089573732
38	9.732651369	9.516826924	9.309498685	9.110224588
39	9.756955790	9.539072040	9.329863063	9.128870960
40	9.779050718	9.559249016	9.348292365	9.145707413
41	9.799137017	9.577550128	9.364970466	9.160909628
42	9.817397288	9.594149776	9.380063770	9.174636233
43	9.833997535	9.609206146	9.393722869	9.187030459
44	9.849088668	9.622862717	9.406084044	9.198221633
45	9.862807880	9.635249630	9.417270628	9 208326531
46	9.875279891	9.646484925	9.427394234	9.217450592
47	9.886618082	9.656675669	9.436555868	9.225689023
48	9.896925530	9.665918974	9.444816939	9.233127786
49	9.906295936	9.674302925	9.452350171	9.239844502
50	9.914814487	9.681907415	9.459140426	9.245909257
60	9.967157297	9.728136075	9.499982268	9.282003535
70	9.987337716	9.745559171	9.515030399	9.295005261
80	9.995118141	9.752125753	9.520574865	9.299688687
90	9.998117832	9.754600628	9.522617718	9.301375731
100	9.999274343	9.755533383	9.523370404	9.301983430

	11.0	11.25	11.5	11.75
1	.900900901	.898876404	.896860987	.894854586
2	1.712523334	1.706855195	1.701220616	1.695619316
3	2.443714715	2.433128265	2.422619386	2.412187308
4	3.102445689	3.085957991	3.069613799	3.053411461
5	3.695897017	3.672771227	3.649877846	3.627213835
6	4.230537854	4.200243800	4.170294033	4.140683522
7	4.712196265	4.674376450	4.637035007	4.600164225
8	5.146122761	5.100563101	5.055636778	5.011332640
9	5.537047532	5.483652226	5.431064375	5.379268582
10	5.889232011	5.828002001	5.767770740	5.708517746
11	6.206515325	6.137529888	6.069749542	6.003147872
12	6.492356149	6.415757203	6.340582549	6.266798990
13	6.749870404	6.665849171	6.583482107	6.502728403
14	6.981865229	6.890650940	6.801329244	6.713850920
15	7.190869576	7.092719946	6.996707842	6.902774872
16	7.379161780	7.274355008	7.171935284	7.071834338
17	7.548794396	7.437622479	7.329089941	7.223117975
18	7.701616573	7.584379756	7.470035822	7.358494833
19	7.839294210	7.716296410	7.596444683	7.479637434
20	7.963328117	7.834873178	7.709815859	7.588042447
21	8.075070376	7.941459036	7.811494044	7.685049169
22	8.175739077	8.037266549	7.902685241	7.771856080
23	8.266431601	8.123385662	7.984471069	7.849535642
24	8.348136578	8.200796101	8.057821586	7.919047554
25	8.421744665	8.270378518	8.123606804	7.981250608
26	8.488058256	8.332924510	8.182606999	8.036913296
27	8.547800231	8.389145627	8.235521972	8.086723307
28	8.601621830	8.439681463	8.282979347	8.131296024
29	8.650109757	8.485106933	8.325542015	8.171182125
30	8.693792573	8.525938816	8.363714812	8.206874384
31	8.733146463	8.562641632	8.397950504	8.238813767
32	8.768600417	8.595632928	8.428655161	8.267394870
33	8.800540916	8.625288025	8.456192969	8.292970801
34	8.829316141	8.651944292	8.480890555	8.315857540
35	8.855239766	8.675904982	8.503040857	8.336337843
36	8.878594384	8.697442680	8.522906598	8.354664737
37	8.899634580	8.716802409	8.540723406	8.371064641
38	8.918589712	8.734204413	8.556702606	8.385740171
39	8.935666407	8.749846663	8.571033728	8.398872636
40	8.951050817	8.763907113	8.583886751	8.410624283
41	8.964910646	8.776545720	8.595414127	8.421140298
42	8.977396978	8.787906265	8.605752580	8.430550602
43	8.988645927	8.798117991	8.615024736	8.438971456
44	8.998780114	8.807297070	8.623340570	8.446506896
45	9.007910013	8.815547928	8.630798717	8.453250019
46	9.016135147	8.822964430	8.637487639	8.459284133
47	9.023545177	8.829630948	8.643486672	8.464683788
48	9.030220880	8.835623324	8.648866970	8.469515694
49	9.036235027	8.841009730	8.653692350	8.473839547
50	9.041653178	8.845851442	8.658020045	8.477708767
60	9.073561923	8.874068954	8.682981197	8.499796277
70	9.084799688	8.883785648	8.691385775	8.507068572
80	9.088757454	8.887131589	8.694215650	8.509462969
90	9.090151318	8.888283763	8.695168487	8.510251322
100	9.090642215	8.888680514	8.695489314	8.510510886

	12.0	12.25	12.5	12.75
1	.892857143	.890868597	.888888889	.886917960
2	1.690051020	1.684515454	1.679012346	1.673541428
3	2.401831268	2.391550516	2.381344307	2.371211909
4	3.037349346	3.021425849	3.005639384	2.989988390
5	3.604776202	3.582562004	3.560568342	3.538792363
6	4.111407324	4.082460582	4.053838526	4.025536464
7	4.563756539	4.527804528	4.492300912	4.457238549
8	4.967639767	4.924547463	4.882045255	4.840122882
9	5.328249792	5.277993286	5.228484671	5.179709873
10	5.650223028	5.592867070	5.536430819	5.480895675
11	5.937699133	5.873378236	5.810160728	5.748022771
12	6.194374225	6.123276825	6.053476202	5.984942591
13	6.423548416	6.345903630	6.269756624	6.195071034
14	6.628168228	6.544234860	6.462005888	6.381437724
15	6.810864489	6.720921924	6.632894123	6.546729689
16	6.973986151	6.878326881	6.784794776	6.693330101
17	7.119630492	7.018554014	6.919817579	6.823352639
18	7.249670082	7.143477964	7.039837848	6.938671964
19	7.365776859	7.254768787	7.146522531	7.040950744
20	7.469443624	7.353914287	7.241353361	7.131663631
21	7.562003236	7.442239900	7.325647432	7.212118520
22	7.644645746	7.520926414	7.400575495	7.283475406
23	7.718433702	7.591025758	7.467178218	7.346763109
24	7.784315806	7.653475063	7.526380638	7.402894110
25	7.843139112	7.709109188	7.579005012	7.452677703
26	7.895659921	7.758671882	7.625782233	7.496831666
27	7.942553501	7.802825730	7.667361985	7.535992608
28	7.984122769	7.842161007	7.704321764	7.570725151
29	8.021806044	7.877203570	7.737174901	7.601530068
30	8.055183968	7.908421888	7.766377690	7.628851501
31	8.084985685	7.936233308	7.792335725	7.653083371
32	8.111594362	7.961009629	7.815409533	7.674575052
33	8.135352109	7.983082074	7.835919585	7.693636410
34	8.156564383	8.002745723	7.854150742	7.710542271
35	8.175503913	8.020263451	7.870356215	7.725536382
36	8.192414208	8.035869444	7.884761080	7.738834928
37	8.207512686	8.049772333	7.897565405	7.750629648
38	8.220993470	8.062157980	7.908947026	7.761090597
39	8.233029884	8.073191965	7.919064023	7.770368601
40	8.243776682	8.083021795	7.928056910	7.778597428
41	8.253372037	8.091778882	7.936050586	7.785895724
42	8.261939319	8.099580296	7.943156077	7.792368713
43	8.269588678	8.106530330	7.949472068	7.798109723
44	8.276418462	8.112721898	7.955086283	7.803201528
45	8.282516484	8.118237771	7.960076696	7.807717512
46	8.287961147	8.123151689	7.964512619	7.811722875
47	8.292822452	8.127529341	7.968455661	7.815275277
48	8.297162904	8.131429260	7.971960588	7.818425967
49	8.301038307	8.134903572	7.975076078	7.821220369
50	8.304498488	8.137998728	7.977813102	7.823698776
60	8.321049285	8.155309523	7.993177577	7.837282661
70	8.330311118	8.160760239	7.997899061	7.841373934
80	8.332370886	8.162476526	7.999353021	7.842606163
90	8.33[illegible]23451	8.163016940	7.999800766	7.842977299
100	8.[illegible]33233560	8.16[illegible]187102	7.[illegible]38617	7.84[illegible]085[illegible]78

	13	13.25	13.5	13.75
1	.884955752	.883002207	.881057269	.879120879
2	1.668102436	1.662695106	1.657319179	1.651974399
3	2.361152598	2.351165656	2.341250378	2.331406065
4	2.974471325	2.959086672	2.943832932	2.928708628
5	3.517231262	3.495882271	3.474742672	3.453809784
6	3.997549789	3.969873970	3.942504557	3.915437172
7	4.422610433	4.388109687	4.354629565	4.321263448
8	4.798770294	4.757977618	4.717735300	4.678033801
9	5.131655128	5.084306974	5.037652247	4.991678066
10	5.426243476	5.372456489	5.319517398	5.267409289
11	5.686941129	5.626893147	5.567856738	5.509810364
12	5.917647017	5.851561278	5.786657919	5.722910210
13	6.121811519	6.049943733	5.979434290	5.910250734
14	6.302488070	6.225115879	6.149281313	6.074945700
15	6.462378823	6.379793271	6.298926267	6.219732481
16	6.603875065	6.516373749	6.430772041	6.347017568
17	6.729092978	6.636974613	6.546935719	6.458916544
18	6.839905290	6.743465442	6.649282572	6.557289269
19	6.937969283	6.837497079	6.739456010	6.643770786
20	7.024751578	6.920527222	6.818903974	6.719798493
21	7.101550069	6.993843022	6.888902180	6.786636038
22	7.169513335	7.058581035	6.950574608	6.845394319
23	7.229657819	7.115744843	7.004911549	6.897049951
24	7.282883026	7.166220612	7.052785505	6.942461495
25	7.329984978	7.210790827	7.094965203	6.982383732
26	7.371668123	7.250146426	7.132127932	7.017480204
27	7.408555861	7.284897506	7.164870425	7.048334245
28	7.441199877	7.315582787	7.193718436	7.075458677
29	7.470088386	7.342677958	7.219135186	7.099204332
30	7.495653439	7.366603053	7.241528798	7.120267544
31	7.518277380	7.387728965	7.261258853	7.138696742
32	7.538298566	7.406383192	7.278642161	7.154898235
33	7.556016430	7.422854916	7.293957851	7.169141305
34	7.571695956	7.437399484	7.307451851	7.181662686
35	7.585571643	7.450242370	7.319340838	7.192670493
36	7.597851011	7.461582667	7.329815716	7.202347686
37	7.608717709	7.471596174	7.339044684	7.210855109
38	7.618331256	7.480438123	7.317175933	7.218334162
39	7.626844474	7.488245583	7.354340029	7.224909153
40	7.634375641	7.495139587	7.360652008	7.230689365
41	7.641040390	7.501227009	7.366213223	7.235770871
42	7.646938398	7.506602215	7.371112972	7.240238128
43	7.652157875	7.511318534	7.375429931	7.244165387
44	7.656776880	7.515539545	7.379233419	7.217617923
45	7.660864496	7.519240216	7.382584511	7.250653119
46	7.664481855	7.522507917	7.385537014	7.2[illegible]3321423
47	7.667683057	7.525393[illegible]01	7.388138338	7.2[illegible]67185
48	7.670515980	7.527941108	7.[illegible]00430254	7.2[illegible]729394
49	7.673022991	7.530190823	7.392149563	7.2[illegible]12324
50	7.675211585	7.532177[illegible]28	7.394228690	7.2[illegible]1136109
60	7.687280216	7.542819731	7.402692786	7.2[illegible]331227
70	7.690826656	7.5[illegible]92[illegible]983	7.406360385	7.271846023
80	7.691871396	7.5[illegible]811115	7.407142288	7.2[illegible]184285
90	7.692179165	7.547[illegible]6153	7.407321224	7.272[illegible]0273
100	7.6[illegible]	7.547[illegible]40029	7.407[illegible]3961	7.272[illegible]8799

Таблица П.12. Значение коэффициента $K_{p;i}$

Ставка процентов	Число членов ренты в году			
	2	4	6	12
1	1.002493781	1.003742226	1.004158605	1.004575099
1.25	1.003115295	1.004675369	1.005195753	1.005716316
1.50	1.003736042	1.005607552	1.006231906	1.006856519
1.75	1.004356025	1.006538781	1.007267069	1.007995709
2	1.004975247	1.007469059	1.008301246	1.009133892
2.25	1.005593710	1.008398388	1.009334439	1.010271070
2.50	1.006211418	1.009326773	1.010366653	1.011407248
2.75	1.006828373	1.010254217	1.011397891	1.012542429
3	1.007444578	1.011180723	1.012428157	1.013676617
3.25	1.008060036	1.012106295	1.013457454	1.014809816
3.50	1.008674749	1.013030936	1.014485785	1.015942028
3.75	1.009288720	1.013954649	1.015513155	1.017073258
4	1.009901951	1.014877439	1.016539566	1.018203509
4.25	1.010514446	1.015799307	1.017565022	1.019332785
4.50	1.011126208	1.016720258	1.018589527	1.020461088
4.75	1.011737237	1.017640295	1.019613084	1.021588424
5	1.012347538	1.018559421	1.020635696	1.022714794
5.25	1.012957113	1.019477640	1.021657367	1.023840203
5.50	1.013565965	1.020394954	1.022678100	1.024964654
5.75	1.014174095	1.021311366	1.023697898	1.026088150
6	1.014781507	1.022226881	1.024716765	1.027210695
6.25	1.015388203	1.023141501	1.025734704	1.028332292
6.50	1.015994186	1.024055229	1.026751718	1.029452945
6.75	1.016599458	1.024968068	1.027767810	1.030572656
7	1.017204022	1.025880022	1.028782985	1.031691429
7.25	1.017807879	1.026791093	1.029797244	1.032809267
7.50	1.018411034	1.027701285	1.030810591	1.033926174
7.75	1.019013487	1.028610601	1.031823029	1.035042153
8	1.019615242	1.029519044	1.032834562	1.036157207
8.25	1.020216301	1.030426616	1.033845193	1.037271339
8.50	1.020816666	1.031333322	1.034854924	1.038384552
8.75	1.021416340	1.032239163	1.035863759	1.039496850
9	1.022015325	1.033144143	1.036871701	1.040608236
9.25	1.022613624	1.034048264	1.037878753	1.041718712
9.50	1.023211238	1.034951531	1.038884917	1.042828283
9.75	1.023808171	1.035853945	1.039890198	1.043936950
10	1.024404424	1.036755509	1.040894598	1.045044718
10.25	1.025000000	1.037656227	1.041898120	1.046151588
10.50	1.025594901	1.038556101	1.042900766	1.047257565
10.75	1.026189129	1.039455134	1.043902541	1.048362652
11	1.026782688	1.040353329	1.044903446	1.049466850
11.25	1.027375578	1.041250689	1.045903486	1.050570164
11.50	1.027967802	1.042147216	1.046902662	1.051672596
11.75	1.028559363	1.043042914	1.047900978	1.052774149
12	1.029150262	1.043937785	1.048898436	1.053874826
12.25	1.029740503	1.044831832	1.049895039	1.054974630
12.50	1.030330086	1.045725058	1.050890791	1.056073564
12.75	1.030919015	1.046617464	1.051885694	1.057171631
13	1.031507291	1.047509055	1.052879750	1.058268833
13.25	1.032094916	1.048399833	1.053872963	1.059365174
13.50	1.032681894	1.049289800	1.054865336	1.060460656
13.75	1.033268225	1.050178960	1.055856870	1.061555283
14	1.033853913	1.051067314	1.056847570	1.062649057

Таблица П.13. Коэффициент наращения непрерывной ренты

Число периодов	Ставка непрерывных процентов			
	.25 (1/4)	.333 (1/3)	.417 (5/12)	.500 (1/2)
1	1.001251042	1.001666850	1.002087901	1.002504172
2	2.005008344	2.006674810	2.008363234	2.010033417
3	3.011278178	3.015035025	3.018843495	3.022612923
4	4.020066834	4.026758677	4.033546258	4.040268005
5	5.031380616	5.041856984	5.052489165	5.063024105
6	6.045225846	6.060341202	6.075689936	6.090906791
7	7.061608860	7.082222627	7.103166362	7.123941760
8	8.080536011	8.107512589	8.134936311	8.162154838
9	9.102013666	9.136222457	9.171017724	9.205571982
10	10.12604821	10.16836364	10.21142862	10.25421928
11	11.15264604	11.20394758	11.25618708	11.30812294
12	12.18181358	12.24298576	12.30531129	12.36730931
13	13.21355726	13.28548971	13.35881947	13.43180488
14	14.24788352	14.33147099	14.41672996	14.50163625
15	15.28479883	15.38094118	15.47906114	15.57683018
16	16.32430968	16.43391194	16.54583150	16.65741353
17	17.36642255	17.49039493	17.61705958	17.74341334
18	18.41114396	18.55040188	18.69276400	18.83485674
19	19.45848045	19.61394454	19.77296348	19.93177103
20	20.50843855	20.68103469	20.85767679	21.03418362
21	21.56102483	21.75168418	21.94692280	22.14212207
22	22.61624587	22.82590487	23.04072045	23.25561409
23	23.67410826	23.90370868	24.13908876	24.37468751
24	24.73461862	24.98510756	25.24204683	25.49937032
25	25.79778357	26.07011350	26.34961384	26.62969061
26	26.86360975	27.15873853	27.46180904	27.76567666
27	27.93210384	28.25099473	28.57865179	28.90735687
28	29.00327250	29.34689420	29.70016149	30.05475977
29	30.07712244	30.44644910	30.82635765	31.20791405
30	31.15366035	31.54967162	31.95725985	32.36684855
31	32.23289298	32.65657400	33.09288776	33.53159222
32	33.31482707	33.76716851	34.23326113	34.70217420
33	34.39946938	34.88146745	35.37839978	35.87862374
34	35.48682668	35.99948320	36.52832364	37.06097026
35	36.57690578	37.12122815	37.68305268	38.24924332
36	37.66971348	38.24671474	38.84260700	39.44347262
37	38.76525662	39.37595544	40.00700676	40.64368803
38	39.86354205	40.50896278	41.17627220	41.84991953
39	40.96457663	41.64574933	42.35042366	43.06219730
40	42.06836723	42.78632768	43.52948156	44.28055163
41	43.17492076	43.93071049	44.71346639	45.50501299
42	44.28424414	45.07891045	45.90239874	46.73561199
43	45.39634430	46.23094029	47.09629930	47.97237939
44	46.51122818	47.38681278	48.29518881	49.21534612
45	47.62890277	48.54654074	49.49908814	50.46454324
46	48.74937503	49.71013703	50.70801820	51.72000199
47	49.87265198	50.87761456	51.92200003	52.98175375
48	50.99874063	52.01898627	53.14105473	54.24983006
49	52.12764803	53.22426515	54.36520351	55.52426264
50	53.25938123	54.40316423	55.59446764	56.80508334
60	64.73369709	66.41396458	68.17320083	69.97176152
70	76.49848664	78.83114828	81.28755732	83.81350972
80	88.56110326	91.66878592	94.96034485	98.36493953
90	100.9290865	104.9411143	109.2153423	113.6624371
100	113.6101667	[illegible]	121.0773412	129.7442541

	.583 (7/12)	.667 (2/3)	.750 (3/4)	.833 (5/6)
1	1.002920673	1.003342427	1.003759393	1.004176589
2	2.011705451	2.013399517	2.015075282	2.016752905
3	3.026388621	3.030216206	3.034004555	3.037799211
4	4.047004672	4.053837730	4.060604527	4.067386355
5	5.073588293	5.084309632	5.094932944	5.105585781
6	6.106174376	6.121677754	6.137047988	6.152469528
7	7.144798019	7.165988248	7.187008277	7.208110238
8	8.189494523	8.217287575	8.244872873	8.272581163
9	9.240299396	9.275622507	9.310701280	9.345956164
10	10.29724835	10.34104013	10.38455345	10.42830972
11	11.36037732	11.41358783	11.46648979	11.51971694
12	12.42972243	12.49331335	12.55657116	12.62025356
13	13.50532004	13.58026470	13.65485888	13.72999593
14	14.58720669	14.67449025	14.76141471	14.84902106
15	15.67541916	15.77603868	15.87630092	15.97740661
16	16.76999444	16.88495900	16.99958021	17.11523087
17	17.87096973	18.00130053	18.13131577	18.26257278
18	18.97838246	19.12511296	19.27157125	19.41951198
19	20.09227025	20.25644626	20.42041079	20.58612872
20	21.21267098	21.39535078	21.57789903	21.76250398
21	22.33962273	22.54187719	22.74410106	22.94871936
22	23.47316379	23.69607648	23.91908249	24.14485719
23	24.61333270	24.85800002	25.10290942	25.35100047
24	25.76016820	26.02769949	26.29564842	26.56723287
25	26.91370929	27.20522694	27.49736659	27.79363881
26	28.07399516	28.39063474	28.70813153	29.03030338
27	29.24106526	29.58397564	29.92801135	30.27731239
28	30.41495924	30.78530273	31.15707466	31.53475237
29	31.59571702	31.99466946	32.39539060	32.80271057
30	32.78337872	33.21212962	33.64302883	34.08127498
31	33.97798471	34.43773738	34.90005951	35.37053431
32	35.17957560	35.67154727	36.16655338	36.67057802
33	36.38819222	36.91361418	37.44258165	37.98149633
34	37.60387565	38.16399336	38.72821612	39.30338020
35	38.82666722	39.42274045	40.02352909	40.63632135
36	40.05660849	40.68991145	41.32859343	41.98041227
37	41.29374125	41.96556273	42.64348255	43.33574624
38	42.53810757	43.24975104	43.96827042	44.70241728
39	43.78974972	44.54253351	45.30303154	46.08052025
40	45.04871027	45.84396767	46.64784101	47.47015076
41	46.31503199	47.15411141	48.00277447	48.87140524
42	47.58875793	48.47302301	49.36790813	50.28438092
43	48.86993138	49.80076116	50.74331878	51.70917584
44	50.15859589	51.13738492	52.12908380	53.14588888
45	51.45479525	52.48295376	53.52528112	54.59461972
46	52.75857353	53.83752754	54.93198929	56.05546889
47	54.06997503	55.20116653	56.34928713	57.52853776
48	55.38904434	56.57393140	57.77725527	59.01392855
49	56.71582628	57.95588320	59.21597314	60.51174431
50	58.05036595	59.34708344	60.66552195	62.02208899
60	71.83254948	73.78157308	75.77145807	77.83812238
70	86.44211825	89.21167785	92.06117978	95.02806011
80	101.9287427	105.7060701	109.6158401	113.7112502
90	118.3450749	123.3381586	129.[illegible]	134.0174084
100	135.7469282	142.1864159	[illegible]	156.0875182

	1	1.25	1.50	1.75
1	1.005016708	1.006276123	1.007537641	1.008801266
2	2.020134003	2.025209642	2.030302264	2.035411931
3	3.045453395	3.056959767	3.068523994	3.080146404
4	4.081077419	4.101687710	4.122436436	4.143324643
5	5.127109638	5.159556713	5.192276726	5.225272254
6	6.183654655	6.230732071	6.278285580	6.326320592
7	7.250818125	7.315381155	7.380707357	7.446806861
8	8.328706767	8.413673446	8.499790105	8.587074220
9	9.417428371	9.525780553	9.635785623	9.747471885
10	10.51709181	10.65187625	10.78894952	10.92835523
11	11.62780705	11.79213648	11.95954125	12.13008593
12	12.74968516	12.94673942	13.14782421	13.35303200
13	13.88283833	14.11586548	14.35406577	14.59756799
14	15.02737989	15.29969733	15.57853733	15.86407504
15	16.18342427	16.49841995	16.82151441	17.15294104
16	17.35108710	17.71222065	18.08327669	18.46456070
17	18.53048513	18.94128909	19.36410806	19.79933573
18	19.72173631	20.18581730	20.66429672	21.15767491
19	20.92495977	21.44599974	21.98413521	22.53999424
20	22.14027582	22.72203334	23.32392051	23.94671706
21	23.36780600	24.01411745	24.68395406	25.37827420
22	24.60767306	25.32245399	26.06454190	26.83510408
23	25.86000099	26.64724737	27.46599464	28.31765287
24	27.12491503	27.98870461	28.88862764	29.82637461
25	28.40254167	29.34703529	30.33276097	31.36173135
26	29.69300867	30.72245168	31.79871959	32.92419332
27	30.99644507	32.11516867	33.28683334	34.51423902
28	32.31298123	33.52540389	34.79743704	36.13235543
29	33.64274880	34.95337768	36.33087060	37.77903809
30	34.98588076	36.39931317	37.88747903	39.45479134
31	36.34251141	37.86343629	39.46761259	41.16012836
32	37.71277643	39.34597581	41.07162681	42.89557145
33	39.09681285	40.84716338	42.69988260	44.66165208
34	40.49475906	42.36723357	44.35274633	46.45891114
35	41.90675486	43.90642389	46.03058989	48.28789905
36	43.33294146	45.46497484	47.73379081	50.14917596
37	44.77346147	47.04312995	49.46273232	52.04331189
38	46.22845894	48.64113580	51.21780343	53.97088693
39	47.69807939	50.25924209	52.99939904	55.93249143
40	49.18246976	51.89770166	54.80792003	57.92872614
41	50.68177851	53.55677050	56.64377330	59.96020242
42	52.19615556	55.23670787	58.50737195	62.02754243
43	53.72575235	56.93777625	60.39313528	64.13137930
44	55.27072185	58.66024143	62.31948896	66.27235736
45	56.83121955	60.40437256	64.26886506	68.45113229
46	58.45739850	62.17041215	66.24770222	70.66837136
47	59.99941932	63.95872617	68.25641566	72.92475362
48	61.60714022	65.76950403	70.29554738	75.22097010
49	63.23162200	67.60305867	72.36546617	77.55772401
50	64.87212707	69.45967659	74.46666777	79.93573108
60	82.21188004	89.36000133	97.30687408	106.1514925
70	101.3752707	111.9100235	123.8134079	137.3809190
80	122.5540928	137.4625163	154.6744615	171.5828552
90	145.96[illegible]211	166.1173179	190.4950354	218.89[illegible]10
100	171.82[illegible]	[illegible]	232.112[illegible]17	[illegible]815

	2	2.25	2.50	2.75
1	1.010067001	1.011334852	1.012604821	1.013876913
2	2.040538710	2.045682663	2.050843855	2.056022352
3	3.091827327	3.103567093	3.115366035	3.127224489
4	4.164353384	4.185523720	4.206836723	4.228293471
5	5.258545904	5.292100307	5.325938123	5.360062035
6	6.374842579	6.423857082	6.473369709	6.523386135
7	7.513689943	7.581367021	7.649848664	7.719145589
8	8.675543550	8.765216139	8.856110326	8.948244749
9	9.860868156	9.976003783	10.09290865	10.21161318
10	11.07013791	11.21434294	11.36101667	11.51020636
11	12.30383653	12.48086055	12.66122699	12.84500642
12	13.56245752	13.77619781	13.99435230	14.21702285
13	14.84650433	15.10101051	15.36122584	15.62729333
14	16.15649062	16.45596938	16.76270194	17.07688442
15	17.49294038	17.84176037	18.19965658	18.56689245
16	18.85638822	19.25908509	19.67298791	20.09844431
17	20.24737953	20.70866108	21.18361679	21.67269831
18	21.66647073	22.19122222	22.73248742	23.29084506
19	23.11422947	23.70751910	24.32056790	24.95410835
20	24.59123488	25.25831936	25.94885083	26.66374610
21	26.09807778	26.84440813	27.61835394	28.42105132
22	27.63536093	28.46658840	29.33012071	30.22735305
23	29.20369925	30.12568145	31.08522108	32.08401739
24	30.80372011	31.82252721	32.88475202	33.99244852
25	32.43606354	33.55798475	34.72983830	35.95408980
26	34.10138248	35.33293270	36.62163316	37.97042481
27	35.80034311	37.14826964	38.56131904	40.04297849
28	37.53362501	39.00491463	40.55010830	42.17331832
29	39.30192154	40.90380765	42.58924400	44.36305546
30	41.10594002	42.84591004	44.68000066	46.61384601
31	42.94640209	44.83220504	46.82368509	48.92739224
32	44.82404397	46.86369825	49.02163714	51.30544387
33	46.73961672	48.94141816	51.27523061	53.74979942
34	48.69388661	51.06641665	53.58587408	56.26230755
35	50.68763537	53.23976956	55.95501176	58.84486847
36	52.72166053	55.46257719	58.38412445	61.49943536
37	54.79677572	57.73596488	60.87473041	64.22801586
38	56.91381102	60.06108358	63.42838637	67.03267359
39	59.07361327	62.43911044	66.04668844	69.91552970
40	61.27704642	64.87124938	68.73127314	72.87876451
41	63.52499188	67.35873173	71.48381842	75.92461908
42	65.81834884	69.90281683	74.30604472	79.05539700
43	68.15803469	72.50479266	77.19971602	82.27346607
44	70.54498532	75.16597655	80.16664096	85.58126009
45	72.98015556	77.88771576	83.20867396	88.98128076
46	75.46451950	80.67138825	86.32771639	92.47609949
47	77.99907092	83.51840330	89.52571775	96.06835942
48	80.58482367	86.43020227	92.80467691	99.76077735
49	83.22281210	89.40825933	96.16664331	103.5561459
50	85.91409112	92.45408217	99.61371830	107.4573354
60	116.0058461	126.9966903	139.2675628	152.9810846
70	152.7599983	170.[illegible]551830	[illegible]	212.9144969
80	197.[illegible]516212	[illegible]	[illegible]	291.8186727
90	[illegible]	[illegible]	[illegible]	395.6984405
100	[illegible]	[illegible]	[illegible]	532.[illegible]

	3	3.25	3.50	3.75
1	1.015151132	1.016427481	1.017705966	1.018986589
2	2.061218218	2.066431520	2.071662322	2.076910690
3	3.139142790	3.151121279	3.163160296	3.175260184
4	4.249895053	4.271642564	4.293537110	4.315579806
5	5.394474758	5.429179029	5.464177617	5.499473318
6	6.573912104	6.624953430	6.676515999	6.728605765
7	7.789268665	7.860228916	7.932037520	8.004705818
8	9.041638344	9.136310359	9.232280352	9.329568202
9	10.33214836	10.45454574	10.57883746	10.70505622
10	11.66196025	11.81632757	11.97335853	12.13310439
11	13.03227095	13.22309435	13.41755204	13.61572113
12	14.44431382	14.67633212	14.91318730	15.15499161
13	15.89935980	16.17757599	16.46209666	16.75308070
14	17.39871852	17.72841179	18.06617771	18.41223596
15	18.94373952	19.33047773	19.72739567	20.13479085
16	20.53581341	20.98546614	21.44778572	21.92316801
17	22.17637316	22.69512527	23.22945557	23.77988263
18	23.86689541	24.46126110	25.07458798	25.70754603
19	25.60890171	26.28573926	26.98544347	27.70886929
20	27.40396001	28.17048705	28.96436307	29.78666711
21	29.25368598	30.11749539	31.01377121	31.94386174
22	31.15974448	32.12882099	33.13617868	34.18348708
23	33.12385111	34.20658851	35.33418568	36.50869297
24	35.14777369	36.35299278	37.61048505	38.92274963
25	37.23333389	38.57030115	39.96786554	41.42905222
26	39.38240885	40.86085583	42.40921524	44.03112563
27	41.59693289	43.22707646	44.93752510	46.73262946
28	43.87889923	45.67146257	47.55589263	49.53736315
29	46.23036178	48.19659626	50.26752564	52.44927131
30	48.65343704	50.80514495	53.07574623	55.47244930
31	51.15030592	53.49986416	55.98399482	58.61114896
32	53.72321578	56.28360044	58.99583438	61.86978461
33	56.37448241	59.15929437	62.11495479	65.25293922
34	59.10649213	62.12998366	65.34517735	68.76537094
35	61.92170394	65.19880638	68.69045951	72.41201968
36	64.82265170	68.36900426	72.15489964	76.19801415
37	67.81194648	71.64392612	75.74274212	80.12867904
38	70.89227884	75.02703141	79.45838250	84.20954247
39	74.06642128	78.52189383	83.30637291	88.44634385
40	77.33723076	82.13220516	87.29142762	92.84504188
41	80.70765121	85.86177913	91.41842882	97.41182293
42	84.18071625	89.71455545	95.69243260	102.1531098
43	87.75955186	93.69460397	100.1186752	107.0755707
44	91.44737924	97.80612898	104.7025792	112.1861287
45	95.24751769	102.0534737	109.4497605	117.4919713
46	99.16338758	106.4411247	114.3660351	123.0005608
47	103.1985135	110.9737169	119.4574259	128.7196445
48	107.3565272	115.6550383	124.7301706	134.6572657
49	111.6411714	120.4930350	130.1907289	140.8217754
50	116.0563023	125.4898165	135.8157907	147.2218432
60	168.3215821	185.4920794	204.7477118	226.3396223
70	238.8723304	268.5513542	302.5241920	341.4553116
80	331.1058791	383.1496318	441.2756220	[illegible]
90	[illegible]	512.5915703	538.1732737	[illegible]
100	[illegible]	762.7796398	917.5813117	[illegible]

	4	4.25	4.50	4.75
1	1.020269355	1.021554268	1.022841331	1.024130550
2	2.082176692	2.087460393	2.092761860	2.098081161
3	3.187421289	3.199643959	3.211928541	3.224275389
4	4.337771775	4.360114149	4.382608069	4.405254688
5	5.535068954	5.570967378	5.607171471	5.643684143
6	6.781228758	6.834391079	6.888098905	6.942358487
7	8.078245308	8.152667655	8.227984688	8.301208404
8	9.428194108	9.528178601	9.629542546	9.732307146
9	10.83323536	10.96340881	11.09561111	11.22987747
10	12.29561744	12.46095105	12.62915968	12.80029889
11	13.81768046	14.02351067	14.23329420	14.44711536
12	15.40186005	15.65391047	15.91126360	16.17404319
13	17.05069124	17.35509580	17.66646635	17.98497950
14	18.76681251	19.13013988	19.50245732	19.88401098
15	20.55297001	20.98224938	21.42295502	21.87542312
16	22.41202198	22.91477017	23.43184913	23.96370991
17	24.34694331	24.93119339	25.53320833	26.15358391
18	26.36083027	27.03516176	27.73128859	28.44998696
19	28.45690551	29.23047613	30.03054179	30.85810130
20	30.63852321	31.52110240	32.43562469	33.38336125
21	32.90917442	33.91117862	34.95140841	36.03146550
22	35.27249266	36.40502254	37.58298827	38.80838997
23	37.73225975	39.00713931	40.33569412	41.72040127
24	40.29241184	41.72222974	43.21510113	44.77407085
25	42.95704571	44.55519869	46.22704109	47.97628985
26	45.73042536	47.51116397	49.37761419	51.33428465
27	48.61698878	50.59546561	52.67320143	54.85563313
28	51.62135508	53.81367547	56.12047750	58.54828184
29	54.74833190	57.17160730	59.72642430	62.42056389
30	58.00292307	60.67532730	63.49834513	66.48121774
31	61.39033662	64.33116499	67.44387939	70.73940698
32	64.91599314	68.14572475	71.57101816	75.20474095
33	68.58553443	72.12589764	75.88812028	79.88729645
34	72.40483254	76.27887395	80.40392938	84.79764049
35	76.37999917	80.61215611	85.12759151	89.94685412
36	80.51739542	85.13357229	90.06867370	95.34655742
37	84.82364202	89.85129053	95.23718333	101.0089358
38	89.30562988	94.77383349	100.6435884	106.9467673
39	93.97053113	99.91009386	106.2988387	113.1734518
40	98.82581061	105.2693504	112.2143881	119.7030409
41	103.8792378	110.8612847	118.4022176	126.5502696
42	109.1388993	116.6959988	124.8748596	133.7305901
43	114.6132116	122.7840331	131.6454235	141.2602058
44	120.3109349	129.1363859	138.7276219	149.1561087
45	126.2411866	135.7645327	146.1357988	157.4361173
46	132.4134565	142.6804476	153.8849582	166.1189169
47	138.8376216	149.8966242	161.9907948	175.2241017
48	145.5239617	157.4260988	170.4697257	184.7722191
49	152.4831766	165.2824734	179.3389237	194.7848162
50	159.7264025	173.4799409	188.6163519	205.2814881
60	250.5794095	277.8142067	308.1384828	342.9006703
70	386.1161693	437.4029000	496.3569907	564.1894451
80	588.3132549	681.5082364	791.0718765	920.0249367
90	889.9558611	1051.889420	1253.276823	1492.213459
100	1339.953751	1626.009702	1978.158173	2412.300727

	5	5.25	5.50	5.75
1	1.025421928	1.026715468	1.028011176	1.029309055
2	2.103418362	2.108773531	2.114146736	2.119538045
3	3.236684855	3.249157295	3.261693067	3.274292532
4	4.428055163	4.451010666	4.474122374	4.497391477
5	5.680508334	5.717647013	5.755103179	5.792879864
6	6.997176152	7.052558304	7.108511427	7.165042081
7	8.381350972	8.459424734	8.538442208	8.618416091
8	9.836493953	9.942124869	10.04922215	10.15780843
9	11.36624371	11.50474634	11.64542253	11.78831013
10	12.97442541	13.15159711	13.33187305	13.51531351
11	14.66506036	14.88721736	15.11367653	15.34453005
12	16.44237601	16.71639199	16.99622426	17.28200927
13	18.31081658	18.64416381	18.98521240	19.33415872
14	20.27505415	20.67584748	21.08665916	21.50776520
15	22.34000033	22.81704410	23.30692301	23.81001716
16	24.51081857	25.07365670	25.65272193	26.24852852
17	26.79293704	27.45190651	28.13115378	28.83136384
18	29.19206222	29.95835007	30.74971768	31.56706497
19	31.71419319	32.59989736	33.51633679	34.46467931
20	34.36563657	35.38383082	36.43938225	37.53378973
21	37.15302236	38.31782543	39.52769850	40.78454629
22	40.08332048	41.40996986	42.79063005	44.22769976
23	43.16385819	44.66878880	46.23804975	47.87463719
24	46.40233845	48.10326643	49.88038868	51.73741961
25	49.80685915	51.72287120	53.72866769	55.82882185
26	53.38593335	55.53758194	57.79453076	60.16237483
27	57.14851061	59.55791537	62.09028023	64.75241032
28	61.10399934	63.79495507	66.62891402	69.61410831
29	65.26229030	68.26038206	71.42416495	74.76354721
30	69.63378141	72.96650701	76.49054231	80.21775704
31	74.22940365	77.92630415	81.84337577	85.99477575
32	79.06064849	83.15344707	87.49886172	92.11370889
33	84.13959654	88.66234638	93.47411232	98.59479273
34	89.47894783	94.46818948	99.78720726	105.4594613
35	95.09205352	100.5869824	106.4572485	112.7304171
36	100.9929493	107.0355939	113.5044179	120.4317064
37	107.1963905	113.8318021	120.9500386	128.5887986
38	113.7178888	120.9943434	128.8166394	137.2286705
39	120.5737516	128.5429640	137.1280225	146.3798956
40	127.7811220	136.4984745	145.9093364	156.0727383
41	135.3580221	144.8828075	155.1871511	166.3392547
42	143.3233983	153.7190775	164.9895392	177.2133975
43	151.6971679	163.0316451	175.3461603	188.7311295
44	160.5002700	172.8461839	186.2883512	200.9305415
45	169.7547167	183.1897515	197.8492202	213.8519790
46	179.4836491	194.0908640	210.0637479	227.5381754
47	189.7113945	205.5795743	222.9688925	242.0343929
48	200.4635276	217.6875555	236.6037020	257.3885730
49	211.7669344	230.4481879	251.2094319	273.6514944
50	223.6498792	243.8966512	265.2296706	290.8769412
60	381.7107385	425.4488192	471.7752531	530.4416054
70	642.3090392	732.3553687	836.2375133	956.1792832
80	1071.963001	1251.168210	1462.713067	1712.770707
90	1780.342626	2128.199969	2548.635708	3057.332422
00	2918.263182	3610.785066	4430.762405	5416.794092

	6	6.25	6.50	6.75
1	1.030609109	1.031911343	1.033215760	1.034522364
2	2.124947526	2.130375249	2.135821282	2.141285694
3	3.286956052	3.299683991	3.312476715	3.325334594
4	4.520819172	4.544406667	4.568155179	4.592065937
5	5.830980126	5.869407059	5.908163784	5.947253458
6	7.222156909	7.279862634	7.338166060	7.397074075
7	8.699359260	8.781284778	8.864205893	8.948136042
8	10.26790670	10.37954033	10.49273307	10.60750907
9	11.93344770	12.08087451	12.23063055	12.38275655
10	13.70198001	13.89193532	14.08524352	14.28197001
11	15.57987224	15.81979951	16.06441050	16.31380605
12	17.57388684	17.87200027	18.17649639	18.48752573
13	19.69120442	20.05655660	20.43042792	20.81303681
14	21.93944961	22.38200470	22.83573128	23.30093894
15	24.32671852	24.85743133	25.40257248	25.96257192
16	26.86160789	27.49250926	28.14180022	28.81006742
17	29.55324607	30.29753511	31.06499183	31.85640427
18	32.41132585	33.28346958	34.18450213	35.11546762
19	35.44613942	36.46198029	37.51351570	38.60211220
20	38.66861538	39.84548732	41.06610258	42.33223008
21	42.09035812	43.44721181	44.85727772	46.32282306
22	45.72368962	47.28122757	48.90306449	50.59208019
23	49.58169379	51.36251610	53.22056235	55.15946065
24	53.67826362	55.70702513	57.82801916	60.04578247
25	58.02815117	60.33173091	62.74490826	65.27331741
26	62.64702075	65.25470459	67.99201085	70.86589247
27	67.55150528	70.49518280	73.59150372	76.84899851
28	72.75926619	76.07364282	79.56705308	83.24990639
29	78.28905704	82.01188259	85.94391449	90.09779132
30	84.16079107	88.33310593	92.74903970	97.42386585
31	90.39561286	95.06201314	100.0111905	105.2615221
32	97.01597449	102.2248976	107.7610602	113.6464838
33	104.0457164	109.8497484	116.0314037	122.6169697
34	111.5101533	117.9663598	124.8571753	132.2138668
35	119.4361652	126.6064477	134.2756771	142.4809179
36	127.8522943	135.8037734	144.3267163	153.4649197
37	136.7888478	145.5942756	155.0527736	165.2159373
38	146.2780068	156.0162110	166.4991823	177.7875314
39	156.3539427	167.1103034	178.7143207	191.2370032
40	167.0529397	178.9199034	191.7498159	205.6256552
41	178.4135257	191.4911571	205.6607622	221.0190704
42	190.4766111	204.8731870	220.5059542	237.4874119
43	203.2856360	219.1182837	236.3481347	255.1057418
44	216.8867268	234.2821101	253.2542606	273.9543644
45	231.3288621	250.4239194	271.2957854	294.1191911
46	246.6640491	267.6067859	290.5489614	315.6921330
47	262.9475112	285.8978521	311.0951620	338.7715189
48	280.2378863	305.3685908	333.0212253	363.4625414
49	298.5974385	326.0950841	356.4198216	389.8777506
50	318.0922821	348.1583215	381.3898149	418.1375375
60	593.3039074	664.3373120	744.6530632	835.5178822
70	1094.772184	1255.037433	1440.498589	1655.[illegible]6613
80	2008.[illegible]6959	2358.610546	2773.[illegible]	[illegible]65.260240
90	3673.110270	4420.[illegible]2	[illegible]	[illegible]
100	[illegible]	8272.205[illegible]95	[illegible]	[illegible]

	7	7.25	7.50	7.75
1	1.035831161	1.037142153	1.038455345	1.039770741
2	2.146768555	2.152269935	2.157789903	2.163328530
3	3.338257999	3.351247304	3.364302883	3.377425114
4	4.616140176	4.640379145	4.664784101	4.689356311
5	5.986679266	6.026444427	6.066552195	6.107005853
6	7.456593652	7.516731848	7.577495807	7.638892760
7	9.033088857	9.119078161	9.206117978	9.294222533
8	10.72389286	10.84190939	10.96158401	11.08294248
9	12.53729399	12.69428513	12.85377301	13.01580146
10	14.48218154	14.68594621	14.89333355	15.10441454
11	16.56808934	16.82736586	17.09174354	17.36133273
12	18.80524253	19.12980488	19.46137482	19.80011842
13	21.20460762	21.60537074	22.01556281	22.43542691
14	23.77794631	24.26708134	24.76868157	25.28309444
15	26.53787312	27.12893344	27.73622465	28.36023337
16	29.49791719	30.20597622	30.93489230	31.68533503
17	32.67258868	33.51439049	34.38268547	35.27838080
18	36.07744982	37.07157371	38.09900708	39.16096223
19	39.72919125	40.89623151	42.10477124	43.35641073
20	43.64571381	45.00847607	46.42252094	47.88993784
21	47.84621630	49.42993184	51.07655491	52.78878668
22	52.35128959	54.18384927	56.09306436	58.08239571
23	57.18301754	59.29522709	61.50028040	63.80257556
24	62.36508530	64.79094376	67.32863286	69.98370028
25	67.92289537	70.69989878	73.61092160	76.66291382
26	73.88369214	77.05316472	80.38250107	83.88035331
27	80.27669544	83.88415054	87.68147926	91.67939018
28	87.13324379	91.22877736	95.54893217	100.1068908
29	94.48694798	99.12566728	104.0291350	109.2134983
30	102.3738559	107.6163465	113.1698112	119.0539366
31	110.8326292	116.7454637	123.0224011	129.6873393
32	119.9047327	126.5610249	133.6423517	141.1776054
33	129.6346379	137.1146457	145.0894282	153.5937827
34	140.0700409	148.4618228	157.4280504	167.0104834
35	151.2620960	160.6622260	170.7276558	181.5083317
36	163.2656666	173.7800117	185.0630897	197.1744491
37	176.1395943	187.8841606	200.5150266	214.1029771
38	189.9469871	203.0488400	217.1704245	232.3956437
39	204.7555289	219.3537942	235.1230140	252.1623742
40	220.6378110	236.8847637	254.4738256	273.5219520
41	237.6716886	255.7339360	275.3317588	296.6027323
42	255.9406616	276.0004304	297.8141944	321.5434133
43	275.5342846	297.7908194	322.0476554	348.4938702
44	296.5486057	321.2196889	348.1685189	377.6160550
45	319.0866369	346.4102408	376.3237837	409.0849704
46	343.2588597	373.4949410	[illegible]	443.0897213
47	369.1837665	402.6162158	439.3836482	479.8346510
48	396.9884411	433.9272010	474.6431259	519.5405691
49	426.8091821	467.5925471	[illegible]	562.4460788
50	458.7921708	503.7892850	553.6144267	608.8090102
60	938.3761577	1051.875351	[illegible]	1336.580459
70	1904.139710	2192.719889	[illegible]	2916.275436
80	3848.948678	[illegible]	[illegible]	6315.148917
90	7765.313002	[illegible]	[illegible]	[illegible]
100	15651.90226	[illegible]	[illegible]	[illegible]

	8	8.25	8.50	8.75
1	1.041088346	1.042408163	1.043730196	1.045054451
2	2.168885887	2.174462045	2.180057074	2.185671047
3	3.390614379	3.403871059	3.417195540	3.430588208
4	4.714097054	4.739007618	4.764089301	4.789343412
5	6.147808721	6.188964149	6.230475525	6.272346270
6	7.700930027	7.763615019	7.826955235	7.890958267
7	9.383406254	9.473683774	9.565069941	9.657579811
8	11.20601099	11.33081617	11.45738509	11.58574523
9	13.18041513	13.34765950	13.51758088	13.69022646
10	15.31926161	15.53794867	15.76055120	15.98714622
11	17.63624633	17.91659981	18.20251127	18.49410152
12	20.14620592	20.49981179	20.86111487	21.23029849
13	22.86521268	23.30517657	23.75558199	24.21669951
14	25.81067754	26.35179900	26.90683773	27.47618380
15	29.00146153	29.66042692	30.33766365	31.03372272
16	32.45799657	33.25359245	34.07286237	34.91657105
17	36.20241627	37.15576545	38.13943697	39.15447582
18	40.25869771	41.39352015	42.56678614	43.77990421
19	44.65281494	45.99571614	47.38691675	48.82829224
20	49.41290530	50.99369487	52.63467520	54.33831630
21	54.56944964	56.42149315	58.34799938	60.35218944
22	60.15546743	62.31607488	64.56819293	66.91598475
23	66.20672826	68.71758281	71.34022381	74.07998838
24	72.76198087	75.66961194	78.71304940	81.89908472
25	79.86320124	83.21950635	86.73997045	90.43317693
26	87.55586143	91.41868166	95.47901639	99.74764586
27	95.88922073	100.3229752	104.9933649	109.9138509
28	104.9166411	109.9930261	115.3517984	121.0096768
29	114.6959288	120.4946886	126.6292018	133.1201301
30	125.2897048	131.8994802	138.9071033	146.3379907
31	136.7658052	144.2850686	152.2742643	160.7645224
32	149.1977164	157.7358013	166.8273205	176.5102488
33	162.6650451	172.3432791	182.6714812	193.6958001
34	177.2540281	188.2069807	199.9212894	212.4528371
35	193.0580846	205.4349395	218.7014500	232.9250601
36	210.1784147	224.1444800	239.1477313	255.2693095
37	228.7246469	244.4630160	261.4079467	279.6567677
38	248.8155404	266.5289193	285.6430232	306.2742702
39	270.5797455	290.4924610	312.0281645	335.3257375
40	294.1566275	316.5168354	340.7541182	367.0337367
41	319.6971587	344.7792715	372.0285542	401.6411871
42	347.3648860	375.4722397	406.0775665	439.4132212
43	377.3369771	408.8047624	443.1473072	480.6392157
44	409.8053558	445.0038378	483.5057666	525.6350084
45	441.9779305	484.3159857	527.4447102	574.7453182
46	483.0799259	527.0089261	575.2817879	628.3163861
47	521.3553247	573.3734028	627.3628309	686.8488569
48	569.0684305	623.7251630	684.0643512	750.7009262
49	617.5055597	678.4071078	745.7962640	820.3917732
50	669.9768754	737.7916273	813.0048511	896.4553092
60	1506.380219	1699.090172	1917.901792	2166.471640
70	3367.830093	3892.659815	4502.980460	5213.082437
80	7510.762973	8898.123506	10551.11461	12521.52181
90	[illegible]	[illegible]	24701.71282	30053.55646
100	[illegible]	46383.[illegible]	57809.01518	72110.72124

	9	9.25	9.50	9.75
1	1.046380930	1.047709638	1.049040580	1.050373760
2	2.191304035	2.196956109	2.202627344	2.208317810
3	3.444049453	3.457579666	3.471179243	3.484848580
4	4.814771273	4.840374213	4.866153573	4.892110706
5	6.314579839	6.357179722	6.400149447	6.443492576
6	7.955631802	8.020983619	8.087021594	8.153753699
7	9.751228658	9.846031979	9.942005488	10.03916513
8	11.71592456	11.84795151	11.98185495	12.11766426
9	13.86564430	14.04388335	14.22499348	14.40902549
10	16.21781235	16.45262984	16.69168062	16.93504832
11	18.79149414	19.09481553	19.40419499	19.71976479
12	21.60755057	21.99306372	22.38703542	22.78966809
13	24.68880709	25.17219026	25.66714232	26.17396461
14	28.06023875	28.65941594	29.27414092	29.90485182
15	31.74917256	32.48459961	33.24060887	34.01782456
16	35.78550908	36.68049385	37.60237048	38.55201277
17	40.20196469	41.28302538	42.39882025	43.55055373
18	45.03433685	46.33160270	47.67327871	49.06100248
19	50.32179420	51.86945351	53.47338367	55.13578423
20	56.10719405	57.94399484	59.85152045	61.83269313
21	62.43742979	64.60723905	66.86529503	69.21544213
22	69.36381095	71.91623919	74.57805436	77.35426910
23	76.94247909	79.93357750	83.05945846	86.32660507
24	85.23486287	88.72790125	92.38610957	96.21781090
25	94.30817596	98.37451055	102.6422441	107.1219894
26	104.2359618	108.9560031	113.9204932	119.1428805
27	115.0986898	120.5629812	126.3227197	132.3948484
28	126.9844074	133.2948281	139.9609379	147.0039694
29	139.9894539	147.2605583	154.9583253	163.1092316
30	154.2192414	162.5797513	171.4503352	180.8638569
31	169.7891089	179.3835754	189.5859199	200.4367590
32	186.8252576	197.8159109	209.5288762	222.0141502
33	205.4657733	218.0345819	231.4593247	245.8013131
34	225.8617462	240.2127078	255.5753365	272.0245537
35	248.1784953	264.5401856	282.0947226	300.9333541
36	272.5969083	291.2253157	311.2570002	332.8027465
37	299.3149078	320.4965856	343.3255571	367.9359293
38	328.5490558	352.6046262	378.5900296	406.6671520
39	360.5363087	387.8243579	417.3689191	449.3648950
40	395.5359383	426.4573444	460.0124684	496.4353754
41	433.8316329	468.8343751	506.9058249	548.3264116
42	475.7337971	515.3182969	558.4725196	605.5316837
43	521.5820676	566.3071215	615.1782921	668.5954301
44	571.7480661	622.2374334	677.5352970	738.1176256
45	626.6384116	683.5881275	746.1067296	814.7596895
46	686.6980161	750.8845101	821.5119126	899.2507776
47	752.4136908	824.7027966	904.4318899	992.3947198
48	824.3180921	905.6750451	995.6155772	1095.077667
49	902.9940389	994.4945686	1095.886526	1208.276524
50	989.0792367	1091.921871	1206.150363	1333.068238
60	2448.960180	2770.135740	3135.446326	3551.121851
70	6039.687890	7002.370028	8124.015532	9431.552862
80	14871.45294	17675.50735	21023.11469	25021.55874
90	36594.08973	44591.75360	54376.36239	66353.27116
100	90023.15475	112470.9807	140618.1772	175930.5519

	10	10.25	10.50	10.75
1	1.051709181	1.053046848	1.054386765	1.055728937
2	2.214027582	2.219756731	2.225505333	2.231273460
3	3.498588076	3.512398132	3.526279152	3.540231543
4	4.918246976	4.944563757	4.971062434	4.997744405
5	6.487212707	6.531313476	6.575798556	6.620671657
6	8.221188004	8.289332679	8.358195993	8.427786319
7	10.13752707	10.23710773	10.33792374	10.43999198
8	12.25540928	12.39512037	12.53682835	12.68056459
9	14.59603111	14.78606306	14.97917503	15.17542172
10	17.18281828	17.43507766	17.69191541	17.95342233
11	20.04166024	20.37001975	20.70498493	21.04670062
12	23.20116923	23.62175157	24.05163321	24.49103773
13	26.69296668	27.22446655	27.76879097	28.32627562
14	30.55199967	31.21604887	31.89747753	32.59677796
15	34.81689070	35.63847181	36.48325351	37.35194328
16	39.53032424	40.53823914	41.57672353	42.64677641
17	44.73947392	45.96687415	47.23409474	48.54252471
18	50.49647464	51.98146137	53.51779696	55.10738656
19	56.85894442	58.64524691	60.49717169	62.41730023
20	63.89056099	66.02830348	68.24923726	70.55682230
21	71.66169913	74.20826725	76.85953874	79.62010573
22	80.25013499	83.27115425	86.42309195	89.71198900
23	89.74182455	93.31226481	97.04543198	100.9492088
24	100.2317638	104.4371858	108.8437777	113.4617503
25	111.8249396	116.7629007	121.9483256	127.3943510
26	124.6373804	130.4190200	136.5036859	142.9081744
27	138.7973172	145.5491439	152.6704791	160.1826751
28	154.4464677	162.3123727	170.6271077	179.4176737
29	171.7414537	180.8849791	190.5717257	200.8356689
30	190.8553692	201.4622626	212.7244246	224.6844108
31	211.9795128	224.2606025	237.3296622	251.2397669
32	235.3253020	249.5197337	264.6589608	280.8089132
33	261.1263892	277.5052673	295.0139026	313.7338874
34	289.6410005	308.5114840	328.7294586	350.3955453
35	321.1545196	342.8644280	366.1776844	391.2179662
36	355.9823444	380.9253362	407.7718261	436.6733589
37	394.4730436	423.0944360	453.9708806	487.2875232
38	437.0118449	469.8151548	505.2846606	543.6459326
39	484.0244911	521.5787818	562.2794205	606.4005063
40	535.9815003	578.9296351	625.5841052	676.2771507
41	593.4028760	642.4707848	695.8972900	754.0841556
42	656.8633104	712.8703947	773.9948905	840.7215444
43	726.9979370	790.8687485	860.7387240	937.1914851
44	804.5086866	877.2860342	957.0860203	1044.609882
45	890.1713130	973.0309686	1064.099985	1164.219286
46	984.8131564	1079.110353	1182.961530	1297.403264
47	1089.471725	1196.639660	1314.982310	1415.702406
48	1205.104175	1326.854763	1461.619191	1610.832145
49	1332.897797	1471.124933	1624.490330	1794.702601
50	1474.131591	1630.967236	1805.393033	1999.440673
60	4024.287935	1563.096156	5176.875335	5876.300398
70	10956.33158	12735.22050	14811.39550	17235.47187
80	29799.57987	35511.71032	42313.49281	50517.76364
90	81020.8[illegible]	98991.96169	121020.6216	148031.6422
100	[illegible]	2759[illegible].4821	315852.1061	[illegible]758.4042

	11	11.25	11.50	11.75
1	1.057073368	1.058420061	1.059769022	1.061120255
2	2.237061187	2.242868588	2.248695739	2.254542713
3	3.554255713	3.568352075	3.582521041	3.596763028
4	5.024611077	5.051663871	5.078904217	5.106333559
5	6.665936526	6.711596951	6.757656756	6.804119805
6	8.498112131	8.569182009	8.641004637	8.713588808
7	10.54332958	10.64795391	10.75388260	10.86113352
8	12.82636097	12.97424988	13.12426426	13.27643760
9	15.37485884	15.57754315	15.78353248	15.99288574
10	18.21969113	18.49081643	18.76689487	19.04802505
11	21.39531502	21.75097974	22.11384988	22.48408412
12	24.94019434	25.39933805	25.86870980	26.34855663
13	28.89726538	29.48211462	30.08118742	30.69485787
14	33.31445701	34.05103661	34.80705416	35.58306304
15	38.24527116	39.16399045	40.10887852	41.08073759
16	43.74943086	44.88575524	46.05685444	47.26387117
17	49.89360363	51.28882348	52.72973064	54.21792792
18	56.75220896	58.45431951	60.21585320	62.03902780
19	64.40831968	66.47302732	68.61433525	70.83527516
20	72.95466818	75.44654077	78.03636917	80.72825298
21	82.49476959	85.48855071	88.60669876	91.85470339
22	93.14417559	96.72628545	100.4652708	104.3684178
23	105.0318740	109.3021226	113.7690877	118.4423625
24	118.3018510	123.3753931	128.6942865	134.2710696
25	133.1148353	139.1243997	145.4384706	152.0733256
26	149.6502449	156.7486760	164.2233260	172.0951960
27	168.1083600	176.4715147	185.2975563	194.6134258
28	188.7127491	198.5427963	208.9401755	219.9392652
29	211.7129768	223.2421552	235.4642019	248.4227715
30	237.3876266	250.8825225	265.2208027	280.4576478
31	266.0476751	281.8140907	298.6039426	316.4866847
32	298.0402588	316.4287506	336.0556006	357.0078807
33	333.7528783	355.1650562	378.0716209	402.5813254
34	373.6180924	398.5137810	425.2082780	453.8369415
35	418.1187567	447.0241364	478.0896416	511.4831913
36	467.7938723	501.3107293	537.4158387	576.3168696
37	523.2451145	562.0613493	603.9723234	649.2341165
38	585.1441201	630.0456828	678.6402756	731.2428046
39	654.2406227	706.1250642	762.4082679	823.4764696
40	731.3715333	791.2633893	856.3853534	927.2099783
41	817.4710774	886.5393270	961.8157493	1043.877150
42	913.5821103	993.1599855	1080.095310	1175.090575
43	1020.868749	1112.476207	1212.790007	1322.663903
44	1140.630470	1245.999679	1361.656664	1488.636915
45	1274.317854	1395.422093	1528.666211	1675.303712
46	1423.550148	1562.636571	1716.029786	1885.244430
47	1590.134886	1749.761655	1926.228004	2121.360898
48	1776.089776	1959.168144	2162.043802	2386.916753
49	1983.667141	2193.509137	2426.599281	2685.582545
50	2215.381202	2455.753640	2723.397046	3021.486474
60	6673.592629	7582.744556	8619.780136	9803.053130
70	20066.79993	23374.98836	27241.69540	31762.73535
80	60302.21824	72018.52380	86053.29616	102871.3254
90	181176.0919	221851.1613	271791.6767	333131.1044
100	544301.2883	683368.1757	858389.3131	1078745.183

	12	12.25	12.50	12.75
1	1.062473763	1.063829552	1.065187625	1.066547986
2	2.260409586	2.266296434	2.272203334	2.278130360
3	3.611078455	3.625467743	3.639931317	3.654469603
4	5.133953352	5.161765061	5.189770166	5.217970156
5	6.850990003	6.898271293	6.945967659	6.994083127
6	8.786943422	8.861077490	8.936000133	9.011720586
7	10.96972481	11.07967486	11.19100235	11.30372621
8	13.43080395	13.58739789	13.74625463	13.90740991
9	16.20566293	16.42192518	16.64173479	16.86515520
10	19.33430769	19.62584557	19.92274366	20.22510910
11	22.86184481	23.24729805	23.64061378	24.04196588
12	26.83913181	27.34069503	27.85351256	28.37785743
13	31.32351038	31.96753990	32.62735230	33.30336462
14	36.37963309	37.19735112	38.03682141	38.89866626
15	42.08039554	43.10870674	44.16655296	45.25484425
16	48.50798724	49.79042502	51.11244879	52.47536627
17	55.75507666	57.34289895	58.98317991	60.67777002
18	63.92614715	65.87960464	67.90188669	69.99557657
19	73.13900341	75.52880629	78.00810549	80.58046381
20	83.52646984	86.43548342	89.45995169	92.60473555
21	95.23830553	98.76350912	102.4365935	106.2641263
22	108.4433634	112.6981123	117.1410551	121.7809875
23	123.3320246	128.4486606	133.8033930	139.4079070
24	140.1189432	146.2518066	152.6842954	159.4318209
25	159.0461410	166.3750429	174.0791607	182.1786840
26	180.3864970	189.1207217	198.3227193	208.0187763
27	204.4476812	214.8305973	225.7942702	237.3727302
28	231.5765907	243.8909612	256.9236157	270.7183777
29	262.1643506	276.7384462	292.1977853	308.5985286
30	296.6519537	313.8665866	332.1686560	351.6298068
31	335.5366176	355.8332335	377.4615863	400.5126877
32	379.3789537	403.2689370	428.7852003	456.0429008
33	428.8110496	456.8864195	486.9424740	519.1243825
34	484.5455821	517.4912853	552.8432988	590.7839913
35	547.3860920	585.9941237	627.5187164	672.1882225
36	618.2385691	663.4241919	712.1370504	764.6621973
37	698.1245139	750.9448783	808.0221847	869.7112335
38	788.1956653	849.8711837	916.6742762	989.0453490
39	889.7506048	961.6894780	1039.793226	1124.607098
40	1004.253479	1088.079834	1179.305273	1278.603195
41	1133.355110	1230.941270	1337.393133	1453.540429
42	1278.916792	1392.420283	1516.530148	1652.266481
43	1443.037130	1574.943099	1719.518978	1878.016269
44	1628.082295	1781.252127	1949.535458	2134.464612
45	1836.720135	2014.447166	2210.178276	2425.786049
46	2071.958643	2278.031978	2505.525282	2756.722793
47	2337.189321	2575.966930	2840.197285	3132.661927
48	2636.236074	2912.728504	3219.430348	3559.723094
49	2973.110348	3293.376549	3649.157706	4044.858118
50	3353.573279	3723.630312	4136.102597	4595.964164
60	11153.58970	12695.48186	14156.33932	16467.80854
70	37050.55623	43237.15460	50477.50486	58953.59477
80	123051.5130	147206.0810	176203.7261	210997.5378
90	408498.3428	501143.5741	615031.3581	755117.4113
100	[illegible]	1705961.512	2146690.292	2702359.970

	13	13.25	13.50	13.75
1	1.067910641	1.069275593	1.070642847	1.072012407
2	2.284077590	2.290045100	2.296032968	2.302041272
3	3.669083030	3.683772030	3.698537037	3.713378490
4	5.246366536	5.274960820	5.303754535	5.332749221
5	7.042621762	7.091587672	7.140985007	7.190817961
6	9.088248196	9.165592429	9.243762864	9.322769202
7	11.41786564	11.53344014	11.65046947	11.76897369
8	14.07090011	14.23676218	14.40503371	14.57575290
9	17.09225107	17.32308823	17.55773381	17.79625615
10	20.53305129	20.84668192	21.16611504	21.49146708
11	24.45153225	24.86949490	25.29604009	25.73135839
12	28.91400958	29.46225606	30.02289123	30.59621692
13	33.99600542	34.70571511	35.43294624	36.17816390
14	39.78352654	40.69206227	41.62495319	42.58289939
15	46.37451985	47.52654921	48.71193292	49.93170381
16	53.88053011	55.32933953	56.82324191	58.36373454
17	62.42858764	64.23762151	66.10693342	68.03866099
18	72.16335817	74.40802011	76.73245985	79.13968810
19	83.24959117	86.01935078	88.89376570	91.87702554
20	95.87490796	99.27576336	102.8128276	106.4918682
21	110.2529771	114.4103314	118.7437059	123.2609637
22	126.6271303	131.6891502	136.9771822	142.5018524
23	145.2744807	151.4160150	157.8460665	164.5788810
24	166.5106126	173.9377627	181.7312722	189.9101012
25	190.6949224	199.6503693	209.0687687	218.9751866
26	218.2367009	229.0059128	240.3575391	252.3245150
27	249.6020599	262.5205208	276.1686878	290.5895914
28	285.3218210	300.7834455	317.1558647	334.4950053
29	326.0004987	344.4674237	364.0671964	384.8721522
30	372.3265316	394.3405049	417.7589411	442.6749764
31	425.0839327	451.2795553	479.2111179	508.9980355
32	485.1655585	516.2856743	549.5453948	585.0972267
33	553.5882192	590.5017962	630.0455618	672.4135684
34	631.5098874	675.2327853	722.1809642	772.6004879
35	720.2492947	771.9683775	827.6333213	887.5551303
36	821.3082505	882.4093733	948.3274230	1019.454283
37	936.3970578	1008.497541	1086.466262	1170.795596
38	1067.463458	1152.449756	1244.571245	1344.444877
39	1216.725595	1316.796979	1425.528213	1543.690357
40	1386.709553	1504.428755	1632.640120	1772.304962
41	1580.292109	1718.644016	1869.687316	2034.617749
42	1800.749418	1963.209085	2140.996551	2335.595889
43	2051.812459	2242.423892	2451.519951	2680.938720
44	2337.730177	2561.197578	2806.925404	3077.185673
45	2663.341388	2925.134806	3213.700019	3531.840103
46	3034.156678	3340.634303	3679.268528	4053.511372
47	3456.451655	3815.001360	4212.128813	4652.077876
48	3937.373161	4356.576275	4822.007009	5338.874104
49	4485.060222	4974.880990	5520.035040	6126 905267
50	5108.781793	5680.786510	6318.953796	7031.093568
60	18766.16906	21393.01849	24396.05982	27830.00597
70	68879.17464	80505.34756	94127.15010	110091.3003
80	252758.6590	302896.8863	363109.6380	435411.0307
90	927467.0384	1139575.076	[illegible]	[illegible]
100	3403172.216	4287213.510	[illegible]	[illegible]

Таблица П.14. Коэффициент приведения непрерывной ренты

Число периодов	Ставка непрерывных процентов			
	.250 (1/4)	.333 (1/3)	.417 (5/12)	.500 (1/2)
1	.998751041	.998336846	.997917895	.997504161
2	1.995008323	1.993354760	1.991683137	1.990033250
3	2.988778072	2.985064776	2.981313006	2.977612079
4	3.980066500	3.973477889	3.966824711	3.960265339
5	4.968879802	4.958605060	4.948235388	4.938017594
6	5.955224159	5.940457214	5.925562104	5.910893290
7	6.939105734	6.919045238	6.898821853	6.878916748
8	7.920530677	7.894379984	7.868031559	7.842112169
9	8.899505122	8.866472267	8.833208076	8.800503633
10	9.876035188	9.835332866	9.794368187	9.754115100
11	10.85012698	10.80097253	10.75152861	10.70297041
12	11.82178658	11.76340195	11.70470597	11.64709328
13	12.79102007	12.72263182	12.65391687	12.58650732
14	13.75783350	13.67867276	13.59917780	13.52123602
15	14.72223291	14.63153539	14.54050520	14.45130273
16	15.68422434	15.58123025	15.47791543	15.37673072
17	16.64381379	16.52776790	16.41142480	16.29754312
18	17.60100727	17.47115881	17.34104955	17.21376295
19	18.55581075	18.41141346	18.26680583	18.12541311
20	19.50823020	19.34854227	19.18870974	19.03251639
21	20.45827158	20.28255563	20.10677732	19.93509548
22	21.40594082	21.21346390	21.02102453	20.83317294
23	22.35121335	22.14127730	21.93146726	21.72677122
24	23.29416657	23.06600041	22.83812138	22.61591266
25	24.23477487	23.99766120	23.74100258	23.50061948
26	25.17301465	24.90625139	24.64012662	24.38091382
27	26.10891175	25.82178895	25.53550912	25.25681766
28	27.04247204	26.73428225	26.42716565	26.12835292
29	27.97370134	27.64374200	27.31511172	26.99554138
30	28.90260547	28.55017829	28.19936276	27.85840471
31	29.82919024	29.45360116	29.07993415	28.71696450
32	30.75346144	30.35402064	29.95684120	29.57124221
33	31.67542486	31.25144670	30.83009916	30.42125918
34	32.59508624	32.14580931	31.69972322	31.26703668
35	33.51245134	33.03735838	32.56572850	32.10859585
36	34.42752589	33.92586380	33.42813006	32.94595772
37	35.34031561	34.81141541	34.28694288	33.77914323
38	36.25082621	35.69402304	35.14218192	34.60817321
39	37.15906338	36.57369647	35.99386203	35.43306839
40	38.06503279	37.45044547	36.84199804	36.25384938
41	38.96874010	38.32427974	37.68660468	37.07053672
42	39.87019096	39.19520899	38.52769664	37.88315081
43	40.76939102	40.06324286	39.36528855	38.69171196
44	41.66534598	40.92839099	40.19939498	39.49624041
45	42.56106116	41.79066297	41.03003042	40.29875625
46	43.45354244	42.65006836	41.85720933	41.09327950
47	44.34379530	43.50561669	42.68094608	41.88583007
48	45.23182531	44.36031745	43.50125500	42.67442779
49	46.11763802	45.21118012	44.31815036	43.45909235
50	47.00123897	46.05921413	45.13164635	44.23984338
60	55.71680943	54.38603135	53.08272458	51.83635586
70	64.21719169	62.44013149	60.70906077	59.06238205
80	72.50769877	70.23044650	68.02391821	65.93599079
90	80.59351249	77.76531577	75.64031848	72.47136067
100	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

	.583 (7/12)	.667 (2/3)	.750 (3/4)	.833 (5/6)
1	.997090656	.996672402	.996259357	.995846541
2	1.988385187	1.986719121	1.985074720	1.983432134
3	2.973917284	2.970184202	2.966501707	2.962825309
4	3.953720444	3.947111400	3.940595527	3.934094024
5	4.927827972	4.917544176	4.907410970	4.897305674
6	5.896272974	5.881525704	5.867002422	5.852527097
7	6.859088369	6.839098871	6.819423859	6.799824575
8	7.816306881	7.790306278	7.764728855	7.739263839
9	8.767961044	8.735190244	8.702970584	8.670910078
10	9.714083205	9.673792806	9.634201823	9.594827937
11	10.65470552	10.60615572	10.55847495	10.51108153
12	11.58985996	11.53232047	11.47584196	11.41973442
13	12.51957832	12.45232825	12.38635446	12.32084968
14	13.44389218	13.36622001	13.29006365	13.21448982
15	14.36283298	14.27403639	14.18702039	14.10071686
16	15.27643193	15.17581778	15.07727510	14.97959229
17	16.18472010	16.07160431	15.96087789	15.85117710
18	17.08772836	16.96143582	16.83787844	16.71553176
19	17.98548739	17.84535190	17.70832609	17.57271625
20	18.87802772	18.72339189	18.57226981	18.42279005
21	19.76537967	19.59559483	19.42975819	19.26581215
22	20.64757341	20.46199955	20.28083945	20.10184104
23	21.52463893	21.32264457	21.12556149	20.93093473
24	22.39660603	22.17756819	21.96397181	21.75315076
25	23.26350435	23.02680844	22.79611758	22.56854618
26	24.12536336	23.87040311	23.62204559	23.37717756
27	24.98221235	24.70838973	24.44180232	24.17910103
28	25.83408045	25.54080558	25.25543387	24.97437221
29	26.68099660	26.36768769	26.06298601	25.76304630
30	27.52298959	27.18907285	26.86450416	26.54517803
31	28.36008805	28.00499760	27.66003342	27.32082165
32	29.19232042	28.81549824	28.44961852	28.09003100
33	30.01971500	29.62061083	29.23330389	28.85285945
34	30.84229989	30.42037119	30.01113360	29.60935993
35	31.66010307	31.21481490	30.78315142	30.35958494
36	32.47315233	32.00397730	31.54940075	31.10358653
37	33.28147530	32.78789351	32.30992472	31.84141633
38	34.08509946	33.56659839	33.06476609	32.57312553
39	34.88405212	34.34012659	33.81396733	33.29876491
40	35.67836044	35.10851253	34.55757057	34.01838482
41	36.46805141	35.87179039	35.29561766	34.73203519
42	37.25315188	36.62999413	36.02815010	35.43976555
43	38.03368853	37.38315748	36.75520909	36.14162500
44	38.80968789	38.13131394	37.47683554	36.83766224
45	39.58117633	38.87449681	38.19307004	37.52792558
46	40.34818009	39.61273914	38.90395287	38.21246290
47	41.11072522	40.34607378	39.60952402	38.89132171
48	41.86883764	41.07453335	40.30982319	39.56454912
49	42.62254313	41.79815027	41.00488976	40.23219183
50	43.37186730	42.51695672	41.69476283	40.89429618
60	50.62966699	49.44737699	48.31624645	47.22065090
70	57.47643494	55.93061745	54.45928474	53.04137225
80	63.93544917	61.99553202	60.15844852	58.39087293
90	70.02866936	67.66911285	65.44581059	63.32433566
100	75.77681158	72.97661042	70.35112630	67.85797134

	1	1.25	1.50	1.75
1	.99501[illegible]25	.993775960	.992537360	.991300819
2	1.98013[illegible]69	1.975207038	1.970297763	1.965404785
3	2.9554[illegible]45	2.944446582	2.933501211	2.922610225
4	3.921[illegible]85	3.901646040	3.882364428	3.863210291
5	4.877[illegible]50	4.846954975	4.817100911	4.787493048
6	5.823[illegible]41	5.780521094	5.737920982	5.695741566
7	6.7606[illegible]09	6.702490268	6.645031827	6.588234003
8	7.6883[illegible]61	7.613006557	7.538637552	7.465243691
9	8.6068[illegible]73	8.512212231	8.418939221	8.327039222
10	9.51625[illegible]96	9.400247793	9.286134905	9.173884527
11	10.4165[illegible]47	10.27725200	10.14041973	10.00603896
12	11.3079[illegible]33	11.14336189	10.98193591	10.82375737
13	12.1904[illegible]91	11.99871278	11.81102280	11.62729020
14	13.0641[illegible]46	12.84343834	12.62771694	12.41688353
15	13.9292[illegible]36	13.67767055	13.43225208	13.19277918
16	14.7856[illegible]10	14.50153975	14.22480926	13.95521477
17	15.6335[illegible]34	15.31517469	15.00556680	14.70442382
18	16.4729[illegible]86	16.11870250	15.77470038	15.44063576
19	17.3040[illegible]61	16.91224872	16.53238304	16.16407606
20	18.1269[illegible]69	17.69593735	17.27878529	16.87496630
21	18.9415[illegible]40	18.46989085	18.01407505	17.57352418
22	19.7481[illegible]20	19.23423014	18.73841777	18.25996364
23	20.5466[illegible]75	19.98907466	19.45197643	18.93449492
24	21.3372[illegible]89	20.73454234	20.15491159	19.59732458
25	22.1199[illegible]69	21.47074968	20.84738141	20.24865563
26	22.8948[illegible]42	22.19781171	21.52954170	20.88868754
27	23.6620[illegible]57	22.91584202	22.20154594	21.51761633
28	24.4216[illegible]85	23.62495282	22.86354534	22.13563462
29	25.1736[illegible]24	24.32525490	23.51568886	22.74293166
30	25.9181[illegible]93	25.01685770	24.15812322	23.33969346
31	26.6553[illegible]38	25.69986926	24.79099298	23.92610278
32	27.3850[illegible]29	26.37439632	25.41444054	24.50233920
33	28.1076[illegible]66	27.04054426	26.02860618	25.06857922
34	28.8229[illegible]72	27.69841719	26.63362808	25.62499624
35	29.5311[illegible]03	28.34811788	27.22964237	26.17176066
36	30.2323[illegible]39	28.98974787	27.81678317	26.70903994
37	30.9265[illegible]93	29.62340740	28.39518258	27.23699863
38	31.6138[illegible]08	30.24919548	28.96497075	27.75579842
39	32.2943[illegible]55	30.86720990	29.52627588	28.26559819
40	32.9679[illegible]39	31.47754722	30.07922426	28.76655407
41	33.6349[illegible]98	32.08030281	30.62394031	29.25881949
42	34.2953[illegible]02	32.67557085	31.16054660	29.74254520
43	34.9490[illegible]52	33.26344435	31.68916386	30.21787936
44	35.5963[illegible]89	33.84401516	32.20991103	30.68496753
45	36.2371[illegible]83	34.41737402	32.72290529	31.14395276
46	36.8715[illegible]45	34.98361049	33.22826206	31.59497563
47	37.4997[illegible]17	35.54281307	33.72609505	32.03817425
48	38.1213[illegible]82	36.09506911	34.21651627	32.47368438
49	38.7373[illegible]58	36.64046492	34.69963607	32.90163937
50	39.3469[illegible]02	37.17908572	35.17556315	33.32217030
60	45.118[illegible]39	42.21067578	39.56202268	37.14641434
70	50.341[illegible]62	46.65103843	43.33748339	40.35670284
80	55.0671[illegible]59	50.56964471	46.58705254	43.05160206
90	59.343[illegible]03	54.02780261	49.38398262	45.31385413
100	63.212[illegible]85	57.07961625	51.79132266	47.21291752

	2	2.25	2.50	2.75
1	.990066335	.988833902	.987603519	.986375180
2	1.960528042	1.955667474	1.950823020	1.945994620
3	2.911773321	2.900990195	2.890260547	2.879584078
4	3.844182681	3.825280655	3.806503279	3.787849626
5	4.758129098	4.729006795	4.700123897	4.671478182
6	5.653978164	5.612626147	5.571680943	5.531138033
7	6.532088230	6.476586062	6.421719169	6.367479338
8	7.392810552	7.321323937	7.250769877	7.181134619
9	8.236489429	8.147267440	8.059351249	7.972719243
10	9.063462346	8.954834722	8.847968677	8.742831882
11	9.874060102	9.744434630	9.617115071	9.492054972
12	10.66860695	10.51646692	10.36727117	10.22095515
13	11.44742071	11.27132244	11.09890585	10.93008367
14	12.21081293	12.00938337	11.81247641	11.61997686
15	12.95908897	12.73102335	12.50842885	12.29115648
16	13.69254815	13.43660773	13.18719816	12.94413014
17	14.41148386	14.12649373	13.84920859	13.57939168
18	15.11618370	14.80103063	14.49487393	14.19742155
19	15.80692954	15.46055991	15.12459774	14.79868716
20	16.48399770	16.10541548	15.73877361	15.38364326
21	17.14765901	16.73592382	16.33778542	15.95273223
22	17.79817894	17.35240412	16.92200758	16.50638449
23	18.43581772	17.95516850	17.49180524	17.04501875
24	19.06083041	18.54452211	18.04753456	17.56904238
25	19.67346701	19.12076334	18.58954286	18.07885171
26	20.27397260	19.68418392	19.11816893	18.57483230
27	20.86258738	20.23506908	19.63374318	19.05735926
28	21.43954680	20.77369773	20.13658785	19.52679752
29	22.00508167	21.30034256	20.62701724	19.98350211
30	22.55941820	21.81527020	21.10533789	20.42781846
31	23.10277812	22.31874133	21.57184876	20.86008258
32	23.63537880	22.81101085	22.02684144	21.28062139
33	24.15743328	23.29232798	22.47060030	21.68975296
34	24.66915038	23.76293640	22.90340272	22.08778671
35	25.17073481	24.22307437	23.32551921	22.47502366
36	25.66238720	24.67297483	23.73721361	22.85175669
37	26.14430422	25.11286557	24.13874324	23.21827072
38	26.61667865	25.54296929	24.53035906	23.57484293
39	27.07969943	25.96350372	24.91230586	23.92174301
40	27.53355179	26.37468179	25.28482235	24.25923332
41	27.97841727	26.77671165	25.64814138	24.58756910
42	28.41447383	27.16979685	26.00249004	24.90699866
43	28.84189588	27.55413639	26.34808979	25.21776359
44	29.26085442	27.92992484	26.68515665	25.52009893
45	29.67151701	28.29735247	27.01390131	25.81423332
46	30.07404795	28.65660529	27.33452922	26.10038923
47	30.46860823	29.00786518	27.64724081	26.37878307
48	30.85535570	29.35130997	27.95223152	26.64962538
49	31.23444506	29.68711354	28.24969199	26.91312101
50	31.60602794	30.01544590	28.53980813	27.16946924
60	34.94028940	32.92265508	31.07479359	29.38000332
70	37.67015180	35.24410877	33.04904226	31.05906339
80	39.90517410	37.09782719	34.58658867	32.33443061
90	41.73505559	38.57805141	35.78403102	33.30316399
100	43.23323584	39.76003446	36.71660006	34.03898687

	3	3.25	3.50	3.75
1	.985146682	.983924621	.982702393	.981482194
2	1.941182214	1.936385742	1.931605146	1.926840365
3	2.868960491	2.858389491	2.847870783	2.837404077
4	3.769318776	3.750909818	3.732621846	3.714453962
5	4.643067452	4.614889531	4.586942264	4.559223515
6	5.490992953	5.451241290	5.411878686	5.372900833
7	6.313858468	6.260848569	6.203441764	6.156630283
8	7.112404631	7.044566590	6.977607387	6.911514115
9	7.887350189	7.803223229	7.720317878	7.638614007
10	8.639392644	8.537619888	8.437483150	8.338952565
11	9.369208885	9.248532340	9.129981822	9.013514754
12	10.07745580	9.936711553	9.798062290	9.663249289
13	10.76477085	10.60288448	10.44434377	10.28906997
14	11.43177267	11.24775483	11.06781731	10.89185695
15	12.07906161	11.87200381	11.66984673	11.47245801
16	12.70722027	12.47629083	12.25116960	12.03168970
17	13.31681404	13.06125423	12.81249812	12.57033855
18	13.90839159	13.62751194	13.35451997	13.08916212
19	14.48248537	14.17556212	13.87789921	13.58889008
20	15.03961213	14.70628379	14.38327703	14.07022526
21	15.58027330	15.21993748	14.87127260	14.53384462
22	16.10495552	15.71716579	15.34248376	14.98040020
23	16.61413103	16.19849395	15.79748781	15.41052004
24	17.10825813	16.66443042	16.23684219	15.82480907
25	17.58778158	17.11546738	16.66108515	16.22384996
26	18.05313296	17.55208129	17.07073646	16.60820390
27	18.50473113	17.97473335	17.46629797	16.97841148
28	18.94298255	18.38387003	17.84825432	17.33499336
29	19.36828169	18.77992352	18.21707343	17.67845103
30	19.78101134	19.16331220	18.57320717	18.00926754
31	20.18154299	19.53444104	18.91709183	18.32790815
32	20.57023713	19.89370209	19.24914873	18.63482102
33	20.94744363	20.24147486	19.56978466	18.93043777
34	21.31350199	20.57812670	19.87939246	19.21517418
35	21.66874170	20.90401324	20.17835142	19.48943070
36	22.01348248	21.21947873	20.46702781	19.75359305
37	22.34803463	21.52485641	20.74577530	20.00803275
38	22.67269927	21.82046885	21.01493539	20.25310765
39	22.98776862	22.10662833	21.27483783	20.48916242
40	23.29352627	22.38363714	21.52580103	20.71652906
41	23.59024741	22.65178788	21.76813246	20.93552734
42	23.87819912	22.91136382	22.00212899	21.14646526
43	24.15764056	23.16263915	22.22807732	21.34963949
44	24.42882327	23.40587932	22.44625424	21.54533577
45	24.69199131	23.64134126	22.65692707	21.73382934
46	24.94738156	23.86927370	22.86035388	21.91538529
47	25.19522389	24.08991742	23.05678392	22.09025896
48	25.43574138	24.30350550	23.24645783	22.25869631
49	25.66915049	24.51026356	23.42960798	22.42093423
50	25.89566133	24.71040999	23.60645876	22.57720088
60	27.82337039	26.39156703	25.07267348	23.85602068
70	29.25145239	27.60624397	26.10589753	24.73493981
80	30.30940156	28.43388990	26.83399821	25.33901151
90	31.03314958	29.11800943	27.34703209	25.75418351
100	31.67376439	29.57617822	27.70864619	26.03952678

	4	4.25	4.50	4.75
1	.980264021	.979047870	.977833737	.976621618
2	1.922091340	1.917358014	1.912640327	1.907938222
3	2.826989082	2.816625510	2.806313074	2.796051489
4	3.696405276	3.678474904	3.660661969	3.642965601
5	4.531731173	4.504463145	4.477417361	4.450591769
6	5.334303473	5.296082401	5.258233459	5.220752540
7	6.105406463	6.054762748	6.004691683	5.955185918
8	6.846274073	6.781874758	6.718303865	6.655549279
9	7.558091848	7.478731977	7.400515314	7.323423115
10	8.241998849	8.146593290	8.052707741	7.960314600
11	8.899089472	8.786665206	8.676202059	8.567660990
12	9.530415204	9.400104027	9.272261057	9.146832868
13	10.13698630	9.988017944	9.842091960	9.699137239
14	10.71977340	10.55146904	10.38684887	10.22582047
15	11.27970910	11.09147519	10.90763510	10.72807111
16	11.81768940	11.60901194	11.40550542	11.20702259
17	12.33457519	12.10501423	11.88146820	11.66375573
18	12.83119360	12.58037809	12.33648742	12.09930124
19	13.30833932	13.03596229	12.77148464	12.51464200
20	13.76677590	13.47258984	13.18734089	12.91071530
21	14.20723691	13.89104952	13.58489842	13.28841494
22	14.63042721	14.29209728	13.96496242	13.64859328
23	15.03702397	14.67645764	14.32830265	13.99206311
24	15.42767785	15.04482494	14.67565499	14.31959954
25	15.80301397	15.39786465	15.00772295	14.63194171
26	16.16363295	15.73621454	15.32517908	14.92979448
27	16.51011186	16.06048584	15.62866635	15.21382999
28	16.84300513	16.37126437	15.91879941	15.48468924
29	17.16284548	16.66911156	16.19616589	15.74298345
30	17.47014470	16.95456545	16.46132754	15.98929551
31	17.76539455	17.22814175	16.71482141	16.22418128
32	18.04906749	17.49033466	16.95716092	16.44817080
33	18.32161745	17.74161785	17.18883687	16.66176956
34	18.58348058	17.98244526	17.41031850	16.86545957
35	18.83507590	18.21325195	17.62205438	17.05970050
36	19.07680603	18.43445489	17.82447335	17.24493068
37	19.30905779	18.64645367	18.01798538	17.42156812
38	19.53220283	18.84963128	18.20298239	17.59001144
39	19.74659822	19.04435477	18.37983906	17.75064075
40	19.95258705	19.23097590	18.54891360	17.90381854
41	20.15049894	19.40983182	18.71054842	18.04989049
42	20.34065060	19.58124562	18.86507091	18.18918623
43	20.52334630	19.74552698	19.01279403	18.32202010
44	20.69887840	19.90297266	19.15401695	18.44869188
45	20.86752779	20.05386711	19.28902571	18.56948741
46	21.02956435	20.19848290	19.41809374	18.68467929
47	21.18524736	20.33708130	19.54148245	18.79452748
48	21.33482595	20.46991269	19.65944175	18.89927986
49	21.47853948	20.59721702	19.77221055	18.99917283
50	21.61661792	20.71922428	19.88001723	19.09443181
60	22.73205117	21.69219609	20.72876638	19.83485640
70	23.47974843	22.32829567	21.26995274	20.29531539
80	23.98094490	22.74415835	21.61502839	20.58166796
90	24.31690694	23.01603681	21.83505834	20.75971634
100	24.54210903	23.19378273	21.97535563	20.87049063

	5	5.25	5.50	5.75
1	.975411510	.974203408	.972997318	.971793211
2	1.903251639	1.898580522	1.893924813	1.889284454
3	2.785840471	2.775679741	2.765569017	2.755508021
4	3.625384938	3.607919124	3.590567310	3.573328652
5	4.423984338	4.397593060	4.371415941	4.345451013
6	5.183635586	5.146878585	5.110477574	5.074428635
7	5.906238205	5.857841394	5.809988432	5.762672366
8	6.593599079	6.532441527	6.472065071	6.412458338
9	7.247436967	7.172538778	7.098710776	7.025935499
10	7.869386805	7.779897820	7.691821628	7.605132715
11	8.461003791	8.356193074	8.253192243	8.151965488
12	9.023767278	8.903013314	8.784521191	8.668242277
13	9.559084465	9.421866062	9.287416149	9.155670496
14	10.06829392	9.914181734	9.763398758	9.615862147
15	10.55266895	10.38131759	10.21390923	10.05033916
16	11.01342072	10.82456146	10.64031070	10.46053842
17	11.45170136	11.24513532	11.04389335	10.84781651
18	11.86860681	11.64419865	11.42587835	11.21345424
19	12.26517953	12.02285161	11.78742147	11.55866083
20	12.64241118	12.38213811	12.12961666	11.88457792
21	13.00124502	12.72304866	12.45349933	12.19228339
22	13.34257833	13.04652311	12.76004946	12.48279485
23	13.66726461	13.35345323	13.05019462	12.75707308
24	13.97611576	13.64468521	13.32481269	13.01602516
25	14.26990406	13.92102193	13.58473462	13.26050749
26	14.54936414	14.18322522	13.83074687	13.49132861
27	14.81519479	14.43201794	14.06359381	13.70925188
28	15.06806072	14.66808600	14.28397997	13.91499802
29	15.30859424	14.89208019	14.49257221	14.10924744
30	15.53739680	15.10461804	14.69000166	14.29264258
31	15.75504052	15.30628551	14.87686571	14.46578994
32	15.96206964	15.49763855	15.05372975	14.62926215
33	16.15900183	15.67920471	15.22112894	14.78359985
34	16.34632952	15.85148455	15.37956979	14.92931345
35	16.52452113	16.01495302	15.52953169	15.06688485
36	16.69402224	16.17006078	15.67146841	15.19676901
37	16.85525667	16.31723546	15.80580941	15.31939550
38	17.00862762	16.45688278	15.93296117	15.43516985
39	17.15451857	16.58938774	16.05330842	15.54447495
40	17.29329434	16.71511565	16.16721530	15.64767228
41	17.42530193	16.83441312	16.27502648	15.74510315
42	17.55087143	16.94760904	16.37706815	15.83708976
43	17.67031684	17.05501548	16.47364908	15.92393633
44	17.78393683	17.15692854	16.56506150	16.00593008
45	17.89201551	17.25362919	16.65158200	16.08334218
46	17.99482313	17.34538402	16.73347236	16.15642863
47	18.09261676	17.43244599	16.81098037	16.22543115
48	18.18564093	17.51505511	16.88434055	16.29057794
49	18.27412827	17.59343913	16.95377488	16.35208445
50	18.35830003	17.66781415	17.01949343	16.41015410
60	19.00425863	18.23138806	17.51121514	16.83920632
70	19.39605233	18.56477323	17.79491388	17.08063610
80	19.63368722	18.76198901	17.95859382	17.21648981
90	19.77782007	18.87865307	18.05302893	17.29393536
100	19.86524106	18.94766632	18.10751325	17.33395164

	6	6.25	6.50	6.75
1	.970591107	.969390995	.968192871	.966996732
2	1.884659388	1.880049559	1.875454909	1.870875382
3	2.745496476	2.735534109	2.725620645	2.715755813
4	3.556202315	3.539187471	3.522283295	3.505488973
5	4.319696322	4.294149937	4.268809944	4.243674449
6	5.038727899	5.003371539	4.968355777	4.933676876
7	5.715886336	5.669623577	5.623877416	5.578641272
8	6.353610136	6.295509444	6.238145415	6.181507371
9	6.954195793	6.883474803	6.813755972	6.745023028
10	7.519806065	7.435817144	7.353141896	7.271756732
11	8.052477758	7.954694752	7.858582895	7.764109326
12	8.554129067	8.442135156	8.332215211	8.224324945
13	9.026566478	8.900043039	8.776040643	8.654501241
14	9.471491276	9.330207685	9.191935015	9.056598950
15	9.890505671	9.734309973	9.581656099	9.432450824
16	10.28511857	10.11392894	9.946851047	9.783769990
17	10.65675100	10.47054796	10.28906335	10.11215775
18	11.00674124	10.80556052	10.60973937	10.41911090
19	11.33634964	11.12027570	10.91023443	10.70602851
20	11.64676313	11.41592325	11.19181857	10.97421836
21	11.93909956	11.69365842	11.45568191	11.22490285
22	12.21441163	11.95456647	11.70293966	11.45922458
23	12.47369078	12.19966689	11.93463685	11.67825161
24	12.71787069	12.42991744	12.15175275	11.88298224
25	12.94783066	12.64621781	12.35520500	12.07434963
26	13.16439881	12.84941320	12.54585348	12.25322604
27	13.36835502	13.04029760	12.72450396	12.42042678
28	13.56043373	13.21961690	12.89191152	12.57671394
29	13.74132666	13.38807180	13.04878370	12.72279989
30	13.91168520	13.54632053	13.19578351	12.85935047
31	14.07212283	13.69498145	13.33353226	12.98698809
32	14.22321730	13.83463547	13.46261212	13.10629450
33	14.36551271	13.96582827	13.58356866	13.21781352
34	14.49952149	14.08907251	13.69691310	13.32205343
35	14.62572620	14.20484975	13.80312449	13.41948937
36	14.74458132	14.31361241	13.90265172	13.51056544
37	14.85651485	14.41578547	13.99591545	13.59569677
38	14.96192989	14.51176817	14.08330986	13.67527139
39	15.06120603	14.60193558	14.16520432	13.74965198
40	15.15470078	14.68664002	14.24194495	13.81917759
41	15.24275082	14.76621248	14.31385610	13.88416510
42	15.32567322	14.84096389	14.38124170	13.94491073
43	15.40376660	14.91118634	14.44438655	14.00169135
44	15.47731217	14.97715422	14.50355753	14.05476577
45	15.54657479	15.03912531	14.55900474	14.10437591
46	15.61180386	15.09734177	14.61096251	14.15074787
47	15.67323429	15.15203107	14.65965045	14.19409304
48	15.73108729	15.20340691	14.70527433	14.23460896
49	15.78557119	15.25167004	14.74802699	14.27248032
50	15.83688219	15.29700906	14.78808911	14.30787973
60	16.21127129	15.62371607	15.07320136	14.55670556
70	16.41671039	15.79858972	15.22204301	14.68339683
80	16..2950422	15.89219285	15.29971516	14.71790250
90	16.59139032	15.91229499	15.34030924	14.75674598
100	16.62535413	[illegible]	[illegible]	[illegible]

	7	7.25	7.50	7.75
1	.965802573	.964610391	.963420182	.962231943
2	1.866310923	1.861761474	1.857226981	1.852707387
3	2.705939343	2.696170967	2.686450416	2.676777428
4	3.488803693	3.472226654	3.455757057	3.439394113
5	4.218741575	4.194009466	4.169476283	4.145140203
6	4.899331145	4.865314936	4.831624645	4.798256707
7	5.533908654	5.489673160	5.445928474	5.402668369
8	6.125584801	6.070367358	6.015844852	5.962007257
9	6.677259986	6.610451140	6.544581059	6.479634578
10	7.191638517	7.112764566	7.035112630	6.958660890
11	7.671241881	7.579949078	7.490200100	7.401964785
12	8.118421094	8.014461390	7.912404537	7.812210189
13	8.535368228	8.418586407	8.304101952	8.191862372
14	8.924127159	8.794449244	8.667496679	8.543202763
15	9.286603584	9.144026393	9.004633769	8.868342655
16	9.624574363	9.469156126	9.317410508	9.169235898
17	9.939696228	9.771548153	9.607587090	9.447690636
18	10.23351391	10.05279262	9.876796525	9.705380176
19	10.50746770	10.31436847	10.12655382	9.943853040
20	10.76290052	10.55765120	10.35826453	10.16454227
21	11.00106450	10.78392014	10.57323263	10.36877405
22	11.22312712	10.99436512	10.77266789	10.55777566
23	11.43017694	11.19009280	10.95769264	10.73268286
24	11.62322891	11.37213241	11.12934816	10.89454670
25	11.80322938	11.54144121	11.28860044	11.04433988
26	11.97106070	11.69890953	11.43634571	11.18296254
27	12.12754559	11.84536541	11.57341542	11.31124769
28	12.27345113	11.98157902	11.70058096	11.42996623
29	12.40949256	12.10826663	11.81855795	11.53983158
30	12.53633674	12.22609443	11.92801034	11.64150395
31	12.65460547	12.33568204	12.02955408	11.73559430
32	12.76487851	12.43760572	12.12376062	11.82266806
33	12.86769641	12.53240144	12.21116013	11.90324846
34	12.96356318	12.62056769	12.29224445	11.97781975
35	13.05294876	12.70256810	12.36746991	12.04683003
36	13.13629133	12.77883388	12.43725983	12.11069401
37	13.21399943	12.84976606	12.50200698	12.16979547
38	13.28645398	12.91573766	12.56207572	12.22448955
39	13.35401015	12.97709558	12.61780411	12.27510493
40	13.41699911	13.03416248	12.66950576	12.32194578
41	13.47572962	13.08723845	12.71747162	12.36529356
42	13.53048959	13.13660259	12.76197164	12.40540877
43	13.58154745	13.18251449	12.80325625	12.44253246
44	13.62915348	13.22521557	12.84155777	12.47688774
45	13.67354104	13.26493039	12.87709176	12.50868104
46	13.71492774	13.30186778	12.91005818	12.53810341
47	13.75351644	13.33622198	12.94064257	12.56533168
48	13.78949630	13.36817364	12.96901703	12.59052945
49	13.82301370	13.39789079	12.99534126	12.61384815
50	13.85432309	13.42552969	13.01976339	12.63542790
60	14.07149176	13.61507845	13.18521338	12.77985030
70	14.17933453	13.70638157	13.26336642	12.84638624
80	14.23288766	13.75134407	13.30028330	12.87703960
90	14.25948136	13.77287836	13.31772161	12.89116172
100	14.27268740	13.78330794	13.32595888	12.89766784

	8	8.25	8.50	8.75
1	.961045670	.959861359	.958679007	.957498610
2	1.848202638	1.843712678	1.839237452	1.834776905
3	2.667151737	2.657573081	2.648041200	2.638555836
4	3.423137036	3.406985049	3.390937379	3.374993260
5	4.120909424	4.097052161	4.073296645	4.049731126
6	4.765207602	4.732473850	4.700052013	4.667938692
7	5.359886701	5.317577411	5.275734519	5.234352132
8	5.908844699	5.856347461	5.804505972	5.753310814
9	6.415596801	6.352453085	6.290189047	6.228790552
10	6.883387949	6.809272819	6.736294919	6.664434061
11	7.315213604	7.229917654	7.146048641	7.063578865
12	7.713838925	7.617252230	7.522412469	7.429282867
13	8.081816476	7.973914338	7.868107268	7.764347776
14	8.421502567	8.302332886	8.185632187	8.071340568
15	8.735072351	8.604744442	8.477282727	8.352613157
16	9.024533744	8.883208461	8.745167330	8.610320412
17	9.291740288	9.139621315	8.991222629	8.846436662
18	9.538403016	9.375729204	9.217227443	9.062770827
19	9.766101413	9.593140049	9.424815642	9.260980270
20	9.976293525	9.793334441	9.615487952	9.442583503
21	10.17032530	9.977675727	9.790622812	9.608971813
22	10.34943920	10.14741929	9.951486332	9.761419922
23	10.51478217	10.30372111	10.09924145	9.901095756
24	10.66741297	10.44764561	10.23495634	10.02906939
25	10.80830896	10.58017293	10.35961214	10.14632125
26	10.93837235	10.70220561	10.47411002	10.25374962
27	11.05843599	10.81457470	10.57927773	10.35217751
28	11.16926870	10.91804544	10.67587556	10.44235901
29	11.27158018	11.01332248	10.76460185	10.52498500
30	11.36602558	11.10105466	10.84609805	10.60068849
31	11.45320968	11.18183947	10.92095330	10.67004946
32	11.53369074	11.25622704	10.98970877	10.73359928
33	11.60798413	11.32472396	11.05286152	10.79182483
34	11.67656557	11.38779671	11.11086809	10.84517218
35	11.73987422	11.44587482	11.16414784	10.89405003
36	11.79831546	11.49935381	11.21308594	10.93883284
37	11.85226354	11.54859788	11.25803619	10.97986369
38	11.90206388	11.59394238	11.29932354	11.01745693
39	11.94803539	11.63569611	11.33724649	11.05190057
40	11.99047245	11.67414343	11.37207918	11.08345848
41	12.02964679	11.70954615	11.40407343	11.11237243
42	12.06580926	11.74214539	11.43346054	11.13886394
43	12.09919143	11.77216314	11.46045297	11.16313596
44	12.13000706	11.79980383	11.48524585	11.18537444
45	12.15845347	11.82525569	11.50801841	11.20574976
46	12.18471281	11.84869205	11.52893528	11.22441801
47	12.20895325	11.87027252	11.54814769	11.24152221
48	12.23132998	11.89011407	11.56579452	11.25719341
49	12.25198632	11.90844202	11.58200335	11.27155165
50	12.27105451	11.92529097	11.59689137	11.28470695
60	12.39712816	12.03535262	11.69297945	11.36859979
70	12.45377670	12.08358548	11.73404894	11.40357153
80	12.47923053	12.10472281	11.75160265	11.41814992
90	12.49066768	12.11398593	11.75910536	11.42422710
100	12.49580672	12.11804535	11.76231214	11.42676044

	9	9.25	9.50	9.75
1	.956320164	.955143665	.953969111	.952796497
2	1.830330984	1.825899634	1.821482801	1.817080430
3	2.629116730	2.619723626	2.610376270	2.601074410
4	3.359151932	3.343412642	3.327774640	3.312237184
5	4.026353870	4.003163162	3.980157300	3.957334602
6	4.636130528	4.604624202	4.573416434	4.542503981
7	5.193424433	5.152945687	5.112910235	5.073312495
8	5.702752712	5.652822535	5.603511295	5.554810140
9	6.168243709	6.108534869	6.049650620	5.991577782
10	6.593670447	6.523984659	6.455357648	6.387770733
11	6.982481211	6.902729132	6.824296638	6.747158280
12	7.337827493	7.248011232	7.159799770	7.073159577
13	7.662589541	7.562787386	7.464897238	7.368876111
14	7.959399706	7.849752818	7.742344618	7.637121272
15	8.230663771	8.111364628	7.994647756	7.880447085
16	8.478580459	8.349862828	8.224085401	8.101168501
17	8.705159252	8.567289524	8.432729785	8.301385413
18	8.912236677	8.765506400	8.622465341	8.483002643
19	9.101491193	8.946210659	8.795005720	8.647748058
20	9.274456798	9.110949553	8.951909271	8.797189009
21	9.432535457	9.261133637	9.094593114	8.932747246
22	9.577008474	9.398048838	9.224345939	9.055712441
23	9.709046870	9.522867473	9.342339646	9.167254456
24	9.829720877	9.636658283	9.449639929	9.268434480
25	9.940008616	9.740395585	9.547215903	9.360215116
26	10.04080402	9.834967615	9.635948853	9.443469546
27	10.13292408	9.921184131	9.716640195	9.518989834
28	10.21711548	9.999783350	9.790018718	9.587494465
29	10.29406062	10.07143827	9.856747161	9.649635176
30	10.36438319	10.13676241	9.917428201	9.706003160
31	10.42365318	10.19631512	9.972609897	9.757134690
32	10.48739152	10.25060630	10.02279064	9.803516221
33	10.54107433	10.30010081	10.06842364	9.845589017
34	10.59013672	10.34522244	10.10992107	9.883753348
35	10.63497637	10.38635754	10.14765770	9.918372302
36	10.67595672	10.42385832	10.18197437	9.949775237
37	10.71340994	10.45804588	10.21318102	9.978260912
38	10.74763961	10.48921294	10.24155951	10.00410033
39	10.77892317	10.51762637	10.26736613	10.02753934
40	10.80751420	10.54352944	10.29083398	10.04880091
41	10.83364442	10.56714396	10.31217501	10.06808733
42	10.85752565	10.68867212	10.33158196	10.08558209
43	10.87935145	10.60829825	10.34923011	10.10145163
44	10.89929873	10.62619039	10.36527887	10.11584692
45	10.91752917	10.64250175	10.37987317	10.12890492
46	10.93419054	10.65737199	10.39314484	10.11074987
47	10.94941788	10.67092843	10.40521373	10.15149415
48	10.96333463	10.68328715	10.41618885	10.16124088
49	10.97605357	10.69455397	10.42616933	10.17008190
50	10.98767782	10.70482535	10.43521531	10.17810160
60	11.06092688	10.76878425	10.49109510	10.22687283
70	11.09070772	10.79414596	10.51263150	10.24526896
80	11.10281571	10.80420267	10.52104788	10.25220785
90	11.10773845	10.80819048	10.52427817	10.25482511
100	11.10973989	10.80977177	[illegible]	10.25583236

	10	10.25	10.50	10.75
1	.951625820	.950457076	.949290261	.948125373
2	1.812692469	1.808318864	1.803959562	1.799614510
3	2.591817793	2.582606170	2.573439293	2.564316913
4	3.296799539	3.281460974	3.266220763	3.251078188
5	3.934693402	3.912232050	3.889948910	3.867842366
6	4.511883639	4.481552241	4.451506657	4.421743794
7	5.034146962	4.995408205	4.957090867	4.919189663
8	5.506710359	5.459203371	5.412280729	5.365934118
9	5.934303403	5.877814753	5.822099325	5.767144825
10	6.321205588	6.255644240	6.191069056	6.127462741
11	6.671289163	6.596664879	6.523261553	6.451055803
12	6.988057881	6.904462657	6.822342605	6.741667134
13	7.274682070	7.182274205	7.091612610	7.002658348
14	7.534030361	7.433020839	7.334042998	7.237048429
15	7.768698399	7.659339271	7.552309022	7.447548659
16	7.981034820	7.863609344	7.748819276	7.636593973
17	8.173164759	8.047979047	7.925742276	7.806371131
18	8.347011118	8.214387113	8.085030392	7.958844011
19	8.504313808	8.364583398	8.228441389	8.095776325
20	8.646647168	8.500147282	8.357557826	8.218752021
21	8.775435717	8.622504282	8.473804521	8.329193606
22	8.891968416	8.732941037	8.578464271	8.428378601
23	8.997411563	8.832618838	8.672692010	8.517454317
24	9.092820467	8.922585844	8.757527555	8.597451125
25	9.179150014	9.003788098	8.833907076	8.669294381
26	9.257264218	9.077079478	8.902673432	8.733815122
27	9.327944873	9.143230676	8.964585468	8.791759685
28	9.391899374	9.202937302	9.020326393	8.843798337
29	9.449767799	9.256827198	9.070511314	8.890533028
30	9.502129316	9.305467040	9.115694030	8.932504357
31	9.549507976	9.349368299	9.156373137	8.970197823
32	9.592377960	9.388992617	9.192997534	9.004049439
33	9.631168326	9.424756659	9.225971377	9.034450781
34	9.666267300	9.457036503	9.255658536	9.061753512
35	9.698026166	9.486171585	9.282386614	9.086273454
36	9.726762776	9.512468273	9.306450558	9.108294238
37	9.752764735	9.536203089	9.328115917	9.128070587
38	9.776292281	9.557625615	9.347621770	9.145831262
39	9.797580886	9.576961119	9.365183369	9.161781707
40	9.816843611	9.594412923	9.380994506	9.176106428
41	9.834273246	9.610164540	9.395229662	9.188971123
42	9.850044232	9.624381604	9.408045921	9.200524603
43	9.864314410	9.637213617	9.419584713	9.210900513
44	9.877226601	9.648795510	9.429973371	9.220218874
45	9.888910035	9.659249075	9.439326534	9.228587475
46	9.899481643	9.668684233	9.447747417	9.236103119
47	9.909047229	9.677200202	9.455328943	9.242852743
48	9.917702530	9.684886528	9.462154778	9.248914422
49	9.925334169	9.691824039	9.468300244	9.254358273
50	9.932620530	9.698085684	9.473833158	9.259247268
60	9.975212478	9.735283105	9.506320907	9.287623050
70	9.990881180	9.748629408	9.517689597	9.297307640
80	9.996615374	9.753418014	9.521667930	9.300612969
90	9.998765902	9.755136149	9.523060089	9.301741071
100	9.999546001	9.755752610	9.523317272	9.302126089

	11	11.25	11.50	11.75
1	.946962406	.945801359	.944642227	.943485006
2	1.795283655	1.790966944	1.786664326	1.782375748
3	2.555238787	2.546204669	2.537214318	2.528267491
4	3.236032535	3.221083096	3.206229169	3.191470057
5	3.845910814	3.824152668	3.802566357	3.781150326
6	4.392260596	4.363054039	4.334121139	4.305458943
7	4.881699379	4.844614874	4.807931073	4.771642974
8	5.320155348	5.274936358	5.230269208	5.186146082
9	5.712939173	5.659470495	5.606727122	5.554697588
10	6.064808330	6.003089179	5.942288962	5.882391662
11	6.380024732	6.310145924	6.241397425	6.173757739
12	6.662406346	6.584531016	6.508012582	6.432823122
13	6.915373434	6.829720807	6.745664307	6.663168649
14	7.141989987	7.048821754	6.957499008	6.867978189
15	7.345000831	7.244609779	7.146321289	7.050082648
16	7.526364874	7.419565438	7.314631077	7.211999100
17	7.689784893	7.575905351	7.464656724	7.355965577
18	7.835734206	7.715610283	7.598384507	7.483972004
19	7.966480583	7.840450239	7.717584925	7.597787704
20	8.083607651	7.952006893	7.823836142	7.698985853
21	8.188534077	8.051693623	7.918544879	7.788965228
22	8.282530750	8.140773420	8.002965041	7.868969535
23	8.366736179	8.220374891	8.078214315	7.940104606
24	8.442170277	8.291506553	8.145288971	8.003353679
25	8.509746716	8.355069613	8.205077048	8.059590992
26	8.570283998	8.411869405	8.258370115	8.109593866
27	8.624515361	8.462625544	8.305873752	8.154053446
28	8.673097667	8.507981095	8.348216885	8.193584260
29	8.716619355	8.548510694	8.385960120	8.228732709
30	8.755607569	8.584727837	8.419603162	8.259984618
31	8.790534542	8.617091380	8.449591431	8.287771957
32	8.821823317	8.646011356	8.476321958	8.312478805
33	8.849852869	8.671854170	8.500148645	8.334446665
34	8.874962699	8.694947240	8.521386947	8.353979179
35	8.897456941	8.715583146	8.540318051	8.371346329
36	8.917608052	8.734023337	8.557192596	8.386788166
37	8.935660104	8.750501442	8.572233994	8.400518128
38	8.951831749	8.765226234	8.585641386	8.412725994
39	8.966318861	8.778384268	8.597592282	8.423580501
40	8.979296910	8.790142253	8.608244907	8.433231684
41	8.990923089	8.800649157	8.617740295	8.441812942
42	9.001338218	8.810038099	8.626204163	8.449442886
43	9.010668445	8.818428032	8.633748568	8.456226978
44	9.019026781	8.825925254	8.640473396	8.462258989
45	9.026514464	8.832624752	8.646467679	8.467622294
46	9.033222186	8.838611405	8.651810780	8.472391026
47	9.039231193	8.843961063	8.656573440	8.476631099
48	9.044614266	8.848741503	8.660818714	8.480401120
49	9.049436606	8.853013291	8.664602807	8.483753198
50	9.053756623	8.856830550	8.667975819	8.486733666
60	9.078542109	8.878481070	8.686888822	8.503256094
70	9.086792480	8.885509965	8.692877375	8.508358533
80	9.089538790	8.887791913	8.694773570	8.509934263
90	9.090452957	8.888532753	8.695373976	8.510420879
100	9.090757257	8.888773268	8.695564086	8.510571155

	12	12.25	12.50	12.75
1	.946962406	.945801359	.944642227	.943485006
2	1.795283655	1.790966944	1.786664326	1.782375748
3	2.555238787	2.546204669	2.537214318	2.528267491
4	3.236032535	3.221083096	3.206229169	3.191470057
5	3.845910814	3.824152668	3.802566357	3.781150326
6	4.392260596	4.363054039	4.334121139	4.305458943
7	4.881699379	4.844614874	4.807931073	4.771642974
8	5.320155348	5.274936358	5.230269208	5.186146082
9	5.712939173	5.659470495	5.606727122	5.554697588
10	6.064808330	6.003089179	5.942288962	5.882391662
11	6.380024732	6.310145924	6.241397425	6.173757739
12	6.662406346	6.584531016	6.508012582	6.432823122
13	6.915373434	6.829720807	6.745664307	6.663168649
14	7.141989987	7.048821754	6.957499008	6.867978189
15	7.345000831	7.244609779	7.146321289	7.050082648
16	7.526864874	7.419565438	7.314631077	7.211999100
17	7.689784893	7.575905351	7.464656724	7.355965577
18	7.835734206	7.715610283	7.598384507	7.483972004
19	7.966480583	7.840450239	7.717584925	7.597787704
20	8.083607651	7.952006893	7.823836142	7.698985853
21	8.188534077	8.051693623	7.918544879	7.788965228
22	8.282530750	8.140773420	8.002965041	7.868969535
23	8.366736179	8.220374891	8.078214315	7.940104606
24	8.442170277	8.291506553	8.145288971	8.003353679
25	8.509746716	8.355069619	8.205077048	8.059590992
26	8.570283998	8.411869405	8.258370115	8.109593866
27	8.624515361	8.462625544	8.305873752	8.154053446
28	8.673097667	8.507981095	8.348216885	8.193584260
29	8.716619355	8.548510694	8.385960120	8.228732709
30	8.755607569	8.584727837	8.419603162	8.259984618
31	8.790534542	8.617091380	8.449591431	8.287771957
32	8.821823317	8.646011356	8.476321958	8.312478805
33	8.849852869	8.671854170	8.500148645	8.334446665
34	8.874962699	8.694947240	8.521386947	8.353979179
35	8.897456941	8.715583146	8.540318051	8.371346329
36	8.917608052	8.734023337	8.557192596	8.386788166
37	8.935660104	8.750501442	8.572233994	8.400518128
38	8.951831749	8.765226234	8.585641386	8.412725994
39	8.966318861	8.778384268	8.597592282	8.423580501
40	8.979296910	8.790142253	8.608244907	8.433231684
41	8.990923089	8.800649157	8.617740295	8.441812942
42	9.001338218	8.810038099	8.626204163	8.449442886
43	9.010668445	8.818428032	8.633748568	8.456226978
44	9.019026781	8.825925254	8.640473396	8.462258989
45	9.026514464	8.832624752	8.646467679	8.467622294
46	9.033222186	8.838511405	8.651810780	8.472391026
47	9.039231193	8.843961063	8.656573440	8.476631099
48	9.044614266	8.848741503	8.660818714	8.480401120
49	9.049436606	8.853013291	8.664602807	8.483753198
50	9.053756623	8.856830550	8.667975819	8.486733666
60	9.078542109	8.878481070	8.683888822	8.50325694
70	9.086792480	8.885509965	8.692877375	8.508358533
80	9.089538790	8.887791913	8.694773570	8.509934263
90	9.090452957	8.888532753	8.695373976	8.510420879
100	9.090757257	8.888773268	8.695564086	8.510571155

	13	13.25	13.50	13.75
1	.937727454	.936581629	.935437691	.934295636
2	1.761141648	1.756936227	1.752744486	1.748566376
3	2.484177888	2.475487225	2.466838438	2.458231297
4	3.119072707	3.104868153	3.090753686	3.076728651
5	3.676570948	3.656144755	3.635878366	3.615770342
6	4.166107605	4.139009548	4.112162472	4.085563691
7	4.595967507	4.561952237	4.528299475	4.495004732
8	4.973425523	4.932408979	4.891884995	4.851846664
9	5.304869683	5.256893126	5.209555450	5.162846665
10	5.595909284	5.541109743	5.487109180	5.433893849
11	5.851469829	5.790055911	5.729612291	5.670120780
12	6.075876375	6.008108591	5.941491118	5.876000665
13	6.272926739	6.199101572	6.126613020	6.055432056
14	6.445955762	6.366392885	6.288356972	6.211812677
15	6.597891757	6.512923837	6.429675236	6.348103760
16	6.731306060	6.641270728	6.553147252	6.466886121
17	6.848456550	6.753690146	6.661026717	6.570409028
18	6.951325860	6.852158645	6.755282722	6.660632798
19	7.041654931	6.938407491	6.837635693	6.739265913
20	7.120972475	7.013953109	6.909588795	6.807797373
21	7.190620849	7.080123737	6.972455364	6.867524895
22	7.251778767	7.138082785	7.027382886	6.919579482
23	7.305481256	7.188849284	7.075373937	6.964946842
24	7.352637166	7.233315810	7.117304481	7.004486055
25	7.394044555	7.272264171	7.153939864	7.038945838
26	7.430404194	7.306379154	7.185948782	7.068978722
27	7.462331427	7.336260568	7.213915483	7.095153412
28	7.490366585	7.362433787	7.238350434	7.117965553
29	7.514984129	7.385358985	7.259699640	7.137847118
30	7.536600681	7.405439234	7.278352780	7.155174585
31	7.555582077	7.423027583	7.294650326	7.170276067
32	7.572249554	7.438433269	7.308889752	7.183437528
33	7.586885190	7.451927155	7.321330964	7.194908193
34	7.599736675	7.463746489	7.332201049	7.204905272
35	7.611021505	7.474099079	7.341698415	7.213618069
36	7.620930662	7.483166942	7.349996416	7.221211571
37	7.629631848	7.491109510	7.357246510	7.227829569
38	7.637272320	7.498066429	7.363581034	7.233597382
39	7.643981384	7.504160015	7.369115607	7.238624229
40	7.649872581	7.509497404	7.373951252	7.243005299
41	7.655045615	7.514172440	7.378176232	7.246823551
42	7.659588033	7.518267317	7.381867665	7.250151290
43	7.663576709	7.521854031	7.385092928	7.253051528
44	7.667079147	7.524995645	7.387910891	7.255579185
45	7.670154622	7.527747394	7.390372991	7.257782126
46	7.672855182	7.530157659	7.392524167	7.259702064
47	7.675226532	7.532268817	7.394403683	7.261375356
48	7.677308804	7.534117987	7.396045847	7.262833687
49	7.679137237	7.535737680	7.397480631	7.264104673
50	7.680742775	7.537156374	7.398734225	7.265212381
60	7.689155885	7.544508210	7.405158969	7.270827210
70	7.691448725	7.546462350	7.406824522	7.272246862
80	7.692073596	7.546981766	7.407256300	7.272605806
90	7.692243894	7.547119828	7.407368234	7.272696561
100	7.692290305	7.547155526	7.407397252	7.272719508

Таблица П.15. Дисконтные множители (сложная учетная ставка)

Число периодов	Учетная ставка			
	4	4.5	5	5.25
1	.960000000	.955000000	.950000000	.947500000
2	.921600000	.912025000	.902500000	.897756250
3	.884736000	.870983875	.857375000	.850624047
4	.849346560	.831789601	.814506250	.805966284
5	.815372698	.794359069	.773780938	.763653054
6	.782757790	.758612911	.735091891	.723561269
7	.751447478	.724475330	.698337296	.685574302
8	.721389579	.691873940	.663420431	.649581652
9	.692533996	.660739612	.630249410	.615478615
10	.664832636	.631006330	.598736939	.583165988
11	.638239331	.602611045	.568800092	.552549773
12	.612709757	.575493548	.540360088	.523540910
13	.588201367	.549596338	.513342083	.496055012
14	.564673312	.524864503	.487674979	.470012124
15	.542086380	.501245600	.463291230	.445336488
16	.520402925	.478689548	.440126669	.421956322
17	.499586808	.457148519	.418120335	.399803615
18	.479603335	.436576835	.397214318	.378813925
19	.460419202	.416930878	.377353603	.358926194
20	.442002434	.398168988	.358485922	.340082569
21	.424322337	.380251384	.340561626	.322228234
22	.407349443	.363140072	.323533545	.305311252
23	.391055465	.346798768	.307356868	.289282411
24	.375413247	.331192824	.291989024	.274095085
25	.360396717	.316289147	.277389573	.259705093
26	.345980848	.302056135	.263520094	.246070575
27	.332141614	.288463609	.250344090	.233151870
28	.318855950	.275482747	.237826885	.220911397
29	.306101712	.263086023	.225935541	.209313549
30	.293857643	.251247152	.214638764	.198324587
31	.282103338	.239941030	.203906826	.187912546
32	.270819204	.229143684	.193711484	.178047138
33	.259986436	.218832218	.184025910	.168699663
34	.249586978	.208984768	.174824615	.159842931
35	.239603499	.199580454	.166083384	.151451177
36	.230019359	.190599333	.157779215	.143499990
37	.220818585	.182022363	.149890254	.135966241
38	.211985842	.173831357	.142395741	.128828013
39	.203506408	.166008946	.135275954	.122064542
40	.195366152	.158538543	.128512157	.115656154
41	.187551505	.151404309	.122086549	.109584206
42	.180049445	.144591115	.115982221	.103831035
43	.172847467	.138084515	.110183110	.098379906
44	.165933569	.131870712	.104673955	.093214961
45	.159296226	.125936530	.099440257	.088321175
46	.152924377	.120269386	.094468244	.083684313
47	.146807402	.114857263	.089744832	.079290887
48	.140935106	.109688687	.085257590	.075128115
49	.135297702	.104752696	.080994711	.071183889
50	.129885794	.100038824	.076944975	.067446735
60	.086352314	.063125131	.046069799	.039332642
70	.057409837	.039832357	.027583690	.022937459
80	.038167933	.025134470	.016515374	.013376346
90	.025375288	.015860009	.009888365	.007800630
100	.016870319	.010007766	.005920529	.004549062

	5.5	5.75	6	6.25
1	.945000000	.942500000	.940000000	.937500000
2	.893025000	.888306250	.883600000	.878906250
3	.843908625	.837228641	.830584000	.823974609
4	.797493651	.789087994	.780748960	.772476196
5	.753631500	.743715434	.733904022	.724196434
6	.712181767	.700951797	.689869781	.678934157
7	.673011770	.660647068	.648477594	.636500772
8	.635996123	.622659862	.609568939	.596719474
9	.601016336	.586856920	.572994802	.559424507
10	.567960438	.553112647	.538615114	.524460475
11	.536722613	.521308670	.506298207	.491681695
12	.507202870	.491333421	.475920315	.460951589
13	.479306712	.463081750	.447365096	.432142115
14	.452944843	.436454549	.420523190	.405133233
15	.428032876	.411358412	.395291799	.379812406
16	.404491068	.387705304	.371574291	.356074130
17	.382244059	.365412249	.349279833	.333819497
18	.361220636	.344401044	.328323043	.312955779
19	.341353501	.324597984	.308623661	.293396043
20	.322579059	.305933600	.290106241	.275058790
21	.304837210	.288342418	.272699867	.257867616
22	.288071164	.271762729	.256337875	.241750890
23	.272227250	.256136372	.240957602	.226641459
24	.257254751	.241408531	.226500146	.212476368
25	.243105740	.227527540	.212910137	.199196595
26	.229734924	.214444707	.200135529	.186746808
27	.217099503	.202114136	.188127397	.175075132
28	.205159031	.190492573	.176839753	.164132936
29	.193875284	.179539250	.166229368	.153874628
30	.183212143	.169215743	.156255606	.144257464
31	.173135475	.159485838	.146880270	.135241372
32	.163613024	.150315402	.138067454	.126788786
33	.154614308	.141672267	.129783406	.118864487
34	.146110521	.133526112	.121996402	.111435457
35	.138074442	.125848360	.114676618	.104470741
36	.130480348	.118612079	.107796021	.097941319
37	.123303929	.111791885	.101328260	.091819987
38	.116522213	.105363851	.095248564	.086081238
39	.110113491	.099305430	.089533650	.080701160
40	.104057249	.093595368	.084161631	.075657338
41	.098334100	.088213634	.079111933	.070928754
42	.092925725	.083141350	.074365217	.066495707
43	.087814810	.078360723	.069903304	.062339725
44	.082984995	.073854981	.065709106	.058443493
45	.078420821	.069608320	.061766560	.054790774
46	.074107676	.065605841	.058060566	.051366351
47	.070031753	.061833505	.054576932	.048155954
48	.066180007	.058278079	.051302316	.045146207
49	.062540107	.054927089	.048224177	.042324569
50	.059100401	.051768782	.045330727	.039679283
60	.033566689	.028633968	.024415814	.020910216
70	.019064552	.015837810	.013150727	.010914136
80	.010827911	.008760093	.007083180	.005724033
90	.006149825	.004845318	.003815108	.003002029
100	.003492857	.002680007	.002054875	.001574446

	6.5	6.75	7	7.25
1	.935000000	.932500000	.930000000	.927500000
2	.874225000	.869556250	.864900000	.860256250
3	.817400375	.810861203	.804357000	.797887672
4	.764269351	.756128072	.748052010	.740040816
5	.714591843	.705089427	.695688369	.686387857
6	.668143373	.657495891	.646990183	.636624737
7	.624714054	.613114918	.601700871	.590469444
8	.584107640	.571729661	.559581810	.547660409
9	.546140644	.533137909	.520411083	.507955029
10	.510641502	.497151100	.483982307	.471128290
11	.477449804	.463593401	.450103546	.436971489
12	.446415567	.432300846	.418596297	.405291056
13	.417398555	.403120539	.389294557	.375907454
14	.390267649	.375909903	.362043938	.348654164
15	.364900252	.350535984	.336700862	.323376737
16	.341181735	.326874805	.313131802	.299931923
17	.319004923	.304810756	.291212576	.278186859
18	.298269603	.284236030	.270827695	.258018312
19	.278882079	.265050098	.251869757	.239311984
20	.260754743	.247159216	.234238874	.221961865
21	.243805685	.230475969	.217842153	.205869630
22	.227958316	.214918841	.202593202	.190944082
23	.213141025	.200411820	.188411678	.177100636
24	.199286858	.186884022	.175222860	.164260840
25	.186333213	.174269350	.162957260	.152351929
26	.174221554	.162506169	.151550252	.141306414
27	.162897153	.151537003	.140941734	.131061699
28	.152308838	.141308255	.131075813	.121559726
29	.142408763	.131769948	.121900506	.112746646
30	.133152194	.122875476	.113367471	.104572514
31	.124497301	.114581382	.105431748	.096991007
32	.116404977	.106847138	.098051525	.089959159
33	.108838653	.099634957	.091187918	.083437120
34	.101764141	.092909597	.084804764	.077387929
35	.095149472	.086638199	.078868431	.071777304
36	.088964756	.080790121	.073347641	.066573449
37	.083182047	.075336788	.068213306	.061746874
38	.077775214	.070251554	.063438374	.057270226
39	.072719825	.065509575	.058997688	.053118134
40	.067993036	.061087678	.054867850	.049267070
41	.063573489	.056964260	.051027100	.045695207
42	.059441212	.053119172	.047455203	.042382305
43	.055577533	.049533628	.044133339	.039309587
44	.051964994	.046190108	.041044005	.036459642
45	.048587269	.043072276	.038170925	.033816318
46	.045429097	.040164897	.035498960	.031364635
47	.042476205	.037453767	.033014033	.029090699
48	.039715252	.034925638	.030703051	.026981623
49	.037133761	.032568157	.028553837	.025025456
50	.034720066	.030369806	.026555069	.023211110
60	.017729507	.015098383	.012852183	.010935411
70	.009053422	.007506178	.006220229	.005151981
80	.004623053	.003731704	.003010481	.002427244
90	.002360723	.001855221	.001457020	.001143543
100	.001205483	.000922325	.000705172	.000538756

	7.5	7.75	8	8.25
1	.925000000	.922500000	.920000000	.917500000
2	.855625000	.851006250	.846400000	.841806250
3	.791453125	.785053266	.778688000	.772357234
4	.732094141	.724211638	.716392960	.708637763
5	.677187080	.668085236	.659081523	.650175147
6	.626398049	.616308630	.606355001	.596535697
7	.579418195	.568544711	.557846601	.547321502
8	.535961831	.524482496	.513218873	.502167478
9	.495764693	.483835103	.472161363	.460738662
10	.458582341	.446337882	.434388454	.422727722
11	.424188666	.411746696	.399637378	.387852685
12	.392374516	.379836327	.367666388	.355854838
13	.362946427	.350399012	.338253077	.326496814
14	.335725445	.323243088	.311192831	.299560827
15	.310546037	.298191749	.286297404	.274847059
16	.287255084	.275081889	.263393612	.252172176
17	.265710953	.253763042	.242322123	.231367972
18	.245782631	.234096406	.222936353	.212280114
19	.227348934	.215953935	.205101445	.194767005
20	.210297764	.199217505	.188693329	.178698727
21	.194525432	.183778148	.173597863	.163956082
22	.179936024	.169535342	.159710034	.150429705
23	.166440822	.156396353	.146933231	.138019254
24	.153957761	.144275635	.135178573	.126632666
25	.142410929	.133094274	.124364287	.116185471
26	.131730109	.122779468	.114415144	.106600170
27	.121850351	.113264059	.105261932	.097805656
28	.112711575	.104486094	.096840978	.089736689
29	.104258206	.096388422	.089093700	.082333412
30	.096438841	.088918319	.081966204	.075540906
31	.089205928	.082027149	.075408907	.069308781
32	.082515483	.075670045	.069376195	.063590807
33	.076326822	.069805617	.063826099	.058344565
34	.070602310	.064395682	.058720011	.053531138
35	.065307137	.059405016	.054022410	.049114820
36	.060409102	.054801127	.049700617	.045062847
37	.055878419	.050554040	.045724568	.041345162
38	.051687538	.046636102	.042066603	.037934186
39	.047810972	.043021804	.038701274	.034804616
40	.044225149	.039687614	.035605172	.031933235
41	.040908263	.036611824	.032756759	.029298743
42	.037840144	.033774408	.030136218	.026881597
43	.035002133	.031156891	.027725321	.024663865
44	.032376973	.028742232	.025507295	.022629096
45	.029948700	.026514709	.023466711	.020762196
46	.027702547	.024459819	.021589374	.019049315
47	.025624856	.022564183	.019862224	.017477746
48	.023702992	.020815459	.018273246	.016035832
49	.021925268	.019202261	.016811387	.014712876
50	.020280873	.017714086	.015466476	.013499064
60	.009300450	.007906467	.006718439	.005706428
70	.004265022	.003528956	.002916421	.002412265
80	.001955864	.001575107	.001267728	.001019731
90	.000896925	.000703030	.000550627	.000431069
100	.000411314	.000313789	.000239212	.000182225

	8.5	8.75	9	9.5
1	.915000000	.912500000	.910000000	.905000000
2	.837225000	.832656250	.828100000	.819025000
3	.766060875	.759798828	.753571000	.741217625
4	.700945701	.693316431	.685749610	.670801951
5	.641365316	.632651243	.624032145	.607075766
6	.586849264	.577294259	.567869252	.549403568
7	.536967077	.526781012	.516761019	.497210229
8	.491324875	.480687673	.470252528	.449975257
9	.449562261	.438627502	.427929800	.407227608
10	.411349469	.400247595	.389416118	.368540985
11	.376384764	.365225931	.354368667	.333529591
12	.344392059	.333268662	.322475487	.301844280
13	.315118734	.304107654	.293452694	.273169073
14	.288333642	.277498234	.267041951	.247218012
15	.263825282	.253217139	.243008176	.223732300
16	.241400133	.231060639	.221137440	.202477732
17	.220881122	.210842833	.201235070	.183242347
18	.202106226	.192394085	.183123914	.165834324
19	.184927197	.175559603	.166642762	.150080064
20	.169208385	.160198137	.151644913	.135822458
21	.154825673	.146180800	.137996871	.122919324
22	.141665490	.133389980	.125577152	.111241988
23	.129623924	.121718357	.114275209	.100673999
24	.118605890	.111068001	.103990440	.091109969
25	.108524390	.101349551	.094631300	.082454522
26	.099299816	.092481465	.086114483	.074621343
27	.090859332	.084389337	.078364180	.067532315
28	.083136289	.077005270	.071311404	.061116745
29	.076069704	.070267309	.064893377	.055310654
30	.069603779	.064118919	.059052973	.050056142
31	.063687458	.058508514	.053738206	.045300809
32	.058274024	.053389019	.048901767	.040997232
33	.053320732	.048717480	.044500608	.037102495
34	.048788470	.044454700	.040495553	.033577758
35	.044641450	.040564914	.036850954	.030387871
36	.040846927	.037015484	.033534368	.027501023
37	.037374938	.033776629	.030516275	.024888426
38	.034198068	.030821174	.027769810	.022524025
39	.031291232	.028124321	.025270527	.020384243
40	.028631478	.025663443	.022996180	.018447740
41	.026197802	.023417892	.020926523	.016695205
42	.023970989	.021368826	.019043136	.015109160
43	.021933455	.019499054	.017329254	.013673790
44	.020069111	.017792887	.015769621	.012374780
45	.018363237	.016236009	.014350355	.011199176
46	.016802362	.014815358	.013058823	.010135254
47	.015374161	.013519015	.011883529	.009172405
48	.014067357	.012336101	.010814012	.008301027
49	.012871632	.011256692	.009840751	.007512429
50	.011777543	.010271731	.008955083	.006798748
60	.004844686	.004111236	.003487254	.002505617
70	.001992859	.001645512	.001357993	.000923423
80	.000819762	.000658612	.000528824	.000340319
90	.000337208	.000263608	.000205933	.000125422
100	.000138711	.000105508	.000080194	.000046223

	10	10.5	11	11.5
1	.900000000	.895000000	.890000000	.885000000
2	.810000000	.801025000	.792100000	.783225000
3	.729000000	.716917375	.704969000	.693154125
4	.656100000	.641641051	.627422410	.613441401
5	.590490000	.574268740	.558405945	.542895640
6	.531441000	.513970523	.496981291	.480462641
7	.478296900	.460003618	.442313349	.425209437
8	.430467210	.411703238	.393658881	.376310352
9	.387420489	.368474398	.350356404	.333034662
10	.348678440	.329784586	.311817199	.294735675
11	.313810596	.295157205	.277517307	.260841073
12	.282429536	.264165698	.246990404	.230844349
13	.254186583	.236428300	.219821459	.204297249
14	.228767925	.211603328	.195641099	.180803066
15	.205891132	.189384079	.174120578	.160010713
16	.185302019	.169499556	.154967314	.141609481
17	.166771817	.151702103	.137920910	.125324391
18	.150094635	.135773382	.122749610	.110912086
19	.135085172	.121517177	.109247153	.098157196
20	.121576655	.108757873	.097229966	.086869118
21	.109418989	.097338297	.086534670	.076879170
22	.098477090	.087117775	.077015856	.068038065
23	.088629381	.077970409	.068544112	.060213688
24	.079766443	.069783516	.061004259	.053289114
25	.071789799	.062456247	.054293791	.047160866
26	.064610819	.055898341	.048321474	.041737366
27	.058149737	.050029015	.043006112	.036937569
28	.052334763	.044775969	.038275439	.032689749
29	.047101287	.040074492	.034065141	.028930427
30	.042391158	.035866670	.030317976	.025603428
31	.038152042	.032100670	.026982998	.022659034
32	.034336838	.028730100	.024014868	.020053245
33	.030903154	.025713439	.021373233	.017747122
34	.027812839	.023013528	.019022177	.015706203
35	.025031555	.020597108	.016929738	.013899990
36	.022528400	.018434411	.015067467	.012301491
37	.020275560	.016498798	.013410045	.010886819
38	.018248004	.014766424	.011934940	.009634835
39	.016423203	.013215950	.010622097	.008526829
40	.014780883	.011828275	.009453666	.007546244
41	.013302795	.010586306	.008413763	.006678426
42	.011972515	.009474744	.007488249	.005910407
43	.010775264	.008479896	.006664542	.005230710
44	.009697737	.007589507	.005931442	.004629178
45	.008727364	.006792609	.005278983	.004096823
46	.007855167	.006079385	.004698295	.003625688
47	.007069650	.005441049	.004181483	.003208734
48	.006362685	.004869739	.003721520	.002839730
49	.005726417	.004358417	.003312153	.002513161
50	.005153775	.003900783	.002947816	.002224147
60	.001797010	.001286418	.000919180	.000655536
70	.000626579	.000424241	.000286616	.000193210
80	.000218475	.000133908	.000089372	.000056946
90	.000076177	.000046140	.000027868	.000016784
100	.000026561	.000015216	.000008690	.000004947

	12	12.5	13	13.5
1	.880000000	.875000000	.870000000	.865000000
2	.774400000	.765625000	.756900000	.748225000
3	.681472000	.669921875	.658503000	.647214625
4	.599695360	.586181641	.572897610	.559840651
5	.527731917	.512908936	.498420921	.484262163
6	.464404087	.448795319	.433626201	.418886771
7	.408675596	.392695904	.377254795	.362337057
8	.359634525	.343608916	.328211672	.313421554
9	.316478382	.300657801	.285544154	.271109644
10	.278500976	.263075576	.248423414	.234509842
11	.245080859	.230191129	.216128370	.202851014
12	.215671156	.201417238	.188031682	.175466127
13	.189790617	.176240083	.163587564	.151778200
14	.167015743	.154210073	.142321180	.131288143
15	.146973854	.134933814	.123819427	.113564243
16	.129336991	.118067087	.107722901	.098233071
17	.113816552	.103308701	.093718924	.084971606
18	.100158566	.090395114	.081535464	.073500439
19	.088139538	.079095724	.070935854	.063577880
20	.077562794	.069208759	.061714193	.054994866
21	.068255258	.060557664	.053691348	.047570559
22	.060064627	.052987956	.046711472	.041148534
23	.052856872	.046364461	.040638981	.035593482
24	.046514047	.040568904	.035355914	.030788362
25	.040932362	.035497791	.030759645	.026631933
26	.036020478	.031060567	.026760891	.023036622
27	.031698021	.027177996	.023281975	.019926678
28	.027894258	.023780747	.020255318	.017236576
29	.024546947	.020808153	.017622127	.014909639
30	.021601314	.018207134	.015331250	.012896837
31	.019009156	.015931242	.013338188	.011155764
32	.016728057	.013939837	.011604223	.009649736
33	.014720690	.012197357	.010095674	.008347022
34	.012954208	.010672688	.008783237	.007220174
35	.011399703	.009338602	.007641416	.006245450
36	.010031738	.008171277	.006648032	.005402315
37	.008827930	.007149867	.005783788	.004673002
38	.007768578	.006256134	.005031895	.004042147
39	.006836349	.005474117	.004377749	.003496457
40	.006015987	.004789852	.003808642	.003024435
41	.005294069	.004191121	.003313518	.002616137
42	.004658780	.003667231	.002882761	.002262958
43	.004099727	.003208827	.002508002	.001957459
44	.003607759	.002807723	.002181962	.001693202
45	.003174828	.002456758	.001898307	.001464620
46	.002793849	.002149663	.001651527	.001266896
47	.002458587	.001880955	.001436828	.001095865
48	.002163557	.001645836	.001250041	.000947923
49	.001903930	.001440106	.001087535	.000819954
50	.001675458	.001260093	.000946156	.000709260
60	.000466617	.000331500	.000235047	.000166328
70	.000129953	.000087209	.000058391	.000039006
80	.000036192	.000022943	.000014506	.000009147
90	.000010080	.000006036	.000003604	.000002145
100	.000002807	.000001588	.000000895	.000000503

Суммы членов последовательностей

Во всех приведенных ниже формулах $t=1, ..., n$.

$$\sum_1^n t = \frac{n(n+1)}{2}; \qquad \sum_1^n t^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$\sum_1^n tq^t = \frac{1}{q-1}\left(nq^{n+1} - \sum_1^n q^t\right) = \frac{nq^{n+1}}{q-1} - \frac{q^{n+1}-q}{(q-1)^2};$$

$$\sum_1^n t^2 q^t = \frac{1}{q-1}\left(n^2 q^{(n+1)} + \sum_1^n q^t - 2\sum_1^n tq^t\right) =$$

$$= \frac{1}{q-1}\left[nq^{n+1}(n-2) + 3\frac{q^{n+1}-q}{q-1}\right].$$

$$\sum_1^n tv^t = \frac{v}{v-1}\left(nv - \frac{v^n-1}{v-1}\right) = \frac{1}{i}\left[a_{n;\,i}(1+i) - nv^n\right],$$

где $v = (1+i)^{-1}$.

Прогрессии

Арифметическая прогрессия. Общий член прогрессии

$$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d.$$

Сумма первых n членов

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d],$$

где a_1 — первый член прогрессии, d — разность прогрессии.

Геометрическая прогрессия. Общий член прогрессии

$$a_n = a_{n-1}q = a_1 q^{n-1}.$$

Сумма первых n членов

$$S_n = a_1\frac{q^n-1}{q-1} = \frac{qa_n - a_1}{q-1},$$

где q — знаменатель прогрессии.

Сумма бесконечного числа членов при условии $q<1$.

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1}{1-q}\lim_{n\to\infty} q^n = \frac{a_1}{1-q}.$$

Итерационные методы решения уравнений

Метод Ньютона—Рафсона. С помощью этого метода итеративным путем (последовательным приближением) решается уравнение $f(x)=0$. Общий вид рекуррентного соотношения

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

где $f'(x_k)$ — численное значение производной функции $f(x)$ при $x=x_k$; k — номер итерации. Исходное значение x_0 находится методом проб и ошибок.

Метод секущей. В отличие от метода Ньютона—Рафсона метод секущей не требует определения производной соответствующей функции. Она заменяется отношением

$$\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}.$$

Итерация описывается следующим рекуррентным соотношением

$$x_{k+1} = x_k - (x_k - x_{k-1}) \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}.$$

Производные и интегралы некоторых функций

$$(e^{f(x)})' = e^{f(x)} f'(x); \quad (e^{-\delta n})' = e^{-\delta n}(-n);$$

$$\left(\frac{1 - e^{-\delta n}}{\delta}\right)' = -\frac{e^{-\delta n}(n\delta + 1)}{\delta^2}; \quad \left(\frac{e^{\delta n} - 1}{\delta}\right)' = \frac{e^{\delta n}(n\delta - 1)}{\delta^2};$$

$$\int_0^n e^t dt = e^n - 1; \qquad \int_0^n e^{-t} dt = 1 - e^{-n};$$

$$\int_0^n e^{\delta t} dt = \frac{e^{\delta n} - 1}{\delta}; \qquad \int_0^n e^{-\delta t} dt = \frac{1 - e^{-\delta n}}{\delta};$$

$$\int_0^n e^{(\alpha - \delta)t} dt = \frac{e^{(\alpha - \delta)n} - 1}{\alpha - \delta}; \qquad \int_0^n a^t dt = \frac{a^n - 1}{\ln a}.$$

Разложение по формуле бинома

$$(1 + i)^n = 1 + ni + \frac{n(1 + i)}{2!} i^2 + \frac{n(n + 1)(n + 2)}{3!} i^3 \ldots$$

$$(1+i)^{-n} = 1 - ni + \frac{n(n+1)}{2!} i^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{3!} i^3 \ldots$$

Пределы

$$\lim_{n\to\infty}(1+i)^n = \infty; \ \lim_{n\to\infty}(1+i)^{-n} = 0, \ i > 0;$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}; \ \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{j}{m}\right)^m = \mathrm{e}^j, \ j > 0,$$

где e — основание натуральных логарифмов

$$\lim_{p\to\infty} p\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1\right] = m \ln\left(1+\frac{j}{m}\right).$$

АЛФАВИТНО-ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ