Л. Г. БАТРАКОВА

ФИНАНСОВЫЕ РАСЧЕТЫ В КОММЕРЧЕСКИХ СДЕЛКАХ

Л.Г. Батракова

ФИНАНСОВЫЕ РАСЧЕТЫ В КОММЕРЧЕСКИХ СДЕЛКАХ

Рекомендовано Министерством общего и профессионального образования Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по экономическим направлениям и специальностям

Москва • «Логос» • 1998

ББК 65.9(2)262
Б28

Рецензенты
Доктора экономических наук С.А.Валуев (Государственная академия управления), Ф.Н.Завьялов (Ярославский государственный университет)

Батракова Л.Г.
Б28 Финансовые расчеты в коммерческих сделках. М.: Издательская корпорация «Логос», 1998. 120 с.
ISBN 5-88439-094-7

Излагаются методы проведения финансово-экономических расчетов: начисления простых и сложных процентов, определения дисконта, эквивалентности платежей, разработки планов погашения долга и др. Теоретические положения дополняются практическими расчетами. В отличие от других изданий приводятся выводы большинства используемых формул. Отражены изменения, обусловленные переходом банков в 1998 г. к новым правилам работы, максимально приближенным к международной практике.

Для студентов экономических специальностей и направлений вузов. Представляет интерес для предпринимателей, менеджеров и специалистов, принимающих финансовые решения, а также для работников аналитических и кредитных подразделений банков.

ББК 65.9(2)262

Учебное издание
Батракова Людмила Георгиевна
Финансовые расчеты в коммерческих сделках
Учебное пособие

Редактор Е.В.Комарова
Обложка Ю.П.Буги

ЛР № 071045 от 18.05.1994

Подписано в печать 15.04.98 г. Формат 60x90/16
Бумага офсетная № 1. Печать офсетная
Гарнитура Школьная. Печ. л. 7,5. Уч.- изд. л. 8,53
Тираж 4000 экз. Заказ 1023

Издательская корпорация «Логос»
105318, Москва, Измайловское ш., 4

Отпечатано в ГУП ИПК «Ульяновский Дом печати»
432601, г. Ульяновск, ул. Гончарова, 14

ISBN 5-88439-094-7

ПРЕДИСЛОВИЕ

Финансовые вычисления появились с возникновением денег, усложняясь и совершенствуясь вместе с развитием денежного обращения и используемого в расчетах математического аппарата. В XIX веке они превратились в специальную отрасль знаний, получившую название коммерческих вычислений или коммерческой арифметики. Эта отрасль знаний была хорошо известна и в России. Отличительные для нее теоретические основы и практические методы изучались в коммерческих институтах и школах, пользовавшихся широкой популярностью. Главное внимание в подготовке специалистов уделялось технике процентных и вексельных вычислений, а также технике вычислений по финансовым инструментам и операциям.

С конца 20-х годов и вплоть до начала последнего десятилетия XX века в нашей стране возобладали такие методы централизованного руководства экономическими процессами, которые сузили сферу действия финансовых рычагов развития народного хозяйства. Естественно, что это далеко не способствовало разработке и использованию современных методов финансовых вычислений. В свою очередь натурализация применяемых на практике измерителей экономического развития привела к пренебрежению фактором времени, что обусловило отставание в темпах научно-технического прогресса и глубине структурных преобразований производства и сферы обслуживания. Можно констатировать, что не только объективные экономические условия и факторы развития производства, но и даже методы оценки экономических явлений оказывают влияние на развитие народного хозяйства.

С переходом к рыночным отношениям потребность в финансовых вычислениях вновь резко возросла. Они стали безусловно необходимыми для успешного проведения любой коммерческой сделки. Вкупе с современными методами анализа и моделирования финансовых ситуаций финансовые вычисления перерастают в новое, все более влиятельное направление организации и управления предпринимательской деятельностью — финансовый менеджмент.

Однако ядром финансового менеджмента и по сию пору остается вполне определенный круг финансовых вычислений. Речь идет прежде всего об аппарате и методах расчетов, необходимых при финансовых операциях, когда оговариваются конкретные значения трех видов параметров, а именно: стоимостные характеристики (размеры платежей, кредитов), временные данные (даты, сроки выплат, отсрочки платежей), специфические элементы (процентные, учетные ставки).

Перечисленные параметры равноправны, пренебрежение каким-либо из них может привести к нежелательным финансовым последствиям для одной из участвующих сторон. Кроме того, между различными видами параметров объективно существуют функциональные зависимости. Изучение этих зависимостей и разработка на их основе методов решения финансовых задач — важнейшее направление деятельности специалистов в области финансов, требующее основательной математической и экономической подготовки и серьезных практических навыков.

Настоящая работа, как явствует из ее названия, посвящена финансовым расчетам в коммерческих сделках. Она состоит из шести глав. В первой рассматриваются методы начисления простых процентов. Вторая глава охватывает вопросы, касающиеся сложных процентов. В третьей главе изложены задачи дисконтирования. Четвертая глава посвящена эквивалентности различных видов ставок. В пятой главе рассматриваются вопросы, связанные с финансовыми рентами. И, наконец, шестая глава посвящена практическому применению финансово-экономических расчетов при планировании погашения долга.

В отличие от других аналогичных изданий в предлагаемой работе дается вывод большинства расчетных формул. Используемые методы иллюстрируются большим числом примеров, многие из которых имеют самостоятельное значение как для понимания методов финансовых расчетов, так и для овладения навыками их использования.

ГЛАВА 1

ПРОСТЫЕ ПРОЦЕНТЫ

1.1. СУЩНОСТЬ ПРОСТЫХ ПРОЦЕНТОВ И ПРИМЕРЫ ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ В БАНКОВСКОЙ ПРАКТИКЕ

Большая часть активных операций банка связана с выдачей ссуд, по которым он получает доход в виде процентов. Однако для осуществления таких операций сначала необходимо привлечь свободные денежные средства населения, предприятий, организаций, а также получить займы в других кредитных учреждениях. Важным вопросом при этом является определение платы за привлекаемые ресурсы, поэтому в своих расчетах банки используют такое понятие, как годовая ставка, характеризующая интенсивность начисления процентов.

Практически все финансово-экономические расчеты связаны с увеличением количества денег. Сумма доходов от предоставления денег в долг в различных формах (выдача ссуды, покупка облигаций, сдача оборудования в аренду и пр.) называется процентными деньгами (процентами) и обозначается I. Интервал времени между начислениями процента называют периодом начисления процентов и обозначают n. Процесс увеличения суммы денег в связи с начислением процентов называют наращением, или ростом, первоначальной суммы. Проценты за соответствующие периоды времени выплачиваются кредитору по мере начисления или присоединяются к сумме долга.

Простые проценты — это метод расчета дохода кредитора от предоставления денег в долг заемщику. Сущность простых процентов заключается в том, что они начисляются на одну и ту же величину капитала в течение всего срока ссуды. В банковской практике этот метод обычно применяется в том случае, если срок ссуды меньше года.

Рассмотрим, каким образом начисляются простые проценты. Для этого выясним, какие показатели влияют на изменение суммы процентных денег.

Сумма процентных денег зависит от суммы долга (P), срока его выплаты, выражаемого в годах, (n) и процентной ставки (i), показывающей, сколько денежных единиц должен заплатить заемщик за пользование 100 единицами капитала в определенном периоде времени (за год). Начисленные проценты за один период равны $P \times i$, а за n периодов: $P \times n \times i$.

Процесс изменения суммы долга с начисленными простыми процентами описывается арифметической прогрессией:

$$P;\ P + P \times i;\ P + 2\mathrm{P} \times i \text{ и т.д.}$$

Первый член прогрессии — P, а ее разность равна $P \times i$.

Сумма S, образовавшаяся к концу года, состоит из двух элементов — первоначальной суммы долга и процентов:

$$S = P + I.$$

Отсюда

$$S = P\,(1 + n \times i), \tag{1.1}$$

где n — срок долга в годах; i — годовая ставка простых процентов (десятичная дробь). При этом начисленные проценты можно рассчитать: $I = P \times n \times i$.

Величину S называют наращенной суммой долга. Отношение наращенной суммы к первоначальной сумме долга $S : P = k_{\text{н}}$ называют множителем (коэффициентом) наращения:

$$k_{\text{н}} = (1 + n \times i).$$

По формуле (1.1) можно определить наращенную сумму при использовании простой годовой ставки процентов. Формула позволяет рассчитать как сумму вклада с процентами, так и сумму кредита с процентами при его погашении единовременным платежом. Простые проценты используются также при помещении валютных средств на краткосрочные депозиты.

Пример 1. Ссуда в размере 10 тыс. ден. ед. выдана на год по простой ставке процентов, равной 8% годовых. Определить погашаемую сумму.

◆ ◆ ◆

Погашаемая сумма составит

$$S = P(1 + n \times i) = 10000(1 + 1 \cdot 0{,}08) = 10000 \cdot 1{,}08 = 10800 \text{ ден. ед.}$$

Пример 2. Определить проценты и сумму накопленного долга, если известно, что ссуда, равная 7 тыс. ден. ед., выдана на срок 2 года по ставке простого процента 10% годовых.

◆ ◆ ◆

Проценты составят

$$I = P \times n \times i = 7000 \cdot 2 \cdot 0{,}1 = 1400 \text{ ден. ед.},$$

а сумма накопленного долга

$$S = P + I = 7000 + 1400 = 8400 \text{ ден. ед.}$$

Пример 3. Разница между двумя капиталами составляет 200 ден. ед. Капитал большего размера вложен на 3 года при ставке 8% годовых, а капитал меньшего размера — на 2 года при ставке 9% годовых. Сумма процентов за первый капитал в 4 раза больше суммы процентов за второй капитал. Найти величину капиталов.

◆ ◆ ◆

Пусть первый капитал равен K, тогда второй капитал равен $(K - 200)$. Так как $I_1 = 4I_2$, получаем равенство:

$$K \times 0{,}08 \times 3 = 4(K - 200) \times 0{,}09 \times 2,$$

$$0{,}24 \times K = 0{,}72 \times K - 144,$$

$$0{,}48 \times K = 144.$$

Если $K_1 = K = 300$, то $K_2 = 300 - 200 = 100$.

Первый капитал составляет 300 ден. ед., второй капитал равен 100 ден. ед.

Если срок, на который берутся деньги в долг, задан в днях, то наращенная сумма

$$S = P + I = P\,[1 + (\partial/K) \times i], \tag{1.2}$$

где ∂ — продолжительность периода в днях; K — расчетное число дней в году; $I = P\,(\partial/K) \times i$.

Величина K называется временной базой для расчета процентов. Она может быть равной фактической продолжительности года — 365 или 366 дней (точные проценты). Однако часто за базу измерения берут год, условно состоящий из 360 дней (12 месяцев по 30 дней). В этом случае вычисляют обыкновенные или коммерческие проценты. Соотношение между точными и обыкновенными процентами для одного и того же числа дней ссуды будет следующим:

$$K_т / K_о = 360/365 = 0{,}986301,$$

$$K_о / K_т = 365/360 = 1{,}013889,$$

где $K_т$ и $K_о$ — число дней для расчета точных и обыкновенных процентов.

Отсюда имеем взаимосвязь в расчетах по точным и приближенным процентам:

$$I_т = 0{,}986301\ I_о;\ \ I_о = 1{,}013889\ I_т\ .$$

Число дней в каждом месяце в течение срока долга также может браться точно или приближенно (30 дней). День выдачи и день погашения ссуды в расчетах принимаются за один день.

В мировой банковской системе используют следующие три варианта начисления процентов:

1. Обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды. Данный вариант используют в Германии, Дании, Швеции и называют германской практикой.

2. Обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды. Этот вариант распространен во Франции, Бельгии, Испании, Швейцарии и называется французской практикой.

3. Точный процент с точным числом дней ссуды. Данный вариант применяется в Англии, Португалии, США и называется английской практикой.

В России применяют все три варианта расчетов. Французская практика, как правило, используется в операциях коммерческих банков; германская — когда не требуется большая точность расчетов; английская — обычно применяется ЦБ при расчетах с банками-контрагентами.

Пример 4. Вклад 10 млн руб. был положен в банк 12 марта и востребован 25 декабря того же года. Ставка процентов составила 8% годовых. Определите сумму процентов при различных вариантах их начисления.

◆ ◆ ◆

1. По германской практике расчетное число дней для начисления процентов составит:

20 (март) + 8 · 30 + 25 (декабрь) − 1 (день выдачи денег в долг и день их возвращения считаются за один день) = 284.

Сумма начисленных процентов составит, млн руб.:

$$I = \frac{284}{360}\,0{,}08 \cdot 10 = 0{,}63111.$$

2. По французской практике расчетное число дней для начисления процентов будет равно:

$$20\text{ (март)} + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30 + 31 + 30 + 25 - 1 = 288.$$

Сумма начисленных процентов составит, млн руб.:

$$I = \frac{288}{360} 0{,}08 \cdot 10 = 0{,}64.$$

3. По английской практике сумма начисленных процентов составит, млн руб.:

$$I = \frac{288}{360} 0{,}08 \cdot 10 = 0{,}63124.$$

Как видим, в зависимости от использования конкретной практики начисления процентов сумма их будет различной. С точки зрения вкладчика банка предпочтительным является вариант с бóльшим значением процентных денег, т.е. французская практика, а с позиции банка — вариант германской практики, т.е. с меньшим значением процентных денег.

В банковской практике при расчете процентов используются понятия «процентное число» и «процентный ключ» (дивизор). В формуле (1.2) числитель и знаменатель разделим на i (в процентах) и получим:

$$I = \frac{P \times i \times \partial}{K \times 100} = \frac{P \times \partial}{K \times 100 / i} = \frac{P \times \partial}{D \times 100}, \qquad (1.3)$$

где $\frac{P \times \partial}{100}$ — процентное число; $D = K/i$ — процентный ключ, или дивизор.

Ясно, что процентный платеж, вычисляемый с использованием дивизора $365/i$, будет меньше, чем при дивизоре $360/i$. Поэтому при обслуживании конкретного заемщика всегда используется только один из дивизоров. В общей финансовой отчетности коммерческих банков записка 5 «Наращенные проценты» дает анализ процентов, накопленных на дату отчетности по ссудам и депозитам. Каждый раз, когда сумма на счете изменяется, рассчитывается процентное число за прошедший период, в течение которого она оставалась неизменной. Для определения суммы процентов за весь срок их начисления все процентные числа складываются и делятся на постоянный делитель — дивизор.

Пример 5. При открытии сберегательного счета по ставке 8% годовых 20 мая 1995 г. на счет была положена сумма 10 млн руб. Затем 5 июля на счет была добавлена сумма 15 млн руб., 10 сентября со счета снята сумма 20 млн руб., а 20 ноября счет был закрыт. Определите сумму начисленных процентов, используя при этом германскую практику.

◆ ◆ ◆

1. Рассчитаем срок хранения сумм:

10 млн руб. — 46 дней [12 (май) + 30 + 5 (июль) - 1].

10 + 15 = 25 млн руб. — 66 дней [27 (июль) + 30 + 10 (сентябрь) - 1].

25 - 20 = 5 млн руб. — 70 дней [21 (сентябрь) + 30 + 20 (ноябрь) - 1].

2. Рассчитаем сумму процентных чисел:

$$(10 \cdot 46 + 25 \cdot 66 + 5 \cdot 70) / 100 = 24{,}6.$$

3. Определим постоянный делитель:

$$360 : 8{,}0 = 45.$$

4. Рассчитаем сумму начисленных процентов, млн руб.:

$$24{,}6 : 45 = 0{,}547.$$

Данная методика по своей сути является последовательным применением формулы процентных денег на каждом интервале постоянства суммы на счете, т.е. $I = I_1 + I_2 + I_3$. Сумма начисленных процентов составит

$$I = \frac{46}{360} 0{,}08 \cdot 10 + \frac{66}{360} 0{,}08 \cdot 25 + \frac{70}{360} 0{,}08 \cdot 5 =$$

$$= 0{,}102 + 0{,}367 + 0{,}078 = 0{,}547 \text{ млн руб.}$$

Если ставка процентов на разных интервалах начисления в течение срока изменяется, то наращенную сумму можно определить по формуле

$$S = P\,(1 + n_1 \times i_1 + n_2 \times i_2 + \ldots + n_N \times i_N),$$

$$S = P\left(1 + \sum_{t=1}^{t=N} n_t \times i_t\right), \qquad (1.4)$$

где N — число интервалов начисления процентов; n_t — длительность t-го интервала начисления; i_t — простая ставка процентов на t-м интервале начисления.

Множитель наращения в данном случае будет иметь вид:

$$k_н = \sum_{t=1}^{t=N} n_t \times i_t .$$

Формула (1.1) связывает функциональной зависимостью четыре величины: S, P, n, i. Поэтому исходя из этой формулы можно определить:

а) срок долга (в годах или днях соответственно)

$$n = \frac{S-P}{P \times i} \text{ или } \partial = \frac{S-P}{P \times i}K; \qquad (1.5)$$

б) ставку процентов

$$i = \frac{S-P}{P \times n} \text{ или } i = \frac{S-P}{P \times \partial}K; \qquad (1.6)$$

в) первоначальную сумму долга

$$P = S / (1 + n \times i) \text{ или } P = S / (1 + \frac{\partial}{K} i). \qquad (1.7)$$

Последняя операция называется дисконтированием по простой ставке процентов (см. разд. 3.2.1).

Пример 6. На сколько лет должен быть вложен капитал A при 6% годовых, чтобы сумма процентов была равна тройной сумме капитала?

◆ ◆ ◆

Подставим в уравнение 3А = I имеющиеся данные: 3А = $A \times 0{,}06n$. Отсюда находим, что $n = 50$.

Таким образом, капитал должен быть положен на 50 лет.

Пример 7. За какое время капитал в размере 45 тыс. ден. ед., вложенный под 9% годовых ($K = 360$), увеличится на такую же сумму, что и капитал в 60 тыс. ден. ед., вложенный с 10.03 по 22.05 под 12% годовых ($K = 365$).

◆ ◆ ◆

Запишем $I_1 = I_2$. Подставим имеющиеся данные:

$$45 \cdot 0{,}9 \times \partial / 360 = (60 \cdot 73 \cdot 0{,}12) / 365; \; 0{,}1125\partial = 14{,}4.$$

Отсюда ∂=128, т.е. искомое время составит **128 дней**.

Пример 8. Вкладчик положил в банк 15 тыс.ден.ед. под 8% годовых на 9 месяцев. Какой доход он получит?

◆ ◆ ◆

9 месяцев — это 3/4 года. Доход вкладчика составит $I = 15 \cdot 0{,}08 \cdot 3/4 = 0{,}9$ тыс. ден. ед.

Пример 9. Банк принимает вклады по простой ставке процентов, которая в первый год составляет 40% годовых, а каждый последующий год увеличивается на 10 процентных пунктов. Определите размер вклада 500 тыс. руб. с процентами через 3 года.

◆ ◆ ◆

Используя формулу (1.4), рассчитаем наращенную сумму, тыс. руб.:

$$S = 500\,(1 + 0{,}4 \cdot 1 + 0{,}5 \cdot 1 + 0{,}6 \cdot 1) = 1250.$$

1.2. РАСЧЕТЫ ПРОСТЫХ ПРОЦЕНТОВ В УСЛОВИЯХ ИНФЛЯЦИИ

При начислении процентов может быть учтена инфляция — снижение покупательной способности денег. Инфляцию характеризуют два показателя: уровень инфляции и индекс инфляции. Уровень инфляции показывает, на сколько процентов изменяются цены за некоторый период времени, а индекс инфляции — во сколько раз выросли цены за период времени.

Уровень инфляции и индекс инфляции за один и тот же период связаны соотношением

$$I(\tau) = 1 + \tau \text{ или } \tau = I(\tau) - 1, \qquad (1.8)$$

где $I(\tau)$ — индекс инфляции; τ — уровень инфляции (десятичная дробь).

Ясно, что покупательная способность наращенной суммы с учетом инфляции $S(\tau)$ должна быть равна покупательной способности суммы S при отсутствии инфляции. Поэтому можно записать:

$$S(\tau) = S + \Delta S,$$

где ΔS — сумма, которая должна быть добавлена к сумме S для сохранения ее покупательной способности. При этом $\tau = \Delta S/S$.

Рассмотрим случай, когда ссуда в условиях инфляции выдается в начале года с последующим погашением в конце года. Предположим, что планируется реальная доходность ссудной операции в виде простой ставки процентов (r). За год ($n = 1$) наращенную сумму можно определить по формуле

$$S_r = P(1 + r).$$

Предположим, что задан годовой уровень инфляции $\tau_г$. Тогда

$$\Delta S_г = S_г \times \tau_г.$$

Отсюда

$$S(\tau) = S_г + S_г \times \tau_г = S_r (1 + \tau_г) = S_r \times I(\tau). \qquad (1.9)$$

В условиях инфляции погашаемая сумма за год должна составить

$$S(\tau) = S_г (1 + \tau_г) = P(1 + r)(1 + \tau_г). \qquad (1.10а)$$

В то же время

$$S(\tau) = \text{P}[1 + i(\tau)] = \text{P} \times k_н (\tau), \qquad (1.10б)$$

где $i(\tau)$ — простая ставка процентов при выдаче ссуды, учитывающая инфляцию; $k_н(\tau)$ — множитель наращения в условиях инфляции.

В результате имеем

$$P(1 + r)(1 + \tau_г) = P[1 + i(\tau)], \qquad (1.11)$$

$$k_н (\tau) = 1 + i(\tau) = (1 + r)(1 + \tau_г), \qquad (1.12)$$

$$k_н(\tau) = k_н \times I(\tau),$$

где $k_н$ — множитель наращения по реальной доходности операции. Отсюда получаем выражение для простой ставки процентов, учитывающей за год ожидаемый уровень инфляции:

$$i(\tau) = r + \tau_г + r \times \tau_г\,. \tag{1.13}$$

Оно носит название эффекта Фишера. Ставка процентов по кредитам со сроком менее года ($n < 1$) может быть определена по формуле

$$i(\tau) = r + \tau_г + n \times r \times \tau_г = r + \tau_г + \frac{\partial}{K} \times r \times \tau_г\,. \tag{1.14}$$

На практике часто используют рассчитанное по этой формуле приближенное значение ставки процентов по кредиту в условиях инфляции при заданных значениях реальной годовой ставки процентов и годового уровня инфляции:

$$i(\tau) \approx r + \tau_г\,. \tag{1.15}$$

Пример 10. Определите точное и приближенное значения ставки процентов по кредиту, выданному на год в условиях инфляции, если ожидаемый уровень инфляции составит 6%, а реальная доходность кредитной операции должна составить 8% годовых.

♦ ♦ ♦

1. Точное значение ставки процентов по кредиту

$$i(\tau) = 0{,}08 + 0{,}06 + 1 \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}06 = 0{,}1448.$$

2. Приближенное значение ставки процентов по кредиту

$$i(\tau) \approx 0{,}08 + 0{,}06 = 0{,}14.$$

Таким образом, точное значение ставки процентов по кредиту составит 14,48%, а приближенное 14%.

Погашаемую сумма с учетом инфляции при $n < 1$ можно определить по формуле

$$S(\tau) = P\,[1 + n \times i(\tau)] = P\,[1 + \frac{\partial}{K}\, i(\tau)]. \tag{1.16}$$

Другой способ расчета процентов по краткосрочным ссудам (т.е. при $n < 1$) в условиях инфляции заключается в задании уровня инфляции за интервал, меньший срока службы (например, месяц). В этом случае индекс инфляции за срок, включающий несколько таких периодов (например, квартал, полугодие, год), определяется по формуле

$$I(\tau) = (1 + \tau_t)^m, \qquad (1.17)$$

где τ_t — уровень инфляции за период t; m — количество периодов в течение рассматриваемого срока.

Пример 11. Определите ожидаемый годовой уровень инфляции при месячном уровне 6%.

♦ ♦ ♦

Рассчитаем индекс инфляции за год:

$$I(\tau) = (1 + 0{,}06)^{12} = 2{,}01.$$

Ожидаемый годовой уровень инфляции составит

$$\tau = 2{,}01 - 1 = 1{,}01 \ (101\%).$$

Учитывая формулу (1.17), можно получить выражение для расчета погашаемой суммы с учетом инфляции [6]:

$$S(\tau) = S_r\, I(\tau);$$

$$P\left[1 + \frac{m}{N} i(\tau)\right] = P\left(1 + \frac{m}{N} r\right)(1 + \tau_t)^m, \qquad (1.18)$$

где N — число интервалов в году, для которых задан уровень инфляции; τ_t — ожидаемый уровень инфляции за рассматриваемый интервал времени; m — интервалы по срокам выдачи ссуды. Отсюда

$$i(\tau) = \left[\left(1 + \frac{m}{N} r\right)(1 + \tau_t)^m - 1\right]\frac{N}{m}. \qquad (1.19)$$

При выдаче ссуды на год и заданном годовом уровне инфляции ($m = 1$; $N = 1$) выражение (1.19) сводится к выражению (1.13).

Пример 12. Определите ставку процентов при выдаче ссуды с учетом уровня инфляции 20% в месяц и погашаемую сумму для ссуды в размере 10 тыс. руб., выдаваемой на три месяца при требуемой реальной доходности операции 8% годовых.

♦ ♦ ♦

1. Индекс инфляции к концу года составит

$$I(\tau) = (1 + 0{,}2)^{12} = 8{,}916\ (891{,}6\%).$$

2. Годовой уровень инфляции

$$\tau = 8{,}916 - 1 = 7{,}916\ (791{,}6\%).$$

3. Ставка процентов при выдаче ссуды с учетом инфляции

$$i(\tau) = \frac{12}{3}\left[\left(1 + \frac{3}{12}0{,}08\right)(1 + 0{,}2)^3 - 1\right] = 3{,}05\ (305\%).$$

4. Погашаемая сумма при ставке процентов с учетом инфляции 305% годовых составит, млн руб.:

$$S(\tau) = 10(1 + \frac{3}{12}3{,}05) = 17{,}625.$$

Рассмотрим случай, когда при заданном годовом уровне инфляции ссуда выдается на срок больше года ($n > 1$).

Если n — целое число, то

$$S(\tau) = S(1 + \tau_г)^n, \qquad (1.20)$$

где $(1 + \tau_г)^n = I(\tau)$. Отсюда

$$P\,[1 + n \times i(\tau)] = P(1 + n \times r)(1 + \tau_г)^n,$$

$$i(\tau) = \frac{(1 + n \times r)(1 + \tau_г)^n - 1}{n}. \qquad (1.21)$$

Если срок ссуды в годах n не является целым числом, то значение $S(\tau)$ можно также определить по формуле (1.20), а ставку процентов при выдаче ссуды — по формуле (1.21) либо, задав, как и при $n < 1$, уровень инфляции для интервалов времени, меньших срока ссуды, использовать выражение (1.19).

Пример 13. Ссуда в размере 20 тыс. руб. выдана на 2,5 года. Прогнозируемый годовой уровень инфляции в течение этого срока оценивается в 9%. Определите ставку процентов при выдаче ссуды с учетом инфляции и погашаемую сумму, если требуемая реальная доходность операции составляет 10% годовых.

◆ ◆ ◆

1. Ставка процентов при выдаче ссуды с учетом инфляции, рассчитанной по формуле (1.21):

$$i(\tau) = \frac{(1+2{,}5\cdot 0{,}1)(1+0{,}09)^{2{,}5}-1}{2{,}5} = \frac{1{,}25\cdot 1{,}2404-1}{2{,}5} = \frac{0{,}5505}{2{,}5} = 0{,}220\ (22\%).$$

2. Ставка процентов при выдаче ссуды с учетом инфляции, рассчитанная по формуле (1.19):

$$i(\tau) = \frac{1}{2{,}5}\left[(1+\frac{2{,}5}{1}0{,}1)(1+0{,}09)^{2{,}5}-1\right] = 0{,}22\ (22\%).$$

3. Погашаемая сумма через 2,5 года с учетом инфляции составит, млн руб.:

$$S(\tau) = 20(1 + 2{,}5\cdot 0{,}22) = 31.$$

Предположим, что при выдаче ссуды задается ожидаемый индекс инфляции за весь срок ссуды. Тогда

$$P\,[1 + n\times i(\tau)] = P(1 + n\times r)\times I(\tau) = P(1 + \frac{\partial}{K} r)\times I(\tau).$$

Отсюда множитель наращения

$$k_н(\tau) = 1 + n\times i(\tau) = (1 + n\times r)\times I(\tau) = (1 + \frac{\partial}{K} r)\times I(\tau). \quad (1.22)$$

Из выражения (1.22) получим формулу для расчета простой ставки процентов при выдаче ссуды, если задан индекс инфляции за весь срок ссуды:

$$i(\tau) = \frac{k_н(\tau)-1}{n} = \frac{(1+n\times r)\times I(\tau)-1}{n} = \frac{(1+\frac{\partial}{K}r)\times I(\tau)-1}{\partial}K. \quad (1.23)$$

Формула (1.23) является универсальной для любых сроков ссуды и при ее использовании не требуется предположения о том, каким образом будет изменяться уровень инфляции в течение срока ссуды.

Пример 14. Ссуда в размере 40 тыс. руб. выдана на 320 дней. Реальная доходность операции по простой ставке процентов составит 8% годовых. Ожидается, что значение индекса инфляции за срок ссуды составит 1,5. Определите множитель наращения, ставку процентов при выдаче ссуды с учетом инфляции и погашаемую сумму, если K = 360 дней.

◆ ◆ ◆

1. Коэффициент наращения

$$k_н(\tau) = (1 + \frac{320}{360} 0{,}08)\ 1{,}5 = 1{,}607.$$

2. Ставка процентов с учетом инфляции

$$i(\tau) = \frac{1{,}607 - 1}{320} 360 = 0{,}683\ (68{,}3\%).$$

3. Погашаемая сумма, млн руб., рассчитанная по формуле (1.16),

$$S(\tau) = 40(1 + \frac{320}{360} 0{,}683) = 64{,}28$$

или по формуле (1.10)

$$S(\tau) = 40 \cdot 1{,}607 = 64{,}28.$$

Ясно, что инфляция влияет на реальную (с точки зрения покупательной способности) доходность вкладных и кредитных операций. Реальное значение суммы с начисленными процентами за некоторый срок, пересчитанное (приведенное) к моменту предоставления денег в долг,

$$P(\tau) = \frac{S}{I(\tau)}.$$

При использовании простых ставок процентов и одном периоде их начисления

$$P(\tau) = \frac{P(1 + n \times i)}{I(\tau)}. \tag{1.24}$$

Пример 15. Банк принимает депозиты на полгода по ставке 9% годовых. Определите реальные результаты вкладной операции для вклада размером 500 тыс. руб. при месячном уровне инфляции 8%.

◆ ◆ ◆

1. Сумма вклада с процентами на полгода (1/2года), тыс. руб.:

$$S = 500(1 + 0{,}5 \cdot 0{,}9) = 522{,}5.$$

2. Индекс инфляции за весь срок хранения депозита (6 месяцев):

$$I(\tau) = (1 + 0{,}08)^6 = 1{,}59\ (159\%).$$

3. Сумма вклада с начисленными процентами по своей покупательной способности с учетом инфляции будет соответствовать сумме, руб:

$$P(\tau) = 522500 : 1{,}59 = 328\ 616.$$

Таким образом, с учетом покупательной способности рубля наращенная сумма составит 328 616 руб.

1.3. ФИНАНСОВАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ПЛАТЕЖЕЙ

1.3.1. *Общие сведения*

В банковской практике нередко возникают ситуации, когда необходимо заменить одно финансовое обязательство другим (например, с более отдаленным сроком платежа) или объединить несколько обязательств в одно (консолидировать платежи). При этом возникает вопрос о принципе, согласно которому должны проводиться изменения условий соглашения. Подобным принципом является финансовая эквивалентность обязательств, которая предполагает неизменность финансовых отношений сторон до и после изменений условий платежей. Эквивалентными считают такие платежи, которые, будучи приведенными к одному и тому же моменту времени, окажутся равными. Принцип финансовой эквивалентности позволяет решать задачи по изменению условий сделок — объединению нескольких платежей в один, замене одного количества платежей другим, изменению сроков платежей, их размеров и т.д.

Общий метод решения подобных задач заключается в разработке так называемого уравнения эквивалентности, в котором сумма платежей, предусмотренных старым обязательством и приведенных к какому-либо моменту времени, приравнена к сумме платежа по новому обязательству, также приведенному к этому моменту времени.

1.3.2. Объединение нескольких платежей в один

Пусть необходимо объединить платежи с суммами S_1, $S_2,\ldots, S_m$ и сроками n_1, $n_2,\ldots,n_j,\ldots,n_m$ в один объединенный платеж с суммой $S_о$ и сроком $n_о$ на основе простой ставки процентов.

Сумма объединенного платежа будет равна:

$$S_о = \sum_{j=1}^{m} s_{oj}, \qquad (1.25)$$

где s_{oj} — сумма j-го платежа, приведенного к моменту времени $n_о$; $s_{oj} = s_j \times K_{пj}$; $K_{пj}$ — коэффициент приведения.

Рассмотрим следующие случаи:

1) $n_о > n_j$, где $n_о$ — срок объединенного платежа; n_j — срок j-го платежа.

Коэффициент приведения будет представлять собой множитель наращения и рассчитываться по формуле

$$K_{пj} = 1 + t_j \times i, \qquad (1.26)$$

где $t_j = n_о - n_j = \frac{д_о - д_j}{K}$; $д_о$ — дата объединения платежа; $д_j$ — дата j-го платежа;

2) $n_о < n_j$. Коэффициент приведения будет представлять собой коэффициент дисконтирования, определяемый по формуле

$$K_{пj} = \frac{1}{1 + t_j \times i}, \qquad (1.27)$$

где $t_j = n_j - n_о = \frac{д_j - д_о}{K}$;

3) $n_о = n_j$. В этом случае коэффициент приведения равен 1.

Пример 16. Платежи суммами в размере 150, 130, 120 тыс. руб. со сроками погашения 200, 250 и 100 дней от некоторой выбранной даты заменяются одним со сроком 300 дней от той же даты. Определите сумму нового объединенного платежа при простой ставке процентов 8% годовых и $K = 360$ дней.

◆ ◆ ◆

Так как $n_о > n_j$, то $д_о - д_1 = 100$, $д_о - д_2 = 50$ и $д_о - д_3 = 200$ дней.
Рассчитаем значения коэффициентов приведения:

$$K_{п1} = 1 + \frac{100}{360} 0{,}08 = 1{,}0222;$$

$$K_{п2} = 1 + \frac{50}{360} 0{,}08 = 1{,}0111;$$

$$K_{п3} = 1 + \frac{200}{360} 0{,}08 = 1{,}0444.$$

Сумма нового объединенного платежа, тыс. руб.:

$$S_о = 150 \cdot 1{,}0222 + 130 \cdot 1{,}0111 + 120 \cdot 1{,}0444 =$$

$$= 153{,}33 + 131{,}443 + 125{,}328 = 410{,}101.$$

Пример 17. Объединяются четыре платежа с суммами размером 20, 15, 10, 25 тыс. руб. со сроками 31.03, 15.05, 15.07 и 30.09. Срок объединения платежа 15.08 при простой ставке процентов 7% годовых и $K = 365$. Рассчитайте сумму объединенного платежа.

◆ ◆ ◆

Рассчитаем число дней от срока первоначального платежа до объединенного:

$д_о - д_1 = 137$ (дней) $(n_0 > n_1)$; $д_о - д_3 = 31$ (день) $(n_о > n_3)$;

$д_о - д_2 = 92$ (дня) $(n_0 > n_2)$; $д_4 - д_о = 46$ (дней) $(n_о < n_4)$.

Рассчитаем значения коэффициентов приведения:

$$K_{п1} = 1 + \frac{137}{365} 0{,}07 = 1{,}0263; \qquad K_{п3} = 1 + \frac{31}{365} 0{,}07 = 1{,}0059;$$

$$K_{п2} = 1 + \frac{92}{365} 0{,}07 = 1{,}0176; \qquad K_{п4} = (1 + 46 / 365)–1 \cdot 0{,}07 = 0{,}9913.$$

Сумма объединенного платежа, тыс. руб.:

$$S_о = 20 \cdot 1{,}0263 + 15 \cdot 1{,}0176 + 10 \cdot 1{,}0059 + 25 \cdot 0{,}9913 =$$
$$= 30{,}789 + 40{,}704 + 80{,}472 + 9{,}913 = 70{,}631.$$

1.3.3. Замена одного количества платежей на другое

Если число платежей по новым условиям больше одного, необходимо записать общее уравнение эквивалентности, в котором сумма платежей по старым условиям, приведенных по заданным процентной ставке и дате, приравнивается к сумме платежей по новым условиям, приведенных по тем же процентной ставке и дате.

Уравнение имеет вид:

$$\sum_{a=1}^{a=N_{\text{ст}}} S_{a\,(\text{ст})} \times K_{\text{п}a\,(\text{ст})} = \sum_{b=1}^{b=N_{\text{н}}} S_{b\,(\text{н})} \times K_{\text{п}a\,(\text{ст})}, \qquad (1.28)$$

где $S_{a\,(\text{ст})}$ $(a = 1,2,\ldots,N_{\text{ст}})$ — суммы платежей по старым условиям; $K_{\text{п}a(\text{ст})}$ — коэффициенты приведения платежей по старым условиям к заданной дате; $S_{b\,(\text{н})}$ $(b = 1,2,\ldots,N_{\text{н}})$ — суммы платежей по новым условиям; $K_{\text{п}b\,(\text{н})}$ — коэффициенты приведения платежей по новым условиям к той же заданной дате.

В качестве одной величины, характеризующей новые условия платежей при заданных прочих условиях, целесообразно принять сумму последнего платежа.

Представим уравнение (1.28) в следующем виде:

$$\sum_{a=1}^{a=N_{\text{ст}}} S_{a(\text{ст})} \times K_{\text{п}a\,(\text{ст})} = S_{N\,(\text{н})} \times K_{\text{п}N\,(\text{н})} + \sum_{b=1}^{b=N_{\text{н}}} S_{b(\text{н})} \times K_{\text{п}b\,(\text{н})}, \qquad (1.29)$$

где $S_{N\,(\text{н})}$ — сумма последнего платежа; $K_{\text{п}N(\text{н})}$ — коэффициент приведения последнего платежа к заданной дате.

Из (1.29) имеем

$$S_{N\,(\text{н})} = \frac{1}{K_{\text{п}N(\text{н})}} \left(\sum_{a=1}^{a=N_{\text{ст}}} S_{a(\text{ст})} \times K_{\text{п}a(\text{ст})} - \sum_{b=1}^{b=N_{\text{н}}-1} S_{b(\text{н})} \times K_{\text{п}b(\text{н})} \right). \qquad (1.30)$$

В частном случае одного объединенного платежа выражение (1.30) сводится к (1.25).

Пример 18. В примере 17 определены следующие новые условия платежей: 1.08 выплачиваются 50 тыс. руб., оставшийся долг выплачивается 15.10. Определите сумму последнего платежа для дат приведения 1.09 и 15.10.

◆ ◆ ◆

Случай 1. Рассчитаем число дней от срока первоначального платежа до объединенного:

$д_о - д_{1(ст)} = 154$ (дня); $д_{4(ст)} - д_о = 29$ (дней);

$д_о - д_{2(ст)} = 109$ (дней); $д_о - д_{1(н)} = 31$ (день);

$д_о - д_{3(ст)} = 48$ (дней); $д_{2(н)} - д_о = 44$ (дня);

Определим значения коэффициентов приведения:

$$K_{1(ст)} = 1 + \frac{154}{365}0{,}07 = 1{,}0295; \qquad K_{4(ст)} = (1 + \frac{29}{365}0{,}07)^{-1} = 0{,}9945;$$

$$K_{2(ст)} = 1 + \frac{109}{365}0{,}07 = 1{,}0209; \qquad K_{1(н)} = 1 + \frac{31}{365}0{,}07 = 1{,}0059;$$

$$K_{3(ст)} = 1 + \frac{48}{365}0{,}07 = 1{,}0092; \qquad K_{2(н)} = (1 + \frac{44}{365}0{,}07)^{-1} = 0{,}9916.$$

Рассчитаем сумму последнего платежа, тыс. руб.:

$$S_{2(н)} = \frac{1}{0{,}9916}(20 \cdot 1{,}0295 + 15 \cdot 1{,}0209 + 10 \cdot 1{,}0092 + 25 \cdot 0{,}9945 - 50 \cdot 1{,}0059) = 20{,}737.$$

Случай 2. Рассчитаем число дней от срока первоначального платежа до объединенного:

$д_о - д_{1(ст)} = 198$ (дней); $д_о - д_{4(ст)} = 15$ (дней);

$д_о - д_{2(ст)} = 153$ (дня); $д_о - д_{1(н)} = 75$ (дней);

$д_о - д_{3(ст)} = 92$ (дня); $д_о - д_{2(н)} = 0$ (дней).

Определим значения коэффициентов приведения:

$$K_{1(ст)} = 1 + \frac{198}{365}0{,}07 = 1{,}038; \qquad K_{4(ст)} = 1 + \frac{15}{365}0{,}07 = 1{,}0029;$$

$$K_{2(ст)} = 1 + \frac{153}{365}0{,}07 = 1{,}0293; \qquad K_{1(н)} = 1 + \frac{75}{365}0{,}07 = 1{,}0144;$$

$$K_{3(ст)} = 1 + \frac{92}{365}0{,}07 = 1{,}0176; \qquad K_{2(н)} = 1.$$

Рассчитаем сумму последнего платежа, тыс. руб.:

$$S_{2(н)} = 20 \cdot 1{,}038 + 15 \cdot 1{,}0293 + 10 \cdot 1{,}0176 + 25 \cdot 1{,}0029 - 50 \cdot 1{,}0144 = 20{,}729.$$

Из расчетов видно, что изменение даты приведения приводит к некоторому изменению суммы последнего платежа (в первом случае он равен 20,737 тыс. руб., а во втором случае — 20,729 тыс. руб.).

1.3.4. Средний срок погашения ссуды одному кредитору

Предположим, что заемщик должен m сумм: P_1, P_2,...,P_m, погашаемых после ∂_1, ∂_2,..., ∂_m дней, т.е. в разные сроки, с процентными ставками i_1, i_2,...,i_m. Заемщику было бы выгодно заплатить весь долг сразу, но кредитор на это соглашается только при условии, что он не потерпит в данном случае ущерба.

Пусть все долги могут быть выплачены через ∂ дней. Этот срок называют средним сроком погашения ссуды. Для его расчета пользуются следующим определением: сумма процентов, начисленных на m ссуд при начальных условиях, равна одному процентному платежу, начисленному на сумму ссуд при средних значениях процентной ставки $\bar{i}_n$ и срока $\bar{\partial}$ дней.

Исходя из этого запишем:

$$\frac{P_1 \times i_1 \times \partial_1}{360} + \frac{P_2 \times i_2 \times \partial_2}{360} + \ldots + \frac{P_m \times i_m \times \partial_m}{360} =$$

$$= \frac{(P_1 + P_2 + \ldots + P_m)\ \bar{i} \times \bar{\partial}}{360}. \qquad (1.31)$$

Рассмотрим следующие случаи:

1. Ссуды, полученные в разные сроки, имеют одинаковую величину и даны под одинаковые процентные ставки:

$$P_1 = P_2 = \ldots = P_m = P; \ i_1 = i_2 = \ldots = i_m = i;$$

Выражение (1.31) имеет вид:

$$\frac{P_1 \times i_1 \times \partial_1}{360} + \frac{P_2 \times i_2 \times \partial_2}{360} + \ldots + \frac{P_m \times i_m \times \partial_m}{360} = \frac{P \times m \times i \times \bar{\partial}}{360}.$$

Отсюда $\bar{\partial} = \dfrac{\partial_1 + \partial_2 + \ldots + \partial_m}{m} = \dfrac{\sum_{l=1}^{m} \partial_l}{m}$. (1.32)

2. Ссуды различной величины выданы на разные сроки, но процентные ставки одинаковы: $i_1 = i_2 = \ldots = i_m = i$. При этом

$$\frac{P_1 \times i_1 \times \partial_1}{360} + \frac{P_2 \times i_2 \times \partial_2}{360} + \ldots + \frac{P_m \times i_m \times \partial_m}{360} =$$

$$= \frac{(P_1 + P_2 + \ldots + P_m)\, i \times \bar{\partial}}{360}.$$

Отсюда

$$\bar{\partial} = \frac{(P_1 \times \partial_1 + P_2 \times \partial_2 + \ldots + P_l \times \partial_l + \ldots + P_m \times \partial_m)}{P_1 + P_2 + \ldots + P_m} = \frac{\sum_{l=1}^{m} P_l \times \partial_l}{\sum_{l=1}^{m} P_l}. \quad (1.33)$$

3. Ссуды различной величины выданы на неравные сроки и под разные процентные ставки:

$$\frac{P_1 \times i_1 \times \partial_1}{360} + \frac{P_2 \times i_2 \times \partial_2}{360} + \ldots + \frac{P_m \times i_m \times \partial_m}{360} =$$

$$= \frac{(P_1 + P_2 + \ldots + P_m)\, \bar{i} \times \bar{\partial}}{360}.$$

Отсюда

$$\bar{\partial} = \frac{P_1 \times i_1 \times \partial_1 + P_2 \times i_2 \times \partial_2 + \ldots + P_l \times i_l \times \partial_l + \ldots + P_m \times i_m \times \partial_m}{(P_1 + P_2 + \ldots + P_m)\,\bar{i}} =$$

$$= \frac{\sum_{l=1}^{m} P_l \times i_l \times \partial_l}{\sum_{l=1}^{m} P_l \times \bar{i}}. \qquad (1.34)$$

Если рассчитать $\bar{i}$ по формуле

$$\bar{i} = \frac{P_1 \times \partial_1 + P_2 \times \partial_2 + \ldots + P_l \times \partial_l + \ldots + P_m \times \partial_m}{P_1 + P_2 + \ldots + P_m}$$

тогда средний срок погашения ссуды

$$\bar{\partial} = \frac{P_1 \times i_1 \times \partial_1 + P_2 \times i_2 \times \partial_2 + \ldots + P_m \times i_m \times \partial_m}{P_1 \times i_1 + P_2 \times i_2 + \ldots + P_m \times i_m} = \frac{\sum_{l=1}^{m} P_l \times i_l \times \partial_l}{\sum_{l=1}^{m} P_l \times i_l}. \qquad (1.35)$$

Для определения календарного дня одновременного погашения всех займов необходимо средний срок погашения ссуды, вычисленный по одной из трех приведенных выше моделей, прибавить к дню первого планового платежа. При расчетах также следует определить число дней между плановыми платежами. Рассмотрим это на примере.

Пример 19. Заемщик должен кредитору три различные суммы: 1000, 2000 и 5000 ден. ед. со сроками погашения соответственно 11.03, 20.04 и 6.05. Процентная ставка составляет 12% годовых. Когда лучше выплатить весь долг, чтобы при этом не понес ущерба ни кредитор, ни заемщик?

♦ ♦ ♦

Составим таблицу для расчета среднего срока погашения ссуды.

Сумма кредита (P)	Срок погашения	Число дней между плановыми показателями (∂)	$P \times \partial$
1000	11.03	0	0
2000	20.04	40	80000
5000	6.05	56	280000
Всего: 8000	25.04	45	360000

Средний срок погашения ссуды

$$\bar{\partial} = \frac{P_1 \times \partial_1 + P_2 \times \partial_2 + P_3 \times \partial_3}{P_1 + P_2 + P_3} = \frac{360000}{8000} = 45 \text{ дней.}$$

Срок погашения ссуды

$$11(03) + 45 = 25(04).$$

Таким образом, выплата долга должна быть назначена на 25 апреля.

1.4. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что такое проценты (процентные деньги)?

2. В чем особенность начисления процентов при использовании простых ставок?

3. Как определяются наращенная сумма и коэффициент наращения при использовании простых ставок процентов?

4. Какими показателями характеризуется инфляция?

5. В каких случаях проводятся расчеты, связанные с финансовой эквивалентностью платежей?

6. Каков финансовый смысл коэффициентов приведения?

7. Укажите экономический смысл величин, входящих в формулы для определения: суммы объединенного платежа; суммы последнего платежа при нескольких платежах по новым условиям контракта; среднего срока погашения ссуды одному заемщику.

8. Как определить в условиях инфляции реальную доходность вкладной операции и ставку процентов по кредитам?

9. Банк принимает вклады до востребования по простой ставке 12% годовых. Определите сумму процентов на вклад 100 тыс. руб., размещенный на квартал.

10. При открытии сберегательного счета по ставке 11% годовых 16 апреля на счет была положена сумма 200 тыс. руб. Затем 5 мая на счет была добавлена сумма 140 тыс. руб., 15 августа со счета была снята сумма 120 тыс. руб., а 10 сентября счет был закрыт. Определите сумму начисленных процентов (двумя способами).

11. Вклад 100 тыс. руб. был положен в банк 25 августа по ставке 9% годовых. С 1 сентября банк снизил ставку по вкладам до 7% годовых, а 20 ноября вклад был востребован. Определите сумму начисленных процентов по французской практике их начисления.

12. Определите ожидаемый годовой уровень инфляции при месячных уровнях инфляции 2 и 12%.

13. Банк принимает депозиты по ставке 9% годовых. Определите реальные результаты вкладной операции для вклада 12 млн руб. при месячном уровне инфляции 8%.

14. Определите точное и приближенное значения ставки процентов по кредиту, выдаваемому на год в условиях инфляции, если ожидаемый годовой уровень инфляции составляет 7%, а реальная доходность кредитной операции должна составлять 8% годовых.

15. Сберегательный банк принимает вклад 500 тыс. руб. на срок 3 месяца с объявленной годовой ставкой 6% или на 6 месяцев под 7%. Какой вариант вкладчику более выгоден?

16. Ссуда 20 тыс. руб. выдана 12.04 до 20.12 включительно под 7% годовых. Определите размер суммы процентов по различным практикам расчетов.

17. Контракт на выдачу ссуды 10 тыс. руб. составлен на 3,5 года. Ставка процентов определена следующим образом: первый год 6%, в каждом последующем полугодии ставка увеличивается на 0,5%. Определите множитель наращения и погашаемую сумму.

18. Определите срок ссуды в годах, за который долг, равный 20 тыс. руб., вырастет до 45 тыс. руб.при простой ставке процентов 8% годовых.

19. Определите срок ссуды в днях, за который долг 12 тыс. руб. вырастет до 20 тыс. руб. при ставке процентов 7% годовых ($K = 365$).

20. Контракт на выдачу ссуды предусматривает погашение долга в сумме 45 тыс. руб. через 100 дней. Первоначальная сумма равна 42 тыс. руб. Определите ставку процентов при $K = 365$.

21. По прогнозным оценкам уровень инфляции за год составит 24% годовых. Определите ожидаемый индекс инфляции.

22. Ожидается, что цены за год вырастут в 5 раз. Определите ожидаемый годовой уровень инфляции.

23. Ссуда 10 тыс. руб. выдана в начале года с погашением в конце года. Требуемая реальная доходность операции составляет 9% годовых, ожидаемый годовой уровень инфляции составит 24% годовых. Определите: множитель наращения с поправкой на инфляцию; простую ставку процентов, учитывающую инфляцию; погашаемую сумму с учетом инфляции; сумму с учетом покупательной способности денег.

24. Ссуда 15 тыс. руб. выдана на 1,5 года. По оценке специалистов годовой уровень инфляции в течение этого срока 48% годовых. Оцените ставку процентов при выдаче ссуды с учетом инфляции и погашаемую сумму, если требуемая реальная доходность операции 12% годовых.

25. Определите ставку процентов при выдаче ссуды с учетом уровня инфляции 5% в месяц и погашаемую сумму для ссуды размером 5 тыс. руб., выдаваемой на 4 месяца при требуемой реальной доходности 10% годовых.

26. Ссуда 12 тыс. руб. выдана на 150 дней. Реальная доходность операции по простой ставке процентов составляет 5% годовых. Ожидается, что значение индекса инфляции за срок ссуды составит 1,5. Определите при $K = 365$ дней:

множитель наращения;

ставку процентов при выдаче ссуды с учетом инфляции;

погашаемую сумму.

27. Определите срок ссуды в годах, за который долг в 25 тыс. руб. возрастет до 115 тыс. руб. при использовании простой ставки процентов 11% годовых.

28. При выдаче кредита 350 тыс. руб. оговорено, что заемщик вернет через 1,5 года 900 тыс. руб. Определите используемую банком величину процентной ставки.

29. Ссуда 500 тыс. руб. выдана на 150 дней. Ожидаемый годовой уровень инфляции составляет 8%. Определите простую ставку процентов при выдаче ссуды и погашаемую сумму, если реальная доходность операции составит 12% годовых при временной базе 365 дней.

30. Банк принимает депозиты от 100 тыс. руб. и выше на 3 месяца по ставке 4% годовых, на 6 месяцев по ставке 5% годовых и на 1 год по ставке 7% годовых. Определите сумму, которую получит владелец вклада 150 тыс. руб. во всех трех случаях.

31. Определите погашаемую сумму для ссуды 1 тыс. руб., выданной с 10 мая по 10 июля по простой ставке процентов 8% годовых, используя германскую практику расчета.

32. Вкладчик, решивший положить на депозит 450 тыс. руб., хочет через полтора года получить не менее 500 тыс. руб. Определите простую ставку процентов, на основании которой вкладчик может сделать выбор банка для помещения своих средств.

33. Вкладчик хочет положить деньги в банк с целью получения через 2 года 1 тыс. руб. Банк начисляет проценты на вклады по простой ставке 7,5% годовых. Определите требуемую сумму вклада.

34. Ссуда 150 тыс. руб. выдана на год. Требуемая реальная доходность операции 8% годовых, ожидаемый годовой уровень инфляции 16%. Определите: ставку процентов при выдаче ссуды с учетом инфляции; погашаемую сумму.

35. Контракт составлен на 2,5 года. Ставка процентов определена следующим образом: первый год 7,5%, в каждом последующем полугодии ставка увеличивается на 0,5%. Определите множитель наращения за весь срок ссуды.

36. Определите срок ссуды в днях, за который долг 200 тыс. руб. вырастет до 380 тыс. руб. при ставке процентов 7% годовых (K = 365).

37. Контракт на выдачу ссуды предусматривает погашение долга в сумме 20 тыс. руб. через 10 дней. Первоначальная сумма долга 19,8 тыс. руб. Определите ставку процентов при K = 360 дней.

38. При уровне инфляции 5% в месяц банк выдает ссуду 1,5 млн руб. на 100 дней (K = 360). Простая процентная ставка равна 12% в год. Определите: процентную ставку, учитывающую инфляцию; сумму погасительного платежа.

39. Ссуда 110 тыс. руб. выдана 15.01 на срок до 15.08 включительно под 6% годовых. Определите размер погасительного платежа по английской практике начисления процентов.

40. При уровне инфляции 7% в месяц банк выдает ссуду 500 тыс. руб. на 40 дней (временная база 360 дней). Простая процентная ставка 6% годовых. Определите: процентную ставку, учитывающую инфляцию; сумму погасительного платежа.

41. Ссуда 100 тыс. руб. выдана 5.06 на срок по 20.10 включительно по германской практике. Размер погасительного платежа должен составить 110 тыс. руб. Под какой процент выдана ссуда?

42. При уровне инфляции 12% банк выдает ссуду 45 тыс. руб. на 8 дней (K= 360 дней) под простую процентную ставку 8% годовых. Определите: процентную ставку, учитывающую инфляцию; сумму погасительного платежа.

43. Ссуда 10 тыс. руб. выдана на 2 года. Простая ставка процентов в первый год составила 8%, а затем поквартально увеличивалась на 5%. Определите размер погасительного платежа.

44. Кредит 500 тыс. руб. был взят банком 12 мая со сроком погашения 15 июля по ставке 6% годовых. Определите сумму процентов за кредит при германской и английской практиках их начисления. Сделайте вывод.

45. Ставка процентов банка по вкладам до востребования, составлявшая в начале года 11% годовых, через 6 месяцев была уменьшена до 9%, а еще через 3 месяца — до 8% годовых. Определите сумму процентов, которая была начислена на вклад 500 тыс. руб. за год.

46. Банк принимает депозиты на 3 месяца по ставке 4% годовых, на 6 месяцев по ставке 5% годовых и на год по ставке 7% годовых. Определите сумму, которую получит владелец депозита 600 тыс. руб. во всех трех случаях. Сделайте вывод.

47. За срок займа сумма обыкновенных процентов по банковскому векселю составила 150 тыс. руб. Определите при условии, что год високосный, сумму точных процентов, используя прямое и обратное соотношения обыкновенных и точных процентов.

48. Вклад 500 тыс. руб. был размещен в банке 11 июля по ставке 8% годовых. При востребовании вклада 22 сентября вкладчику были начислены проценты в размере 110 тыс. руб. Определите, какую практику начисления процентов использовал банк.

49. Вкладчик собирается положить в банк 500 тыс. руб., чтобы накопить 1 млн руб. Ставка процентов банка составляет 6% годовых. Определите срок, за который вкладчик сможет накопить требуемую сумму (K = 360).

50. Вкладчик, решивший положить на депозит 450 тыс. руб., хочет накопить через год не менее 500 тыс. руб. Определите ставку процентов, на основании которой он может выбрать подходящий для этой цели банк.

51. Вкладчик собирается положить в банк деньги с целью накопления через 9 месяцев суммы 500 тыс. руб. Банк начисляет проценты по ставке 7% годовых. Определите требуемую сумму вклада.

52. Вкладчиком 5 июля была положена в банк сумма вклада 2 тыс. руб. под 7% годовых. Затем на счет была добавлена сумма 500 руб., 5 сентября со счета снята сумма 800 руб., а 6 ноября счет был закрыт. Определите сумму начисленных процентов, используя при этом французскую практику расчета. Решите задачу двумя способами.

53. Платежи суммами 160, 110, 185 тыс. руб. и со сроками погашения 120, 200, 60 дней от некоторой выбранной даты замещаются другими платежами со сроком 250 дней от той же даты. Определите сумму нового объединенного платежа при простой ставке процентов 7% годовых и $K = 365$ дней.

54. Объединяются три платежа с суммами 6, 8, 4 тыс. руб. и сроками платежей 20.04, 5.06, 24.09. Срок объединения платежа 15.08. Определите сумму объединенного платежа при простой ставке процентов 7% годовых и временной базе, равной $K = 360$ дням.

55. По условию задачи 54 определите новые условия платежей: 1.07 выплачивается 7 тыс. руб., оставшийся долг выплачивается 30.09. Определите сумму последнего платежа для дат приведения 1.09 и 30.09.

56. Заемщик должен кредитору следующие суммы: 100, 120, 80 тыс. руб. со сроками погашения 11.08, 4.09 и 18.10 соответственно. Процентная ставка составляет 6% годовых. Установите, когда лучше выплатить весь долг, чтобы при этом не понес ущерба ни кредитор, ни заемщик?

57. За какое время капитал величиной 5,6 тыс. руб., вложенный под 6% годовых ($K = 365$), увеличится на такую же сумму, что и вклад 7 тыс. руб., внесенный с 5.01 по 20.04 под 8% годовых ($K = 360$).

ГЛАВА 2

СЛОЖНЫЕ ПРОЦЕНТЫ

2.1. СУЩНОСТЬ СЛОЖНЫХ ПРОЦЕНТОВ И ПРИМЕРЫ ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ В БАНКОВСКОЙ ПРАКТИКЕ

2.1.1. Общие сведения

В краткосрочных финансовых операциях обычно рассматривают простые проценты. Долгосрочные же операции, как правило, базируются на сложных процентах. В отличие от простых процентов, когда процентный платеж вычисляется с одной и той же величины капитала в течение всего времени расчетов, при сложных процентах он в каждом расчетном периоде добавляется к капиталу предыдущего периода, а в последующем периоде процентный платеж вычисляется уже с этой наращенной величины первоначального капитала. В соответствии с этим наращение первоначальной суммы происходит с ускорением. Примером увеличения капитала по сложным процентам может быть реинвестирование (повторное вложение) средств, размещенных под простые проценты на один период начисления. Способ расчета платежей по сложным процентам иногда называют вычислением процента на процент.

Если процентный платеж начисляется и добавляется к величине капитала в конце каждого года, то говорят, что капитализация (начисление процентного платежа) является годовой и обозначается Pa — per anum. Если процентный платеж начисляется и добавляется к величине капитала каждые шесть месяцев, то это называется полугодовой капитализацией и обозначается Ps — per semestre. Начисление сложных процентов и их капитализация каждые три месяца обозначается Pq — per quatrure, а каждый месяц Pm — per mensem.

Существует два способа начисления сложных процентов: антисипативный (предварительный) и декурсивный (последующий). Начисление процентного платежа в начале каждого расчетного периода называется антисипативным, а в конце каждого расчетного периода — декурсивным. Именно декурсивное начисление процентов наиболее распространено в мировой практике.

В финансовых расчетах применяют так называемые дискретные проценты, т.е. проценты, начисляемые за фиксированные одинаковые интервалы времени (год, полугодие, квартал и т.д.). В некоторых случаях (в доказательствах и расчетах, связанных с непрерывными процессами, в общих теоретических построениях, а иногда и на практике) возникает необходимость в применении непрерывных процентов. В этом случае проценты начисляются за бесконечно малые промежутки времени.

2.1.2. Декурсивный расчет сложных процентов

Рассмотрим различные условия определения наращенной суммы с использованием декурсивного расчета.

Условие 1. Проценты начисляются и капитализируются один раз в год (годовые проценты). Величину первоначального капитала, на которую рассчитывают процент, называют первоначальной (текущей) стоимостью и обозначают P. Ставку сложных процентов обозначают i, а число лет наращения — n. Стоимость, полученную в результате увеличения первоначального капитала, вложенного под сложные проценты, называют конечной (наращенной) и обозначают S. В конце первого года наращенная сумма составит величину:

$$S_1 = P + P \times i = P(1 + i).$$

К концу второго года она достигнет величины:

$$S_2 = P(1 + i) + P(1 + i)\, i = P(1 + i)^2.$$

Таким образом, рост по сложным процентам представляет собой процесс, развивающийся по геометрической прогрессии, первый член которой равен P, а знаменатель — $(1 + i)$. В конце n-го года наращенная сумма (последний член прогрессии)

$$S = P(1 + i)^n, \qquad (2.1)$$

где $(1 + i)$ — сложный декурсивный коэффициент; $(1 + i)^n$ — множитель наращения.

Так как в финансовых вычислениях конечным результатом является денежная сумма, то можно сказать, что экономический смысл сложного декурсивного коэффициента заключается в том, что он равен стоимости одной денежной единицы, увеличенной на процентный платеж в конце одного расчетного периода при ставке сложных процентов i. Множитель наращения показывает конечную стоимость одной денежной единицы, вложенной под сложные проценты декурсивно.

При большом числе периодов рост по сложным процентам приводит к «устрашающим» результатам. Например, сумма 1000 ден. ед. при 100% годовых через 5 и 10 лет увеличится до соответственно 32 000 и 1024 000 ден. ед. [см. формулу (2.1)], в то время как по простым процентам будут получены суммы 6000 и 11 000 ден. ед. [см. формулу (1.1)].

Условие 2. Если срок ссуды в годах n не является целым числом, то множитель наращения может быть определен двумя способами. При первом способе используется формула (2.1) с соответствующим целым показателем, при втором способе (смешанный метод) множитель наращения может быть определен по формуле

$$S = P(1 + i)^{n(a)} [1 + n(b) \times i], \tag{2.2}$$

где $n = n(a) + n(b)$; $n(a)$ — целое число лет; $n(b)$ — оставшаяся дробная часть года.

С точки зрения сущности начисления процентов смешанный метод является точным, а первый — приближенным, дающим меньшую величину множителя наращения.

Пример 20. Первоначальная сумма долга равна 10 тыс. руб. Определите сумму долга через 2,5 года, используя два способа расчета начисления сложных процентов по ставке 10% годовых.

◆ ◆ ◆

1. При расчете первым способом по формуле (2.1)

$$S_1 = 10\ (1 + 0,1)^{2,5} = 12,691.$$

2. При расчете вторым способом по формуле (2.2)

$$S_2 = 10\ (1 + 0,1)^2 (1 + 0,5 \cdot 0,1) = 12,705.$$

Как видим, наращенная сумма, исчисленная смешанным способом, на 0,014 тыс. руб. выше, так как множитель наращения в ней больше.

Условие 3. Предположим, что уровень ставки сложных процентов изменяется в течение срока ссуды. Наращенная сумма в конце первого периода начисления

$$S_1 = P(1 + n_1 \times i_1),$$

где n_1 — величина первого периода начисления в годах; i_1 — годовая ставка процентов в первом периоде начисления.

В конце второго периода начисления наращенная сумма

$$S_2 = S_1 (1 + n_2 \times i_2) = P(1 + n_1 \times i_1)(1 + n_2 \times i_2).$$

Если в течение срока ссуды будет N периодов начисления, то наращенная сумма в конечном итоге составит

$$S_N = \mathrm{P} \prod_{t=1}^{t=N} (1 + n_t i_t) = P \times k_н, \qquad (2.3)$$

где $k_н = \prod_{t=1}^{t=N} (1 + n_t \times i_t)$ — множитель наращения.

Заметим, что если все периоды начисления одинаковы и наращение производится по одной и той же ставке сложных процентов, то формула (2.3) примет вид:

$$S_N = P(1 + n \times i)^N. \qquad (2.4)$$

Условие 4. Если в качестве периода начисления берется год (n=1), то формула (2.4) сводится к рассматриваемой ранее формуле (2.1).

Пример 21. Ссуда 2 тыс. руб. выдана на 2,5 года. Ставка сложных процентов в течение срока ссуды определяется следующим образом: за первые полгода она составляет 8% годовых, затем через каждые полгода увеличивается на 1% годовых. Определите множитель наращения и наращенную сумму.

♦ ♦ ♦

1. Найдем коэффициент наращения по формуле (2.3):

$$k_н = (1 + 0{,}5 \times 0{,}08)(1 + 0{,}5 \times 0{,}09)(1 + 0{,}5 \times 0{,}1)(1 + 0{,}5 \times 0{,}11)(1 + 0{,}5 \times 0{,}12) = 1{,}2761.$$

2. Наращенная сумма составит, тыс. руб.:

$$S = P \times k_{\text{н}} = 2 \cdot 1{,}2761 = 2{,}552.$$

Проведем сравнительный анализ графиков роста вклада по простым и сложным процентам.

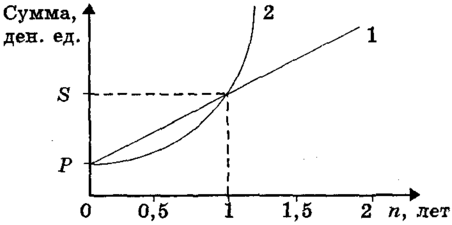

Рис. 1. Определение наращенной суммы по простым (кривая *1*) и сложным (кривая *2*) процентам

Сопоставление результатов наращения сумм по простым и сложным процентам позволяет сделать важные в практическом отношении выводы:

1. Если $n > 1$, то $(1 + n \times i) < (1 + i)^n$. Отсюда $S_{\text{пр}} < S_{\text{сл}}$.
2. Если $n = 1$, то $(1 + n \times i) = (1 + i)^n$. Отсюда $S_{\text{пр}} = S_{\text{сл}}$.
3. Если $n < 1$, то $(1 + n \times i) > (1 + i)^n$. Отсюда $S_{\text{пр}} > S_{\text{сл}}$.

Здесь n — число периодов начисления процентов. Докажем правильность сделанных выводов на конкретном примере.

Пример 22. *Первоначальная сумма долга равна 2 тыс. руб. Определите сумму долга через 2 года при использовании простой и сложной ставок процентов в размере 7% годовых.*

♦ ♦ ♦

1. При использовании простой ставки процентов [см. формулу (1.1)] наращенная сумма составит, тыс. руб.:

$$S = 2(1 + 2 \cdot 0{,}07) = 2{,}28.$$

2. При использовании сложной ставки процентов наращенная сумма [см. формулу (2.1)] составит, тыс. руб.:

$$S = 2(1 + 0{,}07)^2 = 2{,}29.$$

Как видим, наращенная сумма при начислении сложных процентов для срока более 1 года выше, чем при простых процентах на 0,01 тыс. руб.

2.1.3. Расчеты срока и процентной ставки предоставления ссуды

По основной формуле расчета наращенной суммы с использованием сложных процентов (2.1) можно рассчитать срок и другие входящие в данную формулу показатели.

1. Срок ссуды можно определить по формуле

$$n = \frac{\log_a(S / P)}{\log_a(1+i)}, \qquad (2.5)$$

где $a \in (0;\ 1) \cup (1;\ \infty)$. Логарифмы могут браться с любыми равными основаниями, например десятичными.

2. Определение ставки сложных процентов производится по формуле:

$$i = \sqrt[n]{S / P} - 1. \qquad (2.6)$$

Приведем примеры использования в расчетах указанных выше формул.

Пример 23. Банк начисляет на валютные вклады сложные проценты по ставке 12% годовых. Определите срок в годах, за который сумма вклада 25 тыс. руб. вырастет до 40 тыс. руб.

◆ ◆ ◆

По формуле (2.5) находим

$$n = \frac{\lg(40 / 25)}{\lg(1+0{,}12)} = 4{,}15.$$

Таким образом, сумма вклада увеличится до 40 тыс. руб. за 4,15 года.

Пример 24. Сумма долга удвоилась за 3 года. Определите использованную при этом ставку сложных процентов.

◆ ◆ ◆

Для расчета процентной ставки используем формулу (2.6):

$$i = \sqrt[3]{2} - 1 = 0{,}25.$$

При заданных условиях ставка составила 0,25 или 25% годовых.

В практике довольно часто возникает потребность исчисления уровня годовой процентной ставки, которая обеспечивает в рамках заданного периода равнозначность наращенных стоимостей. Этот критерий нормы доходности должен служить экономисту инструментом для оценки того или иного хозяйственного решения в сравнении с другими способами помещения средств в деловой оборот. Поясним сказанное на реальном примере.

П р и м е р 2 5. Промышленно-финансовая компания Российской продовольственной биржи объявила в 1993 г. о привлечении ею свободных денежных средств населения и юридических лиц на условиях, указанных в таблице.

Срок хранения вклада, лет	Сумма вклада, руб.	Годовой процент по векселю	Увеличение вклада за срок размещения
...	...	...	...
1	Не менее 50000	250	В 3,5 раза
...	...	...	...
...	...	...	...
10	Не менее 50000	1000	В 101 раз

Не усложняя данную ситуацию возможным финансовым риском от данной операции, поставим вопрос: что с точки зрения уровня доходности выгодней — размещать временно свободные денежные средства сроком на один год или на 10 лет?

◆ ◆ ◆

Чтобы ответить на этот вопрос, рассчитаем годовую процентную ставку [см. формулу (2.6)]. При 10-летнем сроке размещения вклада имеем

$$i = \sqrt[10]{\frac{50000 \cdot 101}{50000}} - 1 = \sqrt[10]{101} - 1 = 1{,}586 - 1 = 0{,}586 \ (58{,}6\%).$$

При годовом размещении эта ставка составит 250% (см. таблицу). Как видим, норма доходности от годового вложения средств в несколько раз эффективней разового вложения на 10-летний срок, а с учетом факторов финансового риска и инфляции целесообразность долгосрочного размещения средств вообще сомнительна.

Результаты расчетов позволяют экономисту более обоснованно судить о целесообразности совершения хозяйственных операций с точки зрения сохранения финансового капитала и требуемой нормы его наращения.

2.1.4. Антисипативный расчет сложных процентов

Рассмотрим, на какую сумму возрастет первоначальный капитал P через n лет при i ($i < 100$) процентов годовых, если вычисление сложных процентов производится антисипативным методом (предварительно). Данный метод обычно применяется в условиях высокой инфляции.

Представим сумму капитала P в начале расчетного периода как разницу суммы S_1 в конце расчетного периода и процентного платежа на сумму S_1, вычисленного антисипативно:

$$P = S_1 - S_1 \times i = S_1 (1 - i). \qquad (2.7)$$

Отсюда $S_1 = P/(1 - i)$.

Аналогично определим величину капитала в конце второго расчетного периода:

$$S_1 = S_2 - S_2 \times i = S_2(1 - i),$$

$$S_2 = S_1/(1 - i)$$

или

$$S_2 = \frac{P}{1-i}\frac{1}{1-i} = P\left(\frac{1}{1-i}\right)^2.$$

Величина капитала в конце третьего расчетного периода

$$S_3 = P\left(\frac{1}{1-i}\right)^3,$$

а в конце n-го периода

$$S_n = P\left(\frac{1}{1-i}\right)^n. \qquad (2.8)$$

Обозначим выражение в скобках через $k_н^n$. Тогда $S_n = P k_н^n$, $k_н^n$ — коэффициент наращивания при антисипативном вычислении сложных процентов.

Коэффициент наращивания позволяет определить конечную сумму одной денежной единицы в конце n-го периода при процентной ставке i для антисипативного метода расчета сложных процентов.

Приведем пример, иллюстрирующий, что при декурсивном и антисипативном методах определения сложных процентов получаются различные результаты.

Пример 26. Первоначальный капитал $P = 2$ тыс. руб. вложен на 4 года под 6% годовых. Найдите доход от вложения денег при расчете сложных процентов методом: 1) декурсивным; 2) антисипативным.

◆ ◆ ◆

При декурсивном методе расчета [по формуле (2.1)] получаем

$$S_4 = P(1 + i)_n = 2(1 + 0,06)^4 = 2 \cdot 1,064 = 2 \cdot 1,2625 = 2,525 \text{ тыс. руб.};$$

$$I = S_4 - P = 2,525 - 2 = 0,525 \text{ тыс. руб.}$$

При антисипативном методе расчета процентов [по формуле (2.8)] имеем:

$$S_4 = P\left(\frac{1}{1-i}\right)^n = 2\left(\frac{1}{1-0,06}\right)^4 = 2 \cdot 1,064\ 4 = 1,2816 = 2,562 \text{ тыс. руб.};$$

$$I = S_4 - P = 2,562 - 2 = 0,562 \text{ тыс. руб.}$$

Как видим, при расчете процентов антисипативным методом получается больший доход, чем при декурсивном методе. Поэтому при вложении денег антисипативный метод расчета выгодно использовать, если в стране высокая инфляция. При нормально действующей экономике обычно пользуются декурсивным методом расчета процентов.

2.2. НОМИНАЛЬНАЯ И ЭФФЕКТИВНАЯ СТАВКИ ПРОЦЕНТОВ

В современных условиях проценты, как правило, капитализируются не один, а несколько раз в год — по полугодиям, кварталам, месяцам и т.д. Число раз начисления процентов в году обязательно фиксируется в условиях договора. Кроме того, обычно указывается и годовая ставка процентов, называемая номинальной (j). Номинальная ставка — это основа для определения той ставки, которая действительно начисляется в каждом периоде. Если номинальная ставка равна j, то в каждом из периодов начисляются проценты по ставке $j : m$, где m — число раз начисления процентов в году. Например, при $j = 1,8$ (180% годовых) и начислении процентов по полугодиям ставка в каждом полугодии равна 0,9 (1,8 : 2), т.е. 90%, а в каждом квартале 0,45 (1,8 : 4), т.е. 45% годовых. Такая ставка в мировой практике называется релятивной (относительной).

Случай 1. При декурсивном способе расчета сложных процентов наращенная сумма вычисляется по формуле

$$S = P\left(1 + j/m\right)^{m \times n}. \tag{2.9}$$

Пример 27. Первоначальная сумма ссуды равна 200 тыс. руб. Срок ссуды 2 года, проценты начисляются в конце каждого квартала по номинальной ставке сложных процентов, равной 8% годовых. Определите множитель наращения и погашаемую сумму.

◆ ◆ ◆

По формуле (2.9) рассчитываем наращенную сумму:

$$S = 200(1+ 0{,}08/4) = 200 \cdot 1{,}02\ 8 = 200 \cdot 1{,}1262 = 225{,}24 \text{ тыс. руб.}$$

Множитель наращения равен 1,1262, погашаемая сумма составит 225,24 тыс. руб.

Таким образом, начисление сложных процентов более одного раза в год дает дополнительное увеличение наращенной суммы.

Случай 2. При антисипативном методе расчета сложных процентов наращенная сумма вычисляется по формуле

$$S = P\left(\frac{m}{m - i}\right)^{m \times n}. \tag{2.10}$$

Решение примера 27 антисипативным методом будет следующим:

$$S = 200\left(\frac{4}{4 - 0{,}08}\right)^{4 \cdot 2} = 200 \cdot 1{,}0204\ 8 = 200 \cdot 1{,}1288 = \\ = 225{,}76 \text{ тыс. руб.}$$

Здесь уже множитель наращения равен 1,1288, а погашаемая сумма составит 225,76 тыс. руб.

Введем понятие эффективной (эквивалентной) ставки процентов (i), под которой будем понимать ту реальную прибыль, которую получают от одной денежной единицы в целом за год. Иначе говоря, эффективная ставка эквивалентна номинальной при начислении процентов m раз в год. Она показывает, какая годовая ставка дает тот же эффект, что и m — разовое наращение в год по ставке $j : m$. Связь эффективной и номинальной ставок будет рассмотрена в разд. 4.5.

В практике встречаются случаи, когда общий срок ссуды измеряется не целым числом. При такой ситуации наращенная сумма может быть определена либо по формуле (2.9), либо смешанным методом. В первом случае необходимо общую протяженность срока ссуды (n^*) представить в виде суммы числа полных периодов начисления процентов ($m \times l$) и дробной части одного периода начисления (α), т.е. $n^* = l \times m + \alpha$, где l — число полных лет. Теперь наращенную сумму легко определить:

$$S = P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{n^*} = P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m\times l}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\alpha}. \qquad (2.11)$$

При начислении годовых процентов $n^* = l + \alpha$ ($m = 1$) наращенная сумма составит

$$S = P(1 + i)^l\ (1 + i)^{\alpha}. \qquad (2.12)$$

Рассмотренный прием начисления процентов применяется в основном тогда, когда расчет представляет некоторое промежуточное звено в общей цепи расчетов, т.е. лишь один этап в более сложных построениях (например, в страховых расчетах, при анализе капитальных вложений и т.д.). В практике, если конечной целью расчета является только получение наращенной суммы S, применяют смешанный метод. Суть его состоит в том, что наращенная сумма для целого числа периодов определяется по формуле сложных процентов, а для дробной части периодов применяется формула простых процентов, т.е.

$$S = P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m\times l}\left(1+\alpha\frac{j}{m}\right). \qquad (2.13)$$

Если проценты начислены в конце года, т.е. $m = 1$, тогда

$$S = P(1 + i)^l\,(1 + \alpha\times i). \qquad (2.14)$$

Расчеты по формулам (2.13) и (2.14) дают несколько больший результат, чем по формулам (2.11) и (2.12). Можно доказать, что разница между ними будет наибольшей при $\alpha = 0{,}5$.

Рассмотрим пример расчета наращенной суммы двумя методами.

Пример 28. Ссуда 2 тыс. руб. выдана на 27 месяцев по номинальной ставке 7% годовых. Начисление процентов производится по полугодиям. Определите наращенную сумму (двумя методами расчета).

◆ ◆ ◆

Так как $m = 2$; $l = 2$; $n^* = 27 : 6 = 4,5$, то $\alpha = 0,5$. При расчете по формуле (2.9) получаем

$$S = 2\,(1+\frac{0,07}{2})^{4,5} = 2\,(1+\frac{0,07}{2})^{4}\,(1+\frac{0,07}{2})^{0,5} = 2\cdot 1,1475\cdot 1,0173 = 2\cdot 1,1674 = $$
$$= 2,335 \text{ тыс. руб.}$$

При расчете смешанным методом имеем

$$S = 2\,(1+\frac{0,07}{2})^{4}\,(1 + 0,5\,\frac{0,07}{2}) = 2\cdot 1,1475\cdot 1,0175 = 2\cdot 1,1676 = 2,3352 \text{ тыс. руб.}$$

Таким образом, наращенная сумма, рассчитанная смешанным методом, имеет большее значение. Разница в возможных ответах является наибольшей, так как $\alpha = 0,5$.

2.3. РАСЧЕТЫ СЛОЖНЫХ ПРОЦЕНТОВ В УСЛОВИЯХ ИНФЛЯЦИИ

Уровень процентных ставок по банковским ссудам определяется в зависимости от колебаний денежного рынка: изменения соотношения спроса на деньги и предложения денег. Если спрос и предложения уравновешены, то рассчитывают так называемую базовую ставку. Базовая процентная ставка — самая низкая процентная ставка по кредитам, предоставленным коммерческими банками наиболее надежным компаниям, кредитоспособным клиентам или первоклассным заемщикам. Остальные ставки процентов, как правило, увязываются с базовой ставкой процента и факторами, влияющими на их изменение: сроком, надежностью, «классностью» и т.д. Так, в России в начале 1995 г. базовая процентная ставка составляла 164—168%, а средняя процентная ставка по кредитам банков равнялась 180—220%.

В проведенном выше анализе, связанном с наращением процентов, не учитывается такой фактор, как инфляция. Все денежные суммы измерялись по номиналу, и реальная покупательная способность денег не принималась во внимание. Вместе с тем инфляция стала неотъемлемым элементом экономики нашей страны и с этим нельзя не считаться при проведении долгосрочных финансовых операций. Учет инфляции необходим по крайней мере в двух случаях: при расчете наращенной суммы денег и определении реальной ставки процентов.

Если наращенная за n лет сумма денег составляет величину S, а динамика цен характеризуется общим индексом цен I_p, то реальная наращенная сумма денег будет S^*, т.е. при сохранении *покупательной способности* денег наращенная сумма

$$S^* = S \,/\, I_p\,.$$

Пусть ожидаемый уровень инфляции (темп прироста) равен τ, тогда индекс цен за год составит $(1 + \tau)$, а индекс покупательной способности денег $(1 + \tau)^{-1}$. За n лет при сохранении предполагаемого темпа инфляции индекс покупательной способности денег будет равен $(1 + \tau)^{-n}$.

Таким образом, реальную покупательную способность денег можно рассчитать по формуле

$$S^* = S(1 + \tau)^{-n}\,.$$

Отсюда

$$S = \frac{P(1+i)^n}{(1+\tau)^n} = P\left(\frac{1+i}{1+\tau}\right)^n. \qquad (2.15)$$

Пример 29. Во что превратится сумма 10 тыс. ден. ед. через 4 года при условии, что на нее начисляют 60% годовых? Какова будет ее реальная покупательная способность, если прирост цен предположительно будет в среднем равен 30% (первый вариант) и 80% (второй вариант) в год?

♦ ♦ ♦

1. Определим наращенную сумму через 5 лет без учета инфляции по формуле (2.1):

$$S = 10(1 + 0{,}6)^4 = 10 \cdot 6{,}5536 = 65{,}536 \text{ тыс. ден. ед.}$$

2. Рассчитаем реальную покупательную способность суммы 10 тыс.ден.ед. при инфляции 30% годовых по формуле (2.15):

$$S_1^* = 10\left(\frac{1+0{,}6}{1+0{,}3}\right)^4 = 10 \cdot 2{,}2946 = 22{,}946 \text{ тыс. ден. ед.};$$

22,946 тыс. ден. ед. > 10 тыс. ден. ед., т.е. $S_1^* > P$.

3. Рассчитаем реальную покупательную способность суммы 10 тыс. ден. ед. при инфляции 80% годовых [см. формулу (2.15)]:

$$S_2^* = 10\left(\frac{1+0{,}6}{1+0{,}8}\right)^4 = 10 \cdot 0{,}6243 = 6{,}243 \text{ тыс. ден. ед.};$$

$$6{,}243 \text{ тыс. ден. ед.} < 10 \text{ тыс. ден. ед., т.е. } S_2^* < P.$$

Из результатов расчетов наглядно видно, что покупательная способность денег в результате роста инфляции снижается. Причем чем выше инфляция, тем больше обесценение денег.

Очевидно, что если темп инфляции равен ставке процентов, по которой производится наращение, то роста реальной суммы не произойдет: наращение полностью поглощается инфляцией, и, следовательно, $S^* = P$. Если $\tau > i$, то происходит «эрозия» капитала, т.е. инфляция поглощает даже часть первоначальной суммы денег и, следовательно, $S^* < P$.

Возникает вопрос: как же учесть в наращенной сумме денег уровень инфляции и предотвратить обесценение денег?

В условиях инфляции погашаемая сумма может быть определена следующим образом:

$$S(\tau) = P(1 + r)^n I(\tau) = P(1 + r)^n (1 + \tau)^n, \qquad (2.16)$$

где r — ставка, обеспечивающая реальную доходность операции. В то же время (см. разд. 1.2) можно записать:

$$S(\tau) = P(1 + i(\tau))^n,$$

где $i(\tau)$ — ставка сложных процентов при выдаче ссуды с учетом инфляции.

Приравнивая приведенные выше формулы, получаем уравнение эквивалентности для рассматриваемой финансовой операции — выдачи ссуды по сложной ставке процентов в условиях инфляции при заданном индексе инфляции за срок ссуды:

$$P(1 + i(\tau))^n = P(1 + r)^n I(\tau).$$

Отсюда получаем выражение для множителя наращения с учетом инфляции:

$$k_{\text{н}} = [1 + i(\tau)]^n, \qquad (2.17)$$

$$k_н = (1 + r)^n \, I(\tau), \tag{2.18}$$

$$k_н = (1 + r)^n \, (1 + \tau)^n. \tag{2.19}$$

Следовательно, $[1 + i(\tau)]^n = (1 + r)^n \, I(r)$.

Таким образом, при выдаче ссуды с учетом инфляции ставка сложных процентов составит:

$$i(\tau) = (1 + r) \sqrt[n]{I(\tau)} - 1. \tag{2.20}$$

Если $n = 1$, то

$$i(\tau) = (1 + r)(1 + \tau) - 1 = r + \tau + r \times \tau. \tag{2.21}$$

Рассмотрим пример расчета показателей в условиях инфляции.

Пример 30. Ссуда в размере 500 тыс. руб. выдана на 2 года. Реальная доходность операции 30% годовых по сложной ставке процентов. Ожидается, что индекс инфляции за срок ссуды будет равен 2,5. Определите множитель наращения, ставку процентов при выдаче ссуды с учетом инфляции, погашаемую сумму с учетом инфляции и покупательную способность первоначальной суммы денег через 2 года.

◆ ◆ ◆

1. Определим множитель наращения по формуле (2.18):

$$k_н = (1 + 0,3)^2 \cdot 2,5 = 4,225.$$

2. Рассчитаем годовую ставку процентов (с учетом инфляции) по формуле (2.20):

$$i(\tau) = (1 + 0,3)\sqrt{2,5} - 1 = 1,0555 \ (105,55\%).$$

3. Определим погашаемую сумму с учетом инфляции по формуле (2.16):

$$S(\tau) = 500(1 + 0,3)^2 \cdot 2,5 = 500 \cdot 4,225 = 2112,5 \text{ тыс. руб.}$$

4. Рассчитаем покупательную способность первоначальной суммы денег, используя формулу (2.15):

$$S^* = 500 \, \frac{(1+0,3)^2}{1+1,5} = 500 \cdot 0,27 = 135,2 \text{ тыс. руб.}$$

Пример 31. Ссуда 200 тыс. руб. выдана на 3 года. Реальная доходность операции должна составить 40% годовых по сложной ставке процентов. Ожидаемый уровень инфляции составляет 60% в год. Определите множитель наращения, ставку процентов при выдаче ссуды с учетом инфляции и погашаемую сумму.

◆ ◆ ◆

1. Множитель наращения [см. формулу (2.19)]

$$k_{н} = (1 + 0,4)^3 (1 + 0,6)^3 = 2,744 \cdot 4,096 = 11,2394.$$

2. Ставка процентов при выдаче ссуды с учетом инфляции [см. формулу (2.21)]

$$i(\tau)_{год} = 0,4 + 0,6 + 0,4 \cdot 0,6 = 1,24\ (124\%).$$

3. Погашаемая сумма с учетом инфляции при расчете первым способом [см. формулу (2.16)]:

$$S(\tau) = 200(1 + 0,4)^3 (1 + 0,6)^3 = 2247,9 \text{ тыс. руб.},$$

вторым способом

$$S(\tau) = 200(1 + 1,24)^3 = 2247,9 \text{ тыс. руб.}$$

Рассмотрим начисление сложных процентов несколько раз в году с учетом инфляции. Используя (2.9), определим наращенную сумму в конце срока ссуды, определяемую требуемой реальной доходностью операции r_j:

$$S = P\left(1+\frac{r_j}{m}\right)^{m\times n}.$$

С учетом инфляции возвращаемая сумма должна составить

$$S(\tau) = S \times I(\tau) = P\left(1+\frac{r_j}{m}\right)^{m\times n} I(\tau). \qquad (2.22)$$

В то же время $S(\tau)$ может быть рассчитана по формуле

$$S(\tau) = P\left(1+\frac{j(\tau)}{m}\right)^{m\times n}, \qquad (2.23)$$

где $j(\tau)$ — номинальная ставка процентов при выдаче ссуды с учетом инфляции.

Приравнивая (2.22) и (2.23), получим уравнение эквивалентности для рассматриваемой финансовой операции при заданном индексе инфляции за весь срок ссуды:

$$P\left(1+\frac{r_j}{m}\right)^{m\times n} I(\tau) = P\left(1+\frac{j(\tau)}{m}\right)^{m\times n}.$$

Отсюда получаем выражение для множителя наращения:

$$kн = \left(1+\frac{r_j}{m}\right)^{m\times n} I(\tau) = \left(1+\frac{j(\tau)}{m}\right)^{m\times n}. \qquad (2.24)$$

Выражение для номинальной ставки сложных процентов при их начислении m раз в году, обеспечивающей требуемую реальную доходность операции r_j при заданном индексе инфляции за срок ссуды, определяется следующим образом:

$$j(\tau) = m\left[\left(1+\frac{r_j}{m}\right)\sqrt[m\times n]{I(\tau)} - 1\right] \qquad (2.25)$$

или

$$j(\tau) = m\left[\left(1+\frac{r_j}{m}\right)\sqrt[m]{1+\tau} - 1\right]. \qquad (2.26)$$

Величина наращенной суммы

$$S(\tau) = P\times k_н = P\left(1+\frac{r_j}{m}\right)^{m\times n} I(\tau) = P\left(1+\frac{j(\tau)}{m}\right)^{m\times n}. \ (2.27)$$

Приведем пример расчетов по приведенным выше формулам.

Пример 32. Первоначальная сумма ссуды равна 10 тыс. руб. Срок ссуды составляет 2 года, проценты начисляются по полугодиям по номинальной ставке сложных процентов, равной 30% годовых. Определите множитель наращения, номинальную ставку сложных процентов и погашаемую сумму, если ожидаемый индекс инфляции за весь срок ссуды равен 2.

◆ ◆ ◆

1. Множитель наращения [см. формулу (2.24)]

$$k_н = \left(1+\frac{0{,}3}{2}\right)^{2\cdot 2}\cdot 2 = 3{,}498.$$

2. Номинальная ставка сложных процентов с учетом инфляции [см. формулу (2.25)]

$$j(\tau) = 2\left[(1+\frac{0,3}{0,2})\sqrt[4]{2}-1\right] = 0,7352\ (73,52\%).$$

3. Погашаемая сумма с учетом инфляции [см. формулу (2.27)], рассчитанная двумя способами, составит:

$$S(\tau) = 10\left(1+\frac{0,3}{2}\right)^{2\cdot 2}\cdot 2 = 34,98 \text{ тыс. руб.};$$

$$S(\tau) = 10\left(1+\frac{0,7352}{2}\right)^{2\cdot 2} = 10\cdot 3,498 = 34,98 \text{ тыс. руб.}$$

Пример 33. Банком выдана ссуда 2 тыс. руб. Срок ссуды 2 года. Проценты погашаются ежеквартально по номинальной ставке 40% годовых. Определите множитель наращения, номинальную ставку процентов с учетом инфляции и погашаемую сумму, если ожидаемый годовой уровень инфляции составляет 50%.

◆ ◆ ◆

1. *Множитель наращения* [см. формулу (2.24)]

$$k_н = \left(1+\frac{0,4}{4}\right)^{4\cdot 2}(1+0,5)^2 = 4,823.$$

2. Номинальная ставка процентов с учетом инфляции [см. формулу (2.26)]

$$j(\tau) = 4\left[\left(1+\frac{0,4}{4}\right)\sqrt[4]{1+0,5}-1\right] = 0,8694\ (86,94\%).$$

3. Погашаемая сумма с учетом инфляции [см. формулу (2.27)], рассчитанная двумя способами, составит:

$$S(\tau) = 2\left(1+\frac{0,4}{4}\right)^{4\cdot 2}(1+0,5)^2 = 2\cdot 4,823 = 9,646 \text{ тыс. руб.};$$

$$S(\tau) = 2\left(1+\frac{0,8694}{4}\right)^{4\cdot 2} = 2\cdot 4,823 = 9,646 \text{ тыс. руб.}$$

2.4. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Банк выдает долгосрочные кредиты по сложной ставке 45% годовых. Определите, на какой срок можно взять кредит 1 тыс. руб., если его предполагается погасить единовременным платежом в размере 2 тыс. руб.

2. Первоначальная сумма долга равна 1 тыс. руб. Определите сумму долга через 3 года (первый вариант), через 1 год (второй вариант), через 3 месяца (третий вариант) при использовании простой и сложной ставок процентов в размере 8% годовых. Сделайте выводы.

3. Получена ссуда в размере 5 тыс. руб. Определите погашаемую сумму через 15 месяцев при сложной ставке 9% годовых.

4. Ссуда 600 тыс. руб. выдана на 1,5 года. Сложная процентная ставка составила 8% годовых. Определите сумму погасительного платежа.

5. Ссуда выдана на 2 года. Погасительный платеж с учетом сложной процентной ставки 7% составил 26 тыс. руб. Определите сумму ссуды.

6. Ссуда 4 тыс. руб. выдана на 3 года. Начисление сложных процентов осуществляется по процентной ставке: в первый год — 7%, во второй год — 8%, в третий год — 9%. Определите сумму погасительного платежа.

7. Ссуда 150 тыс. руб. получена на 2,5 года. Определите размер погасительного платежа при сложной процентной ставке 6% годовых.

8. Первоначальная сумма долга равна 500 тыс. руб. Определите погашаемую сумму через 0,5 года, 1 год и 1,5 года при использовании простой и сложной ставок процентов в размере 7% годовых. Сделайте выводы.

9. Получен заем в размере 500 тыс. руб. на 2,5 года. Сложная процентная ставка составляет 9% годовых. Определите сумму погасительного платежа.

10. Ссуда в размере 1,5 тыс. руб. выдана на 3 года. Ставка сложных процентов в течение срока меняется следующим образом: первые полгода — 6% годовых, затем через каждые 3 месяца ставка увеличивается на 0,5%. Определить наращенную сумму, выделив при этом множитель наращения.

11. Первоначальная сумма долга равна 200 тыс. руб. Определите сумму долга через 2,5 года. Сложная ставка процентов такова: первое

полугодие — 7% годовых, в дальнейшем через каждые полгода она повышается на 0,5%.

12. Банк начисляет сложные проценты по ставке 8% годовых. Определите срок, за который сумма вклада 250 тыс. руб. вырастет до 400 тыс. руб.

13. Сумма долга утроилась за 2 года. Определите использованную при этом годовую ставку сложных процентов.

14. Первоначальный капитал 500 тыс. руб. вложен в банк на 3 года под 8% годовых. Определите доход вкладчика при декурсивном и антисипативном способах расчета сложных процентов. Сделайте выводы.

15. Ссуда 5 млн руб. выдана на 20 месяцев по номинальной ставке 6% годовых. Начисление процентов проводится поквартально. Определите наращенную сумму двумя способами расчета. Сделайте выводы.

16. Банк начисляет проценты на вклады по номинальной ставке 8% годовых. Определите накопленную сумму и сумму начисленных процентов при вкладе 700 тыс. руб., размещенном на год, если проценты начисляются: а) ежемесячно; б) ежеквартально; в) каждое полугодие.

17. Ставка сложных процентов банка по срочным вкладам составляла в начале года 80% годовых, через полгода была уменьшена до 70%, а еще через 3 месяца — до 40%. Определите годовую сумму процентов, которая была начислена на вклад 300 тыс. руб.

18. Банк выдал кредит 10 млн руб. на 3 года по сложной ставке процентов 75% годовых. Кредит должен быть погашен единовременным платежом в конце срока. Определите погашаемую сумму и сумму начисленных процентов.

19. Кредит 100 тыс. руб. выдан на 1 год. Проценты начисляются ежеквартально по сложной ставке 20% годовых. Рассчитайте доход с операции.

20. Кредит 100 тыс. руб. выдан на 2 года. Проценты начисляются по полугодиям по сложной ставке 30% годовых. Найти доход с операции.

21. Банк начисляет проценты на вклады по номинальной ставке 7% годовых. Определите накопленную сумму и сумму начисленных процентов при вкладе 250 тыс. руб., размещенном на 3 года, если проценты будут начисляться: а) по полугодиям; б) ежеквартально; в) ежемесячно.

22. Кредит 300 тыс. руб. выдан на 3 года. Проценты начисляются ежемесячно по сложной ставке 20% годовых. Найти доход с операции.

23. Кредит в размере 100 тыс. руб. выдан на 5 лет по сложной ставке 10% годовых, которая через год увеличилась на 5%, а затем каждые 2 года увеличивалась на 7%. Определите доход с операции.

24. Кредит 200 тыс. руб. выдан на 4 года. Проценты начисляются ежеквартально по сложной ставке 25% годовых. Рассчитайте доход с операции.

25. Рассчитайте реальную покупательную способность вклада 1 тыс. руб. через 2 года с учетом начисления на эту сумму 7% годовых и уровня инфляции в первый год 6%, а второй год 8%.

26. При уровне инфляции 4% банк выдает ссуду 400 тыс. руб. на 2 года по сложной ставке 6% годовых. Определите сумму погасительного платежа.

27. При постоянном уровне инфляции 3% в месяц банк выдает ссуду 500 тыс. руб. на 2 года по сложной ставке 6% годовых. Определите процентную ставку, учитывающую инфляцию и сумму погасительного платежа. Рассчитайте покупательную способность ссуды через 1 год, через 2 года.

28. При уровне инфляции 6% в год банк выдал ссуду 18 тыс. руб. на 3 года по сложной ставке 8% годовых. Определите сумму погасительного платежа и реальную покупательную способность выданных денег в конце срока.

29. Банк выдал кредит 5 тыс. руб. на 2 года. При расчетном уровне инфляции 4% в год реальная доходность операции составила 3% по сложной годовой ставке. Определите ставку процентов по кредиту с учетом инфляции, погашаемую сумму и сумму начисленных процентов.

30. Банк выдал кредит 2 тыс. руб. на 9 месяцев. Ожидаемый месячный уровень инфляции составит 5%, требуемая реальная доходность операции должна составить 14% годовых по сложной ставке процентов. Определите ставку процентов по кредиту с учетом инфляции, погашаемую сумму и сумму начисленных процентов.

31. Ссуда 10 тыс. руб. выдана на 1,5 года. Реальная доходность операции должна составить 25% годовых по сложной ставке процентов. Ожидаемый уровень инфляции составляет 20% в год. Определите множитель наращения, ставку процентов при выдаче ссуды с учетом инфляции и погашаемую сумму.

32. Первоначальная сумма ссуды равна 200 тыс. руб. Срок ссуды составляет 2 года, проценты начисляются в конце каждого квартала по номинальной ставке сложных процентов 6% годовых. Определите множитель наращения, номинальную ставку сложных процентов и погашаемую сумму, если ожидаемый годовой уровень инфляции составляет 15%.

33. Ссуда 5 тыс. руб. выдана банком на 3 года с начислением процентов в конце каждого полугодия по номинальной ставке сложных процентов 40% годовых. Определите множитель наращения, номинальную ставку сложных процентов и погашаемую сумму, если предполагаемый индекс инфляции за весь срок ссуды равен 4.

34. Ссуда 500 тыс. руб. выдана на 3 года. Ожидаемый годовой уровень инфляции составляет 10%. Определите ставку процентов при выдаче ссуды и погашаемую сумму, если реальная доходность ссудной операции должна составить 6% годовых по сложной ставке процентов.

35. Какой станет сумма 500 тыс. руб. через 2 года при условии, что на нее по сложной ставке начисляется 16% годовых? Какова будет ее реальная покупательная способность, если уровень инфляции в год составит 14, 16 и 17%? Сделайте выводы.

ГЛАВА 3

ДИСКОНТИРОВАНИЕ

3.1. ЭКОНОМИЧЕСКАЯ СУЩНОСТЬ И ВИДЫ ДИСКОНТИРОВАНИЯ

В финансовой практике часто сталкиваются с задачей, обратной определению наращенной суммы, т.е. по заданной сумме S, которую следует уплатить через n лет, необходимо определить сумму P (сумму на любую дату до момента уплаты S). Эта задача возникает, например, тогда, когда проценты удерживаются непосредственно при выдаче ссуды. В этом случае говорят, что сумма S дисконтируется, а разность $S - P = D$ называют дисконтом. Таким образом, термин «дисконтирование» в широком смысле означает определение величины P на некоторый момент времени при условии, что в будущем она составит заданную величину S. Дисконтирование позволяет учитывать в финансово-экономических расчетах фактор времени. В зависимости от вида ставки (процентной или учетной) различают два вида дисконтирования: математическое и коммерческое (банковское).

3.2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ДИСКОНТИРОВАНИЕ

3.2.1. Дисконтирование по простой процентной ставке

Математическое дисконтирование производится на базе процентной ставки i. К нему прибегают в тех случаях, когда по заданным S, n, i необходимо найти P. Решим уравнение (1.1) относительно P и получим:

$$P = \frac{S}{1+n\times i} = S\frac{1}{1+n\times i} = S\times k_{\text{д}}, \qquad (3.1)$$

где $k_{\text{д}} = \dfrac{1}{1+n\times i}$ — коэффициент дисконтирования, или дисконтный множитель.

Дисконтный множитель является величиной, обратной множителю наращения $(1 + n \times i)$. Величину P, если она найдена по S, называют дисконтированной суммой S, современной (приведенной, капитализированной) величиной платежа S. Это понятие широко используется в финансовых вычислениях и экономических расчетах, так как ни одна серьезная проблема сравнения результатов финансовых операций не может быть решена без расчета сумм издержек, инвестиций, доходов и т.д., приведенных с помощью дисконтирования к какому-либо моменту времени.

Для различных периодов начисления и значений ставок процентов

$$k_{д} = (1 + \sum n_t \times i_t)^{-1}. \qquad (3.2)$$

Рассмотрим расчет коэффициента дисконтирования на следующем примере.

Пример 34. Через 6 месяцев с момента выдачи ссуды должнику надо уплатить кредитору 3000 ден. ед. Кредит предоставляется под 6% годовых. Определите, какую сумму выдает кредитор и сумму дисконта.

◆ ◆ ◆

$$P = \frac{3000}{1 + 0{,}5 \cdot 0{,}06} = 2912{,}6 \text{ ден. ед.}$$

$$D = 3000 - 2912{,}6 = 87{,}4 \text{ ден. ед.}$$

3.2.2. Дисконтирование по сложной процентной ставке

Из формулы (2.1) можно определить значение первоначальной суммы P, выдаваемой заемщику, т.е. осуществить дисконтирование суммы S:

$$P = \frac{S}{(1+i)^n} = S \times k_{д}, \qquad (3.3)$$

где $k_{д} = \dfrac{1}{(1+i)^n} = (1 + i)^{-n}$ — коэффициент дисконтирования (учетный или дисконтный множитель).

Дисконтный множитель в данном случае является величиной, обратной множителю наращения $(1 + i)^n$. Величина P показывает, какая сумма должна быть взята в качестве первоначальной для того, чтобы через n лет она выросла до S при ставке сложных процентов i. Таким образом, величины P и S эквивалентны: выплаченная сумма S через n лет равноценна в настоящий момент сумме P. Коэффициент дисконтирования в этом случае может быть назван коэффициентом приведения. Современная величина платежа — одна из основных финансовых характеристик, широко используемая в самых разнообразных ситуациях. Отметим некоторые ее свойства:

1) чем выше ставка процентов, тем сильнее дисконтирование и, следовательно, в большей степени уменьшается P при всех прочих равных условиях;

2) при очень больших сроках современная величина будущего платежа будет мала.

Для разных периодов начисления и значений ставок процентов коэффициент дисконтирования можно определить по формуле

$$k_{д} = \left(\prod_{t=1}^{t=N} (1 + n_t \times i_t) \right)^{-1}. \qquad (3.4)$$

При исчислении сложных процентов m раз в году коэффициент дисконтирования будет рассчитываться следующим образом:

$$k_{д} = \left(1 + \frac{j}{m} \right)^{-m \times n}. \qquad (3.4)$$

Пример 35. Сумма 200 тыс. руб. должна быть выплачена через 2 года. Определите ее современную величину, если ставка сложных процентов в первый год 8% годовых, а в каждые последующие полгода увеличивалась на 0,5%.

♦ ♦ ♦

$$P = \frac{200}{(1 + 1 \cdot 0{,}08)(1 + 0{,}5 \cdot 0{,}085)(1 + 0{,}5 \cdot 0{,}09)} = \frac{200}{1{,}1766} = 169{,}981 \text{ тыс. руб.}$$

Пример 36. Сумма 1 млн руб. должна быть выплачена через 2 года. При этом проценты начисляются ежеквартально по номинальной ставке сложных процентов 7% годовых. Определите ее современную величину.

◆ ◆ ◆

$$P = \frac{1}{(1+0{,}07/4)^{4\cdot 2}} = \frac{1}{1{,}1097} = 0{,}901 \text{ млн руб.}$$

3.3. КОММЕРЧЕСКИЙ КРЕДИТ

3.3.1. Основные понятия коммерческого дисконтирования

Необходимость определения дисконта возникает при различных финансовых операциях, например учете векселей и других краткосрочных обязательств. Дисконтирование векселя означает покупку его у владельца до наступления срока оплаты по цене, меньшей той суммы, которая должна быть выплачена по нему в конце срока. Дисконтирование векселя является, как правило, формой кредитования банком векселедержателя путем досрочной выплаты ему обозначенной в векселе суммы за минусом определенных процентов. Часто эта операция называется учетом векселя. В данном случае банком применяется не математическое, а банковское, или коммерческое, дисконтирование. Согласно этому методу, проценты за пользование ссудой начисляются на сумму, подлежащую уплате в конце срока возвращения ссуды. Применительно к учету векселя это означает, что проценты начисляются на сумму, которую должен выплатить должник в конце срока погашения векселя. Сумма, которую покупатель выплачивает векселедержателю при досрочном учете векселя, называется его дисконтированной величиной. Она ниже номинала векселя на процентный платеж, вычисленный со дня дисконтирования до дня погашения векселя. Этот процентный платеж (процент) называется дисконтом. Ставка, по которой начисляются проценты, отличается от ставки процентов i. Ее называют учетной, или дисконтной, ставкой и обозначают символом d.

3.3.2. Дисконтирование по простой учетной ставке

Годовая учетная ставка находится по формуле

$$d = \frac{S-P}{S\times n} = \frac{D}{S\times n}, \qquad (3.6)$$

где D — сумма процентных денег; S — сумма, которая должна быть возвращена; $n = ∂ / K$ — срок от даты учета до даты погашения векселя, лет; $∂$ — число дней от даты учета до даты погашения векселя; K — временная база (см. разд. 1.1). Отсюда $D = S \times d \times n$,

$$P = S - D = S - S \times d \times n = S(1 - n \times d), \qquad (3.7)$$

где $(1 - n \times d)$ — дисконтный множитель.

Следует иметь в виду, что из этой суммы банк может удержать и комиссионные за проведение операции (обычно они пропорциональны выкупной цене обязательства).

Формула наращения, в основу которой положена учетная ставка, имеет вид:

$$S = \frac{P}{1 - n \times d} = P\frac{1}{1 - n \times d}, \qquad (3.8)$$

где $\frac{1}{1 - n \times d}$ — множитель наращения.

Множитель наращения и дисконтный множитель являются обратными величинами.

Из формулы (3.8) становится очевидным следующее свойство простых учетных ставок: при $n > (1 / d)$ величина P станет отрицательной.

Рассмотрим расчеты номинальной и дисконтированной величин векселя на конкретных примерах.

Пример 37. Вексель на сумму 2000 ден. ед. с уплатой 16 ноября был учтен банком 22 сентября по учетной ставке 5% с использованием германской практики расчета. Оцените полученную при учете сумму, а также дисконт банка.

◆ ◆ ◆

1. Определим число дней, оставшихся до уплаты по векселю (с 22 сентября по 16 ноября):

9 (сентябрь) + 30 (октябрь) + 16 (ноябрь) – 1 = 54 дня.

2. Сумма, полученная при учете, составит

$$P = S\left[1 - \frac{∂}{360}d\right] = 2000\left[1 - \frac{54}{360}0{,}05\right] = 1985 \text{ ден. ед.}$$

3. Дисконт, полученный банком при учете векселя,

$$D = S - P = 2000 - 1985 = 15 \text{ ден. ед.}$$

Пример 38. Банком 10 апреля был учтен вексель со сроком погашения 9 июля. Вычислите номинальную стоимость векселя, если учетная ставка дисконтирования составляла 6% годовых, а векселедержатель получил 1800 ден.ед. При вычислении используйте французскую практику расчетов.

◆ ◆ ◆

1. Определим срок до уплаты по векселю от 10 апреля до 9 июля:

21 (апрель) + 31 (май) + 9 (июль) – 1 = 60 дней.

2. Рассчитаем наращенную сумму S по формуле (3.8):

$$S = \frac{1800}{1 - (60 / 360) \cdot 0{,}06} = 1818 \text{ ден. ед.}$$

Таким образом, номинальная стоимость векселя составляет 1818 ден. ед.

Операция дисконтирования по учетной ставке может совмещаться с операцией начисления процентов. В этом случае наращенная сумма ссуды с учетом процентов составит

$$S = P_0 (1 + n_0 \times i), \tag{3.9}$$

где P_0 — первоначальная сумма ссуды; n_0 — срок начисления процентов; i — ставка процентов.

Подставив (3.9) в (3.7), получим

$$P = P_0 (1 + n_0 \times i)(1 - n \times d). \tag{3.10}$$

Пример 39. Обязательство уплатить через 150 дней 20 тыс. руб. с процентами (исходя из ставки процентов 5% годовых и K_i = 365 дней) учтено в банке за 40 дней до наступления срока уплаты по учетной ставке 3% (K_d = = 360 дней). Определите сумму, полученную владельцем обязательства при его учете.

◆ ◆ ◆

Используя формулу (3.10), найдем сумму, полученную владельцем обязательства при его учете:

$$P = 20\left(1 + \frac{150}{365} 0{,}05\right)\left(1 - \frac{40}{360} 0{,}03\right) = 20 \cdot 1{,}0205 \cdot 0{,}9967 = 20{,}343 \text{ тыс. руб.}$$

Используя формулу (3.7), можно определить срок ссуды или учетную ставку. Срок ссуды в годах и днях можно рассчитать соответственно по формулам

$$n = \frac{S - P}{S \times d}, \tag{3.11}$$

$$\partial = \frac{S - P}{S \times d} K. \tag{3.12}$$

Учетную ставку можно определить так:

$$d = \frac{S - P}{S \times n} = \frac{D}{S \times n}; \tag{3.13}$$

$$d = \frac{S - P}{S \times \partial} K = \frac{D \times K}{S \times \partial}. \tag{3.14}$$

Рассмотрим следующий пример расчета учетной ставки.

Пример 40. При учете векселя на сумму 10 тыс. руб., до срока оплаты которого осталось 100 дней, его владельцу выплачена сумма 9,1 тыс. руб. Определите учетную ставку, принятую при покупке векселя (K = 360 дней).

♦ ♦ ♦

Для расчета учетной ставки используем формулу (3.14):

$$d = \frac{(10 - 9{,}1) \cdot 360}{10 \cdot 100} = 0{,}324 \ (32{,}4\%).$$

3.3.3. Дисконтирование по сложной учетной ставке

Рассмотрим применение сложной учетной ставки d при определении современной величины платежа. Учетная ставка представляет собой ставку процентов, начисляемую на сумму будущего платежа S. Пусть соответствующую сумму денег удерживают при выдаче ссуды, а срок выдачи суммы S равен n. Тогда современная величина за один год до окончания срока при условии, что сумма дисконта вычитается в начале каждого года, составит:

$$P_{n-1} = S - S \times d = S(1 - d),$$

а для двух лет до окончания срока

$$P_{n-2} = S\,(1 - d) - S\,(1 - d)d = S - 2Sd + Sd^2 = S\,(1 - 2d + d^2\,) =$$

$$= S\,(1 - d)^2\,.$$

Для года, отстоящего от срока платежа на n лет, имеем:

$$P = S\,(1 - d)^n = S \times k_д\,, \tag{3.15}$$

где $k_д = (1 - d)^n$ — дисконтный множитель.

Сумма дисконта

$$D = S - P = S - S\,(1 - d)^n\,,$$

$$D = S\left[1-(1-d)^n\right]. \tag{3.16}$$

Если учет осуществляется не один, а m раз в год, то исходя из формулы (3.15) получим:

$$P = S(1-f\,/\,m)^{m \times n}\,, \tag{3.17}$$

где f — номинальная учетная ставка.

Рассмотрим примеры расчета показателей.

Пример 41. Рассчитайте современную величину суммы 3 тыс. руб., которую следует уплатить через 3 года, при дисконтировании по ставке d = 20%. Сделайте вычисления по простой и сложной учетным ставкам.

◆ ◆ ◆

1. При простой учетной ставке:

$$P = 3\,(1 - 0{,}2 \cdot 3) = 1{,}2 \text{ тыс. руб.};$$

$$D = S - P = 3 - 1{,}2 = 1{,}8 \text{ тыс. руб.}$$

2. При сложной учетной ставке

$$P = 3\,(1 - 0{,}2)^3 = 1{,}536 \text{ тыс. руб.};$$

$$D = S - P = 3 - 1{,}536 = 1{,}464 \text{ тыс. руб.}$$

Как видим, дисконтирование по простой учетной ставке дает больший дисконт, чем по сложной — на 0,336 тыс. руб.

Пример 42. Вексель номиналом 300 руб. был учтен банком за 20 дней до наступления обязательства по нему (временная база — 360 дней). Какую сумму получил предъявитель векселя, если дисконтирование осуществлялось по сложным процентам 36 раз за год. Номинальная учетная ставка равнялась 7%.

◆ ◆ ◆

Сумма, полученная предъявителем:

$$P = S(1 - f / m)^{m \times n} = 300(1 - 0{,}07 / 36)^{36 \cdot 20/360} = 300(1 - 0{,}0019)^2 = $$
$$= 298{,}861 \text{ руб.}$$

Дисконт

$$D = S - P = 300 - 298{,}861 = 1{,}139 \text{ руб.}$$

3.4. РАСЧЕТЫ В УСЛОВИЯХ ИНФЛЯЦИИ

Используя соотношение между суммой, которая должна быть возвращена, и суммой, получаемой заемщиком с учетом реальной доходности, имеем:

$$S_r = \frac{P}{1 - n \times d_r}, \qquad (3.18)$$

где S_r и d_r — сумма и учетная ставка, обеспечивающие реальную доходность r операции учета.

Погашаемая сумма в условиях инфляции может быть определена по формуле (1.9). Подставляя это выражение в (3.18), получаем

$$S(\tau) = \frac{P \times I(\tau)}{1 - n \times d_r}. \qquad (3.19)$$

В то же время величину $S(\tau)$ можно записать в виде:

$$S(\tau) = \frac{P}{1 - n \times d(\tau)}, \qquad (3.20)$$

где $d(\tau)$ — учетная ставка, учитывающая потери от инфляции. Приравняв (3.19) и (3.20), получим:

$$\frac{P \times I(\tau)}{1 - n \times d_r} = \frac{P \times I(\tau)}{1 - n \times d(\tau)}.$$

Из этого уравнения можем получить формулу для определения значения учетной ставки, компенсирующей потери от инфляции:

$$d(\tau) = \frac{n \times d_r + I(\tau) - 1}{n \times I(\tau)}. \qquad (3.21)$$

В случае, когда срок операции не более года ($n < 1$),

$$d(\tau) = \frac{d_r + \tau_\text{г}}{1 + n \times \tau_\text{г}}, \qquad (3.22)$$

а для срока операции, равного году ($n = 1$),

$$d(\tau) = \frac{d_r + \tau_\text{г}}{1 + \tau_\text{г}}. \qquad (3.23)$$

Пример 43. Ссуда выдается 12 марта по простой учетной ставке, равной 12%. Заемщик должен 25 декабря возвратить 2 тыс. руб. Определите при годовом уровне инфляции 40% для точного числа дней ссуды и K = 366 дней: а) учетную ставку, учитывающую инфляцию; б) сумму, получаемую заемщиком; в) величину дисконта.

◆ ◆ ◆

1. Учетная ставка с учетом инфляции

$$d = \frac{0{,}12 + 0{,}4}{1 + (288 / 366) \cdot 0{,}4} = \frac{0{,}52}{1{,}315} = 0{,}3955\ (39{,}55\%).$$

2. Сумма, выдаваемая заемщику:

$$P = 2\,[1 - (288\ /\ 365) \cdot 39{,}55] = 1{,}441311 \text{ тыс. руб.}$$

3. Дисконт

$$D = 2 - 1{,}441 = 0{,}559 \text{ тыс. руб.}$$

3.5. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Определите сумму, которую выдал банк, и дисконт банка, если через год с момента выдачи ссуды должник уплатит 2500 тыс. руб. Кредит предоставляется под 16% годовых.

2. Сумма выдана 20 апреля по простой учетной ставке 8% годовых. Заемщик должен 10 октября возвратить 100 тыс. руб. Определите сумму, полученную заемщиком, и величину дисконта при точном и приближенном числе дней ссуды и различных вариантах временной базы (год не високосный), а также сделайте вывод о предпочтительных вариантах для банка и заемщика.

3. При учете векселя номиналом 500 тыс. руб. за 20 дней до погашения банк выплатил его владельцу 490 тыс. руб. Определите учетную ставку, использованную банком, при временной базе 360 дней.

4. Ссуда выдана на полгода по простой учетной ставке 12% годовых. Возвращаемая сумма составляет 500 тыс. руб. Определите сумму, полученную владельцем, и величину дисконта.

5. Сумма 2 млн руб. должна быть выплачена через 1,5 года. Определите ее современную величину, если ставка сложных процентов в первый год определена 5% годовых, а в последующие полгода она увеличивается на 0,5%.

6. Банк начисляет на вклады сроком полгода проценты:

а) по простой ставке 30% годовых,

б) по простой учетной ставке 26% годовых.

Определите, какой вариант более выгоден вкладчику, а какой банку.

7. Вексель номиналом 100 тыс. руб. был куплен банком за 2 года до срока погашения по простой учетной ставке 10% годовых. Определите сумму, полученную его владельцем, и дисконт банка.

8. Вексель номиналом 100 тыс. руб., выданный на срок с 12 марта по 23 декабря, был учтен банком 10 октября по простой учетной ставке 30% годовых. Определите дисконт банка.

9. Вексель номиналом 500 тыс. руб. куплен за полгода до его погашения по простой учетной ставке 12% и продан через 3 месяца по сложной учетной ставке 10% годовых. Определите доход, полученный от операции купли-продажи, и ее доходность по эффективной ставке простых процентов.

10. Обязательство уплатить через полгода 500 тыс. руб. с процентами (исходя из ставки процентов 6% годовых и временной базы 360

дней) куплено банком за 30 дней до наступления срока уплаты по учетной ставке 40% (временная база 365 дней). Определите сумму, полученную владельцем обязательства.

11. Вексель номиналом 100 тыс. руб. был куплен банком за 1,2 года до срока погашения по сложной учетной ставке 30% годовых. Определите сумму, полученную его владельцем, и дисконт банка.

12. Банк начисляет на срочные вклады сроком полгода проценты:

а) по сложной процентной ставке 8% годовых,

б) по сложной учетной ставке 7% годовых.

Определите, какой вариант более выгоден банку, а какой вкладчику.

13. Вексель номиналом 150 тыс. руб. был учтен банком за 120 дней до его погашения (временная база — 360 дней). Какую сумму получил предъявитель векселя, если дисконтирование осуществлялось по сложным обыкновенным процентам 12 раз за год. Дисконтная ставка равнялась 5%.

14. Ссуда выдана 25 января по простой учетной ставке 30%. Заемщик должен 20 марта возвратить 400 тыс. руб. Определите при годовом уровне инфляции 25% для точного числа дней ссуды и $K = 360$ дней:

а) учетную ставку, компенсирующую потери от инфляции;

б) выдаваемую сумму;

в) величину дисконта.

15. Кредит выдан 1 июня по простой учетной ставке 25%. Заемщик должен 20 сентября возвратить 800 тыс. руб. Определите при годовом уровне инфляции 60% годовых для точного и приближенного числа дней ссуды и $K = 360$ дней:

а) учетную ставку, компенсирующую потери от инфляции;

б) выдаваемую сумму;

в) величину дисконта.

16. Вексель номиналом 1 млн руб. со сроком погашения 20 декабря предъявлен в банк для оплаты 25 сентября того же года. Банк приобрел вексель по учетной ставке 25% годовых. Определите сумму, выплаченную владельцу векселя, и сумму дисконта банка при германской практике расчетов.

17. Вексель номиналом 1 млн руб. предъявлен в банк для оплаты за 100 дней до срока его погашения. Банк для определения своего дохода использовал ставку простых процентов в размере 20% годовых. Определите сумму, выплаченную владельцу векселя, и сумму дисконта банка при $K = 365$ дней.

18. Вексель номиналом 50 тыс. руб. со сроком погашения 15 ноября предъявлен для оплаты 30 августа того же года. Банк купил вексель по

учетной ставке 45% годовых. Определите сумму, выплаченную владельцу векселя, и сумму дисконта банка при французской практике расчетов.

19. Вексель номиналом 20 тыс. руб. был предъявлен в банк для оплаты за 80 дней до срока его погашения. Банк для определения своего дохода использовал ставку: а) простых, б) сложных процентов (12% годовых). Определите для каждого случая расчетов сумму, выплаченную предъявителю векселя, и сумму дисконта банка при $K = 360$ дней. Сделайте выводы.

20. При учете векселя номиналом 5 млн руб., до срока погашения которого осталось 150 дней, банк выплатил его предъявителю 3950 тыс. руб. Определите учетную ставку, которую использовал банк (при $K =$ 360 дней).

21. Ссуда выдана 20 апреля по простой учетной ставке 8% годовых. Заемщик должен 10 октября возвратить 300 тыс. руб. Определите сумму, полученную заемщиком, и величину дисконта при точном и приближенном числе дней ссуды и различных вариантах временной базы (год не високосный), а также сделайте вывод о предпочтительных вариантах для банка и заемщика.

ГЛАВА 4

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ СТАВОК РАЗЛИЧНЫХ ВИДОВ

4.1. ФИНАНСОВАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ СТАВОК

В финансово-экономических расчетах часто пользуются эквивалентными ставками. Эквивалентными называются ставки различного вида, применение которых в однотипных по значению операциях дает одинаковые финансовые результаты. Например, получение равных доходов от вклада с начислением процентов по простой и номинальной ставкам, от учета векселей и депозитных операций и т.д.

При нахождении эквивалентных процентных ставок составляют уравнение эквивалентности. Для этого сначала выбирается величина, выражения для которой в заданной финансовой операции можно получить с помощью ставок различного вида. Затем на основе равенства этих выражений составляется уравнение, по которому путем математических преобразований можно получить зависимости между ставками различного вида, обеспечивающие эквивалентность указанной финансовой операции.

4.2. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ПРОСТЫХ ПРОЦЕНТНЫХ И ПРОСТЫХ УЧЕТНЫХ СТАВОК

Составим уравнение эквивалентности для простой и учетной ставок процентов. Запишем выражения для процентной суммы с использованием простых процентов [см. (1.1)]: $I = P \times i \times n$, а также с простой учетной ставкой [см. (3.7)]: $D = S \times d \times n$. Приравнивая эти выражения, получаем уравнение эквивалентности:

$$P \times i \times n = S \times d \times n.$$

При этом возможны следующие ситуации:

1. Если срок ссуды измеряется годами, то

$$P \times n \times i = \frac{P}{1 - n \times d} n \times d.$$

Отсюда

$$i = \frac{d}{1 - n \times d}; \quad d = \frac{i}{1 - n \times i}. \qquad (4.1); (4.2)$$

Выражения (4.1) и (4.2) являются эквивалентными с простой ставкой процентов и учетной ставкой, так как они обеспечивают одинаковую эквивалентность ссудной операции.

2. Если срок ссуды измеряется в днях, то

$$P \times (\partial / K_i) \times i = \frac{P}{1 - (\partial / K_d) \times d} (d / K_d) \times d$$

Отсюда

$$i = \frac{K_i \times d}{K_d - \partial \times d}; \quad d = \frac{K_d \times i}{K_i + \partial \times i}. \qquad (4.3); (4.4)$$

Полученные эквивалентные ставки i и d могут быть использованы при сравнении доходности сделок, в которых применяются различные виды ставок. Из приведенных выше формул легко заметить, что с уменьшением $n(\partial/K)$ различие между эквивалентными ставками i и d становится менее заметным. В подтверждение этому в приведенной ниже таблице в качестве примера даются эквивалентные значения i для $d = 10\%$.

Число лет, n	0,2	0,5	1	2	3	5
i, %	10,02	10,05	11,11	12,5	14,28	20,0

Рассмотрим примеры расчета эквивалентных ставок.

Пример 44. Ставка процентов равна 9% годовых. Определите значение эквивалентной учетной ставки при выдаче ссуды.

◆ ◆ ◆

Используя формулу (4.2), получим:

$$d = \frac{0{,}09}{1 + 0{,}09 \cdot 1} = 0{,}083\ (8{,}3\%).$$

Пример 45. Вексель учтен за 3 месяца до срока его погашения по учетной ставке 6% годовых. Определите значение эквивалентной ставки простых процентов, определяющей доходность операции учета.

◆ ◆ ◆

Для определения эквивалентной ставки простых процентов используем формулу (4.3):

$$i = \frac{360 \cdot 0{,}06}{360 - 120 \cdot 0{,}06} = \frac{0{,}06}{1 - (1/3) \cdot 0{,}06} = \frac{0{,}06}{1 - 0{,}02} = 0{,}061\ (6{,}1\%).$$

Пример 46. Эффективность финансовой операции учета должна составлять 7% годовых (K_i = 360 дней). Определите требуемую учетную ставку для срока ссуды 180 дней при K_d = 365 дней.

◆ ◆ ◆

Учетную ставку определяем по формуле (4.4):

$$d = \frac{365 \cdot 0{,}07}{360 + 180 \cdot 0{,}07} = \frac{25{,}55}{372{,}6} = 0{,}069\ (6{,}9\%).$$

Пример 47. Вексель принят в банке по учетной ставке 40% годовых за 80 дней до срока его погашения. Определите значение эквивалентной ставки процентов, определяющей доходность операции учета, если при учете векселей K принимается равным 365 дней, а при исчислении процентов — 360.

◆ ◆ ◆

Для расчета доходности операции учета используем формулу (4.3):

$$i = \frac{360 \cdot 0{,}4}{365 - 80 \cdot 0{,}4} = \frac{144}{333} = 0{,}432\ (43{,}2\%).$$

4.3. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ПРОСТЫХ И СЛОЖНЫХ ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК

4.3.1. Простая и сложная эффективная процентные ставки

Для определения эквивалентных значений простых и эффективных сложных процентных ставок составим уравнения эквивалентности:

$$S = P(1 + ni) \text{ и } S = P(1 + i)^n .$$

Отсюда

$$P(1 + n \times i_{пр}) = P(1 + i_{сл})^n, \qquad (4.5)$$

где $i_{пр}$, $i_{сл}$ — ставки простых и сложных эффективных процентов соответственно.

Из уравнения (4.5) найдем ставку простых процентов, эквивалентную ставке сложных процентов:

$$i_{пр} = \frac{(1 + i_{сл})^n - 1}{n}. \qquad (4.6)$$

С другой стороны, ставка сложных процентов, эквивалентная простым, находится по формуле

$$i_{сл} = \sqrt[n]{1 + n \times i_{пр}} - 1. \qquad (4.7)$$

Из выражений (4.6) и (4.7) следует, что эквивалентные ставки существенно зависят от срока начисления процента (n).

Пример 48. Кредит предоставляется из расчета 6% сложных годовых. Какова должна быть эквивалентная ставка простых процентов при сроке кредита $n = 3$ года и $n = 6$ месяцев?

◆ ◆ ◆

По формуле (4.6) при $n = 3$ года находим:

$$i_{пр} = \frac{(1 + 0{,}06)^3 - 1}{3} = 0{,}064\ (6{,}4\%);$$

при $n = 6$ месяцев (или 0,5 года)

$$i_{пр} = \frac{(1 + 0{,}06)^{0{,}5} - 1}{0{,}5} = 0{,}059\ (5{,}9\%).$$

Как видим, чем больше срок начисления сложных процентов, тем выше эквивалентная ставка простых процентов.

Пример 49. Кредит предоставляется из расчета 6% простых годовых. Какова должна быть эквивалентная ставка сложных процентов при сроке кредита $n = 4$ года и $n = 6$ месяцев (или 0,5 года)?

◆ ◆ ◆

По формуле (4.7) находим: при $n = 4$ года

$$i_{сл} = \sqrt[4]{1 + 4 \cdot 0{,}06} - 1 = 0{,}055\ (5{,}5\%);$$

при $n = 6$ месяцев

$$i_{сл} = \sqrt[0{,}5]{1 + 0{,}5 \cdot 0{,}06} = (1 + 0{,}5 \cdot 0{,}06)^2 - 1 = 0{,}061\ (6{,}1\%).$$

Таким образом, чем больше срок начисления простых процентов, тем ниже эквивалентная ставка сложных процентов.

4.3.2. Простая и сложная номинальная процентные ставки

Если необходимо определить эквивалентные значения простой и сложной номинальной (сложной) ставок процентов, то составляют следующее уравнение эквивалентности:

$$P(1 + n \times i_{пр}) = P(1 + j / m)^{n \times m}.$$

Отсюда получаем

$$i_{пр} = \frac{(1 + j / m)^{m \times n} - 1}{n}; \qquad (4.8)$$

$$j = m\left(\sqrt[m \times n]{1 + n \times i_{пр}} - 1\right). \qquad (4.9)$$

Рассмотрим примеры расчета эквивалентных ставок данных видов.

Пример 50. Ссуда предоставлена на 2 года по номинальной сложной ставке 6% годовых. Начисления производятся через 3 месяца. Определите эквивалентную ставку простых процентов.

◆ ◆ ◆

Для расчета используем формулу (4.8):

$$i_{пр} = \frac{(1 + 0{,}06 / 4)^{4 \cdot 2} - 1}{2} = 0{,}047\ (4{,}7\%).$$

Пример 51. Ставка простых процентов по кредиту сроком на 4 года равна 8% годовых. Начисление производится раз в полгода. Определите эквивалентую номинальную сложную ставку процентов.

◆ ◆ ◆

Для расчета используем формулу (4.9):

$$j = 2\left(2\cdot\sqrt[4]{1+4\cdot 0{,}08} - 1\right) = 0{,}071\ (7{,}1\%).$$

4.4. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ПРОСТОЙ УЧЕТНОЙ СТАВКИ И СЛОЖНОЙ ЭФФЕКТИВНОЙ СТАВКИ ГОДОВЫХ ПРОЦЕНТОВ

Если необходимо определить эквивалентные значения простой учетной ставки и сложной эффективной ставки годовых процентов, то составляют следующее уравнение эквивалентности:

$$P\frac{1}{1-n_d \times d} = P(1+i_{\text{сл}})^{n_i},$$

где $n_d = \partial / K_d$ — период начисления учетной ставки; $n_i = \partial / K_i$ — период начисления простой процентной ставки; K_d; K_i — временные базы для начисления процентов по учетной и процентной ставкам, которые могут быть различными. Следовательно,

$$d = \frac{1}{n_d}\left[1-(1+i_{\text{сл}})^{-n_i}\right]; \quad d = \frac{K_d}{\partial}\left[1-(1+i_{\text{сл}})^{\partial/K_i}\right]. \quad (4.10);\ (4.11)$$

С другой стороны,

$$i = \frac{1}{\sqrt[\partial/K_i]{1-n_d \times d}} - 1; \quad i = \frac{1}{\sqrt[\partial/K_i]{1-(\partial/K_i)d}} - 1. \quad (4.12);\ (4.13)$$

Пример 52. Определите эффективную сложную ставку процентов при покупке обязательства по учетной ставке 5% со сроком оплаты через 120 дней ($K_i = 360$; $K_d = 360$).

◆ ◆ ◆

Для расчета доходности используем формулу (4.13):

$$i_э = \frac{1}{^{120/360}\sqrt{1-(120/360)\cdot 0{,}05}} - 1 = 0{,}053\ (5{,}3\%).$$

Пример 53. Доходность покупки финансового обязательства сроком оплаты через 183 дня составила 9 сложных процентов. Определите эквивалентное значение учетной ставки ($K_i = 366$; $K_d = 360$).

♦ ♦ ♦

Требуемое значение учетной ставки определим по формуле (4.11):

$$d = \frac{360}{183}\left[1-(1+0{,}09)^{-183/366}\right] = 1{,}967\left[1-\frac{1}{\sqrt{1{,}09}}\right] = 0{,}083\ (8{,}3\%).$$

4.5. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ СЛОЖНЫХ ЭФФЕКТИВНЫХ ПРОЦЕНТНЫХ И УЧЕТНЫХ СТАВОК

Уравнение эквивалентности для определения эквивалентных сложных эффективных процентных и сложных учетных ставок имеет вид:

$$P(1+i_{сл}) = \frac{P}{(1-d_{сл})^{n_d}}.$$

Отсюда получаем:

$$i = \frac{1}{\sqrt[n_i]{(1-d)^{n_d}}} - 1; \quad i_{сл} = \frac{1}{\sqrt[\partial/K_i]{(1-d)^{\partial/K_d}}} - 1; \quad (4.14);\ (4.15)$$

$$d = 1 - \frac{1}{\sqrt[n_d]{(1+i)^{n_i}}} \text{ или } d = 1 - \frac{1}{\sqrt[\partial/K_d]{(1+i)^{\partial/K_i}}}. \quad (4.16);\ (4.17)$$

Пример 54. Определите доходность в виде эффективной ставки сложных процентов при покупке векселя по сложной учетной ставке 40%, если срок его оплаты наступит через 180 дней ($K_i = 365$; $K_d = 360$).

♦ ♦ ♦

Для расчета доходности учета векселя в виде годовой ставки сложных процентов используем формулу (4.15):

$$i = \frac{1}{\sqrt[180/365]{(1-0{,}4)^{180/360}}} - 1 = 0{,}667\ (66{,}7\%).$$

4.6. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ЗНАЧЕНИЙ ЭФФЕКТИВНОЙ И НОМИНАЛЬНОЙ ГОДОВЫХ СТАВОК СЛОЖНЫХ ПРОЦЕНТОВ

Рассмотрим, какое соотношение существует между номинальной и соответствующей ей эффективной годовой процентной ставками.

Исходя из определений эффективной [см. формулу (2.1)] и номинальной [см. формулу (2.9)] процентных ставок составим уравнение эквивалентности:

$$P(1+i)^n = P(1+j/m)^{m\times n}. \qquad (4.18)$$

Отсюда получим:

$$i = (1 + j/m)^m - 1;\quad j/m = \sqrt[m]{1+i} - 1. \quad (4.19);\ (4.20)$$

Ставка (j/m) называется релятивной процентной, рассчитываемой за полгода, за квартал, за месяц и т.д. Номинальную ставку рассчитаем по формуле

$$j = m\left(\sqrt[m]{1+i} - 1\right). \qquad (4.21)$$

Отметим, что замена в договоре номинальной ставки j при условии, что она начисляется m раз в год, на эффективную i не изменяет финансовых результатов.

Пример 55. Облигация достоинством 100 тыс. руб. выпущена на 5 лет при номинальной ставке 50%. Определите:

1) наращенную стоимость облигации в конце срока займа, если наращение процентов производится один раз в год, в полугодие, в квартал. Проанализируйте доходность при различных вариантах наращения с позиций держателя и эмитента облигации;

2) эффективные процентные ставки по вариантам начисления;

3) наращенные стоимости облигации по эффективным процентным ставкам при различных вариантах начисления.

♦ ♦ ♦

1. Наращенные стоимости облигации при начислении процентов:

а) ежегодном [см. формулу (2.1)]

$$S_1 = 100\ (1 + 0,5)^5 = 100 \cdot 7,594 = 759,4 \text{ тыс. руб.};$$

б) полугодовом [см. формулу (2.9)]:

$$S_2 = 100\ (1 + 0,5\ /\ 2)^{2 \cdot 5} = 100 \cdot 9,298 = 929,8 \text{ тыс. руб.};$$

в) квартальном [см. формулу (2.9)]:

$$S_3 = 100\ (1 + 0,5\ /\ 4)^{4 \cdot 5} = 100 \cdot 10,55 = 1055 \text{ тыс. руб.}$$

Как видно, для кредиторов (держателей облигаций) выгоднее наращение стоимости по процентной ставке с квартальным начислением процентов, а для заемщика (эмитента облигации) — по годовой процентной ставке.

2. Эффективные процентные ставки при начислении процентов:

а) ежегодном

$$i_1 = 0,50 \text{ (50\% годовых)};$$

б) полугодовом [см. формулу (4.19)]:

$$i_2 = (1 + 0,5\ /\ 2)^2 - 1 = 0,562 \text{ (56,2\% годовых)};$$

в) квартальном [см. формулу (4.19)]:

$$i_3 = (1 + 0,5\ /\ 4)^4 - 1 = 0,602 \text{ (60,2\% годовых)}.$$

3. Наращенные стоимости облигации по эффективным процентным ставкам при начислении процентов:

а) ежегодном [см. формулу (2.1)]:

$$S_1 = 100\ (1 + 0,5)^5 = 759,4 \text{ тыс. руб.};$$

б) полугодовом [см. формулу (2.1)]:

$$S_2 = 100\ (1 + 0,562)^5 = 100 \cdot 9,298 = 929,8 \text{ тыс. руб.};$$

в) квартальном [см. формулу (2.1)]:

$$S_3 = 100\ (1 + 0,602)^5 = 100 \cdot 10,55 = 1055 \text{ тыс. руб.}$$

Сравните результаты пунктов 1 и 3 и сделайте самостоятельно соответствующие выводы об эквивалентности номинальных и эффективных процентных ставок.

Пример 56. Банк принимает срочные вклады на 3 месяца с выплатой дохода за срок в размере 15%. Определите эффективную годовую ставку процентов при вложении средств на 9 месяцев с переоформлением вклада и начислением процентов через каждые 3 месяца.

♦ ♦ ♦

1. Так как 15% — это релятивная ставка процентов за 3 месяца, то годовая номинальная ставка составит

$$15\% \times m = 15\% \times 4 = 60\%,$$

где m — число начислений в год ($m = 4$).

2. Годовую эффективную ставку определим по формуле: $(1+j/m)^{m\times n} - 1 = 1 + n \times i$. Поскольку $n = 1$, то $(1+j/m)^{m} = 1 + i_{г}$. Отсюда

$$i_{г} = (1+j/m)^{m} - 1 = (1+0{,}6/4)^{4} = 0{,}749\ (74{,}9\%).$$

3. Эффективную ставку при вложении средств на 9 месяцев (3/4 года) определим из формулы

$$(1+j/m)^{3m/4} = 1 + 3/4 \times i_{э};$$

$$i_{э} = \frac{(1+0{,}6/4)^{3\cdot 4/4} - 1}{3/4} = \frac{(1+0{,}15)^{3} - 1}{0{,}75} = 0{,}695\ (69{,}5\%).$$

Срок	Сумма, тыс. руб.	Номинальная ставка j, % годовых	Релятивная ставка j/m, %	Эффективная ставка за период начисления i, %
3 мес.	115	60	15	60
6 мес.	132,25	60	через	64,5
9 мес.	152,09	60	каждые	69,5
1 год	174,9	60	3 месяца	74,9

Введем в пример 56 дополнительное условие: пусть величина вклада составит 100 тыс. руб. Рассчитаем эффективные и номинальные процентные ставки через каждые 3 месяца. Результаты расчета приведены в таблице.

Рассчитаем, например, наращенную сумму по номинальной (а) и эффективной (б) процентным ставкам через 9 месяцев после вложения средств. Сравним результаты расчетов.

а) $S_1 = 100(1+0{,}15)^{9\cdot 4/12} = 100(1 + 0{,}15)\ 3 = 152{,}09$ тыс. руб.

б) $S_2 = 100\,(1+0{,}749)^{270/360} = 100\,(1+0{,}749)^{3/4} = 100\sqrt[4]{(1+0{,}749)^{3}} = 100 \cdot 1{,}5209 = 152{,}09$ тыс. руб.

Как видим, наращенная сумма по обоим вариантам расчета составила 152,09 тыс. руб.

4.7. ДОХОДНОСТЬ УДЕРЖАНИЯ КОМИССИОННЫХ

Рассмотрим несколько случаев расчета доходности при удержании банком комиссионных.

Случай 1. Пусть при выдаче ссуды по простой ставке процентов сроком на n лет с суммы ссуды удерживаются комиссионные. Если для расчета доходности используется ставка простых процентов, то уравнение эквивалентности будет иметь вид:

$$P(1 + n \times i_{\text{пр}}) = (P - \Delta P)(1 + n \times i_{\text{э.пр}}),$$

где ΔP — увеличение первоначальной суммы, связанное с комиссионными; $i_{\text{э.пр}}$ — эффективная ставка простых процентов.

Величина комиссионных $\Delta P = h \times P$, где h — доля комиссионных в размере ссуды (десятичная дробь). Отсюда

$$P(1 + n \times i_{\text{э.пр}}) = P(1 - h)(1 + n \times i_{\text{э.пр}}).$$

Из этого уравнения получаем выражение для эффективной ставки простых процентов, определяющей доходность финансовой операции:

$$i_{\text{э.пр}} = \frac{n \times i_{\text{пр}} + h}{n(1 - h)} \qquad (4.22)$$

или

$$i_{\text{э.пр}} = \frac{(\partial / K) \times i_{\text{пр}} + h}{(\partial / K)(1 - h)}. \qquad (4.23)$$

Случай 2. Если для расчета доходности операции по выдаче ссуды по простой ставке процентов сроком на n лет и удержания с суммы ссуды комиссионных используется ставка сложных процентов, то уравнение эквивалентности наращенной сумме будет иметь вид:

$$P(1 + ni_{\text{пр}}) = (P - \Delta P)(1 + i_{\text{э.сл}})^n$$

или

$$P(1 + n \times i_{\text{пр}}) = P(1 - h)(1 + i_{\text{э.сл}})^n.$$

Из этого уравнения можно рассчитать доходность операции по выдаче кредита по простым процентам с учетом комиссионных, измеряемую в виде эффективной ставки сложных процентов:

$$i_{э.сл} = \sqrt[n]{\frac{1 + n \times i_{пр}}{1 - h}} - 1 \qquad (4.24)$$

или

$$i_{э.сл} = \sqrt[\partial / K]{\frac{1 + (\partial / K) i_{пр}}{1 - h}} - 1. \qquad (4.25)$$

Случай 3. Если при выдаче кредита используются сложные проценты (q), то уравнение эквивалентности с выплатой комиссионных будет иметь вид:

$$P(1 + q)^n = P(1 - h)(1 + i_{э.сл})^n \cdot$$

Эффективную ставку сложных процентов можно рассчитать следующим образом:

$$i_{э.сл} = \frac{1 + q}{\sqrt[n]{1 - h}} - 1. \qquad (4.26)$$

Случай 4. Если при операции учета по простой учетной ставке выплачиваются комиссионные, то уравнение эквивалентности будет иметь вид:

$$\frac{P}{1 - n_d \times d} = P(1 - h)(1 + i_{э.сл})^{n_i},$$

где $n_d = \partial / K_d$; $n_i = \partial / K_i$ — периоды операции по учету векселей. Выражение для эффективной ставки сложных процентов с удержанием комиссионных имеет вид:

$$i_{э.сл} = \sqrt[n_i]{\frac{1}{(1 - n_d \times d)(1 - h)}} - 1 \qquad (4.27)$$

или

$$i_{э.сл} = \sqrt[\partial/K_i]{\frac{1}{(1-\partial / K_d \times d)(1-h)}} - 1. \qquad (4.27)$$

Случай 5. Если для измерения эффективности удержания комиссионных при операции учета используется эффективная ставка простых процентов, то уравнение эквивалентности будет иметь вид:

$$\frac{P}{1-n_d \times d} = P(1-h)(1+i_{э.пр}).$$

Отсюда получаем выражение для эффективной ставки простых процентов с удержанием комиссионных:

$$i_{э.пр} = \frac{1}{n_i}\left[\frac{1}{(1-n_d \times d)(1-h)} - 1\right]; \qquad (4.29)$$

или

$$i_{э.пр} = \frac{K_i}{\partial}\left[\frac{1}{(1-\partial/K_d \times d)(1-h)} - 1\right]. \qquad (4.30)$$

Рассмотрим примеры расчетов финансовых операций с удержанием комиссионных.

Пример 57. При выдаче кредита под 40% годовых удерживаются комиссионные в размере 1% суммы ссуды. Определите доходность финансовой операции для срока ссуды 180 дней (K = 360) при использовании ставок простых и сложных процентов. Сравните полученный результат с доходностью без выплаты комиссионных. Сделайте выводы.

♦ ♦ ♦

1. Доходность операции в виде эффективной ставки простых процентов определим по формуле (4.23):

$$i_{э.пр} = \frac{(180/360)\cdot 0{,}4 + 0{,}01}{(180/360)(1-0{,}01)} = \frac{0{,}21}{0{,}495} = 0{,}424 \ (42{,}4\%).$$

2. Доходность операции в виде ставки сложных процентов определим по формуле (4.25):

$$i_{э.пр} = \sqrt[180/360]{\frac{1+(180/360)\cdot 0{,}4}{1-0{,}01}} - 1 = 0{,}469 \ (46{,}9\%).$$

3. Без выплаты комиссионных эффективная ставка сложных процентов в соответствии с формулой (4.7) будет равна

$$i_{э.пр} = \sqrt[180/360]{1 + (180/360) \cdot 0,4} - 1 = 0,44 \ (44\%).$$

4. Изменение доходности операции за счет выплаты комиссионных составит: $\Delta i_э = 46,9 - 44 = 2,9\%$.

Таким образом, доходность операции по выдаче ссуды с выплатой комиссионных будет выше в связи с тем, что при удержании комиссионных сумма фактически выданной ссуды уменьшается.

Пример 58. Определите изменения доходности финансовой операции банка за счет удержания комиссионных из расчета 2% суммы ссуды под сложные проценты (55 и 75%), если известно, что ссуда выдана на 4 года.

♦ ♦ ♦

Случай 1. Ставка сложных процентов составляет 55%. Эффективная ставка сложных процентов [см. формулу (4.26)]

$$i_{э.сл} = \frac{1 + 0,55}{\sqrt[4]{1 - 0,02}} - 1 = 0,558 \ (55,8\%).$$

Увеличение эффективности ссудной операции составит

$$\Delta i_э = i_{э.сл} - q = 0,558 - 0,55 = 0,008 \ (0,8\%).$$

Случай 2. При ставке сложных процентов 75%

$$i_{э.сл} = \frac{1 + 0,75}{\sqrt[4]{1 - 0,02}} - 1 = 0,759 \ (75,9\%).$$

Увеличение эффективности ссудной операции составит:

$$\Delta i_э = i_{э.сл} - q = 0,759 - 0,75 = 0,009 \ (0,9\%).$$

Как видим, эффективность ссудной операции за счет удержания комиссионных возрастает в зависимости от роста ставок сложных процентов.

Пример 59. Обязательство учтено в банке по ставке 50% за 183 дня до его оплаты. При учете векселя с его владельца удержаны комиссионные в размере 1,5%. Определите доходность операции, рассчитанную по эффективным ставкам простых и сложных процентов при $K_i = 366$ и $K_d = 360$ дней. Рассчитайте изменение в доходности операций с удержанием и без удержания комиссионных.

♦ ♦ ♦

1. Доходность операции с удержанием комиссионных при эффективной ставке сложных процентов [см. формулу (4.28)]

$$i_{э.сл} = \sqrt[183/366]{\frac{1}{(1-183/360\cdot 0{,}5)(1-0{,}015)}} - 1 = 0{,}851\ (85{,}1\%).$$

2. Доходность без удержания комиссионных операции при эффективной ставке сложных процентов [см. формулу (4.7)]

$$i_э^* = \sqrt[183/366]{\frac{1}{1-183/366\cdot 0{,}5}} - 1 = 0{,}778\ (77{,}8\%).$$

3. Увеличение доходности операции за счет удержания комиссионных при ставке сложных процентов составит

$$\Delta i_{э.сл} = i_{э.сл} - i_э^* = 0{,}851 - 0{,}778 = 0{,}073\ (7{,}3\%).$$

4. Доходность операции с удержанием комиссионных при эффективной ставке простых процентов [см. формулу (4.30)]

$$i_{э.пр} = \frac{366}{183}\left[\frac{1}{(1-183/360\cdot 0{,}5)(1-0{,}015)} - 1\right] = 0{,}721\ (72{,}1\%).$$

5. Доходность операции без удержания комиссионных при эффективной ставке простых процентов [см. формулу (4.3)]

$$i^*_{э.пр} = \frac{366\cdot 0{,}5}{360 - 183\cdot 0{,}5} = 0{,}682\ (68{,}2\%).$$

6. Увеличение доходности операции за счет удержания комиссионных при ставке простых процентов составит

$$\Delta i_{э.сл} = i_{э.пр} - i_{э.пр} = 0{,}721 - 0{,}682 = 0{,}039\ (3{,}9\%).$$

4.8. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Вексель учтен за полгода до срока его погашения по простой учетной ставке 5% годовых. Определите значение эквивалентной ставки простых процентов.

2. Кредит выдан на 2 года по простой ставке процентов 6% годовых. Определите эквивалентную ставку сложных процентов.

3. Вексель был учтен в банке за 100 дней до срока его погашения по простой ставке 6% годовых. Определите значение эквивалентной ставки простых процентов (K_d = 360 и K_i = 366 дней).

4. На срочный вклад начисляются ежеквартально проценты по номинальной ставке сложных процентов 12% годовых. Определите эквивалентную годовую ставку сложных процентов.

5. На депозитный сертификат сроком 2 года начисляются простые проценты по ставке 5% годовых. Определите эквивалентную ставку сложных процентов.

6. На вклад ежеквартально (а), ежемесячно (б) начисляются проценты по номинальной годовой ставке 15%. Определите доходность вклада по сложной годовой ставке процентов по двум вариантам.

7. Вексель куплен банком по простой учетной ставке 4% годовых за 90 дней до срока его погашения. Найдите значение эквивалентной ставки процентов, определяющей доходность операции учета, если расчетное число дней в году при учете векселей принимается равным 360, а при начислении процентов — 365.

8. Кредит предоставлен из расчета 24% годовых по ставке сложных процентов. Какова должна быть эквивалентная ставка простых процентов при сроке кредита: а) год; б) 3 месяца; в) 2 года? Сделайте выводы.

9. Банк начисляет сложные проценты на вклады по номинальной ставке 29% годовых. Определите доходность по годовой ставке простых процентов в случае их ежемесячного начисления.

10. Кредит предоставляется из расчета 16 простых годовых процентов. Рассчитайте эквивалентную ставку сложных процентов при сроке кредита: а) 6 месяцев; б) 1 год; в) 2 года. Сделайте выводы.

11. Банк начисляет сложные проценты на вклады по номинальной ставке 16% годовых. Определите доходность вкладов по годовой ставке сложных процентов при их ежемесячном начислении.

12. Определите доходность в виде годовой ставки сложных процентов от покупки векселя по учетной ставке 25%, если срок его оплаты наступит через 150 дней (K_d = 365 и K_i = 360 дней).

13. Доходность операции от учета векселя составляет 16% годовых по ставке сложных процентов. Срок оплаты векселя наступит через 180 дней. Определите значение эквивалентной учетной ставки (K_i = 365 и K_d = 360 дней).

14. Определите доходность в виде годовой ставки сложных процентов от учета векселя по сложной учетной ставке 25% годовых, если срок его оплаты наступит через 180 дней (K_i = 365 и K_d = 360 дней).

15. Облигация достоинством 500 тыс. руб. выпущена на 3 года при номинальной ставке 6% годовых. Определите:

а) наращенную стоимость облигации в конце срока займа, если наращение процентов происходит один раз в полугодие, в квартал;

б) рассчитайте эффективные процентные ставки по вариантам начисления;

в) определите наращенные стоимости облигации по эффективным процентным ставкам по вариантам начисления.

Сделайте выводы о доходности вариантов начисления с позиций держателя и эмитента облигации.

16. Банк принимает срочные вклады на месяц с выплатой дохода за срок 10%. Определите эффективную ставку процентов при вложении средств на: а) 6 месяцев; б) 9 месяцев; в) год с переоформлением вклада и начисленных процентов через каждый месяц.

17. Облигация областного займа достоинством 1 тыс. руб. выпущена на 3 года при номинальной ставке 6% годовых. Определите:

а) наращенную стоимость облигации в конце срока займа, если проценты выплачиваются в конце года, один раз в полугодие, в квартал;

б) эффективные процентные ставки по вариантам начисления;

в) наращенные стоимости облигации по эффективным процентным ставкам по вариантам начисления.

Сделайте выводы о доходности вариантов начисления с позиций держателя и эмитента облигации.

18. На вклад ежеквартально начисляются проценты по номинальной годовой ставке 25%. Определите доходность вклада по сложной годовой ставке процентов.

19. Кредит 50 тыс. руб. выдан банком предприятию на 3 года при номинальной ставке 7% годовых. Определите:

а) погашаемую сумму в конце срока займа, если наращение процентов производится один раз в полугодие, в квартал;

б) эффективные процентные ставки по вариантам начисления;

в) наращенные стоимости по эффективным процентным ставкам по вариантам начисления.

Сделайте выводы о доходности вариантов начисления с позиции кредитора (банка) и заемщика (предприятия).

20. Банк принимает срочные вклады на полгода с выплатой дохода за срок в размере 15%. Определите эффективную годовую ставку процентов при вложении средств на 1,5 года с переоформлением вклада и начислением процентов через каждые полгода.

21. Банк принимает вклады от населения на 1 месяц с выплатой дохода за срок в размере 5%. Определите эффективную годовую ставку процентов на 6 месяцев с переоформлением вклада и начислением процентов через каждый месяц.

22. Найдите полугодовую релятивную процентную ставку, если годовая процентная ставка составляет 25% годовых.

23. Определите квартальную релятивную процентную ставку, если годовая ставка равна 18%.

24. Рассчитайте релятивную процентную ставку для 32 дней, если годовая процентная ставка составит 18% годовых (временная база 365 дней).

25. При выдаче ссуды по простой ставке процентов 15% годовых банк удерживает комиссионные в размере 0,5% суммы ссуды. Найдите доходность операции в виде эффективной простой ставки процентов для ссуды сроком полгода.

26. Сумма выдана на 3 квартала под 8% годовых. При выдаче ссуды удержаны комиссионные в размере 0,2% суммы ссуды. Определите доходность ссудной операции в виде эффективной ставки простых процентов.

27. При выдаче ссуды под 6% годовых удерживаются комиссионные в размере 0,5% суммы ссуды. Определите доходность ссудной операции при сроке выдачи ссуды 180 дней (K = 360 дней) и изменении доходности в виде ставок сложных и простых процентов. Определите изменение доходности за счет удержания комиссионных.

28. Определите изменение эффективности финансовой операции при ссуде, выданной на 4 года под сложные проценты, за счет удержания комиссионных из расчета 1% суммы ссуды при ставке сложных процентов: а) 45%; б) 60%; в) 80%.

29. Вексель учтен по ставке 16% за 120 дней до его оплаты. При учете векселя с его владельца удержаны комиссионные в размере 0,2%. Определите доходность операции учета с удержанием комиссионных в виде эффективных ставок: а) простых; б) сложных процентов (K_i = 366 и K_d = 360 дней). Рассчитайте изменение доходности финансовой операции за счет удержания комиссионных по ставке: а) простых; б) сложных процентов.

ГЛАВА 5

ФИНАНСОВЫЕ РЕНТЫ

5.1. ПОНЯТИЕ ФИНАНСОВЫХ РЕНТ И ИХ ВИДЫ

Достаточно часто в финансовых операциях предусматриваются не разовые платежи, а множество распределенных во времени выплат. К подобным операциям относят, например, получение и погашение долгосрочного кредита, выплаты процентов по облигациям, взносы в различные фонды и др. Последовательный ряд выплат называют **потоком платежей**. Ряд последовательных платежей, выплачиваемых через равные промежутки времени вне зависимости от происхождения этих платежей, их назначения, целей, называют **финансовой рентой**, или **аннуитетом**.

Финансовая рента характеризуется следующими основными параметрами:

- величиной отдельного платежа;
- периодом ренты (интервал времени между последовательными платежами);
- сроком ренты (интервал времени от начала ренты до конца ее последнего периода);
- процентной ставкой (ставка, используемая при наращении или дисконтировании платежей, из которых состоит рента). Процентная ставка в каждом конкретном случае рассматривается особо, так как иногда она может быть непосредственно задаваемой величиной процентной ставки. В других условиях она может рассматриваться на уровне нормы доходности от альтернативного варианта вложения средств или минимально требуемой нормы доходности предприятий — цены капитала.

Отдельные виды рент могут характеризоваться дополнительными параметрами: числом платежей в год; моментом платежей (в начале или конце каждого периода) и др.

Ренты различаются между собой по целому ряду признаков:

- по продолжительности периода — годовые (один платеж в год), полугодовые, *p*-срочные (*p* — число платежей в году), с периодом, превышающим год;

• по числу отдельных платежей — временные или ограниченные (с конечным числом платежей), бесконечные (вечные);

• по величине платежей — постоянные (с равными платежами), переменные (с неравными платежами);

• по числу начисления процентов — с начислением процентов один раз в год, несколько раз в год;

• по моментам выплат — обычные (постнумерандо), осуществляемые в конце соответствующих периодов, и пренумерандо, осуществляемые в начале периодов.

Общее для всех финансовых рент свойство, согласно которому платежи производятся через равные интервалы времени, позволило разработать стройную теорию их количественного анализа. При этом анализе обычно требуется решить две задачи:

1) определить наращенную сумму — сумму всех платежей с начисленными на них процентами к концу срока;

2) вычислить современную (приведенную) величину — сумму всех платежей, дисконтированных на момент времени, совпадающий с началом потока платежей.

Эти два показателя представляют в виде одного числа весь поток платежей за весь срок их выплат и с учетом моментов выплат. Необходимость определения наращенной суммы возникает при анализе финансовых операций, связанных, например, с определением накопленной задолженности. Современная величина ренты берется за основу для расчетов по погашению долгосрочных займов частями, при оценке и сравнении различного рода долгосрочных обязательств и поступлений средств, эффективности, расчетов по страхованию и т.д.

5.2. ПОСТОЯННАЯ ФИНАНСОВАЯ РЕНТА ПОСТНУМЕРАНДО

5.2.1. Определение наращенной суммы

Рассмотрим методы определения наращенной суммы для постоянных годовых и p-срочных рент, а также ее современной величины.

Годовые постоянные ренты. Пусть в конце каждого года в течение n лет в банк вносятся суммы, равные R. В целом эти платежи представляют собой постоянную обычную ренту (аннуитет). Платежи этой ренты будут приносить проценты соответственно $(n-1)$; $(n-2)$;...; 2; 1; 0 лет, а наращенная сумма к концу срока составит $R(1+i)^{n-1}$; $R(1+i)^{n-2}$;...; $R(1+i)$; R.

Перепишем этот ряд в обратном порядке. Он будет представлять собой геометрическую прогрессию со знаменателем $(1 + i)$ и первым членом R. Найдем сумму n членов этой прогрессии. Искомая сумма S составит

$$S = R\frac{(1+i_{сл})^n - 1}{(1+i_{сл}) - 1} = R\,\frac{(1+i_{сл})^n - 1}{i_{сл}} = R \times k_н, \qquad (5.1)$$

где $k_н$ — множитель наращения, представляющий собой наращенную сумму ренты, член которой равен 1, т.е.

$$k_н = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \ldots + (1+i)^2 + (1+i) + 1$$

Приведем примеры расчета наращенной суммы.

Пример 60. Срок ренты 5 лет, выплата заемщиком раз в конце года по 400 ден. ед., ставка равна 5%. Определите накопленную сумму.

◆ ◆ ◆

Используя формулу (5.1), находим накопленную сумму:

$$S = 400\frac{(1+0{,}05)^5 - 1}{0{,}05} = 400 \cdot 5{,}526 = 2210 \text{ ден. ед.}$$

Постоянная p-срочная рента. Рассмотрим случай, когда платежи осуществляются p раз в году. Общее число платежей при сроке ренты n лет будет равно $n \times p$. Соотношение для сумм платежей R_p с начисленными на них процентами будет иметь вид $R_p(1 + i_{сл})^{(n\times p-1)/p}$;...; $R_p(1 + i_{сл})^{1/p}$; R_p. Коэффициент наращения

$$k_н^p = \frac{(1+i_{сл})^n - 1}{(1+i_{сл})^{1/p} - 1}. \qquad (5.2)$$

Наращенная сумма

$$S = R_p\,\frac{(1+i_{сл})^n - 1}{(1+i_{сл})^{1/p} - 1} = R_p \times k_н^p. \qquad (5.3)$$

В случае, если сумма платежей в течение года задана ($R = p \times R_p$), наращенная сумма

$$S = R\frac{(1+i_{\text{сл}})^n - 1}{p[(1+i_{\text{сл}})^{1/p} - 1]} = R \times k_{\text{н}}. \qquad (5.4)$$

Общий случай. Рента выплачивается p раз в год, а на платежи начисляются m раз в год проценты. При этом

$$S = R\frac{(1+j/m)^{m \times n} - 1}{p[(1+j/m)^{m/p} - 1]}. \qquad (5.5)$$

С помощью выражения (5.5) можно получить формулы для частных случаев:

а) если $p = m$, то

$$S = R\frac{(1+j/m)^{m \times n} - 1}{j}. \qquad (5.6)$$

б) если $p = m = 1$, то получаем выражение (5.1);

в) если $m = 1$, то приходим к выражению (5.4);

г) если $p = 1$, то имеем

$$S = R\frac{(1+j/m)^{m \times n} - 1}{(1+j/m)^m - 1}. \qquad (5.7)$$

Пример 61. В страховой фонд средств предприятием ежегодно перечисляется 1 тыс. руб. На эти средства начисляются сложные проценты по годовой ставке 7%. Определите сумму через 5 лет для следующих условий:

1) поступление взноса в конце года, начисление процентов раз в год;
2) поступление взноса в конце года, начисление процентов поквартально;
3) поступление взносов ежеквартально, начисление процентов по полугодиям;
4) поступление взносов по полугодиям, начисление процентов поквартально;
5) поступление взносов и начисление процентов ежеквартально.

♦ ♦ ♦

Наращенную сумму для первого условия ($p = m = 1$) рассчитаем по формуле (5.1):

$$S = 1\,\frac{(1+0{,}07)^5 - 1}{0{,}07} = 5{,}751 \text{ тыс. руб.}$$

Наращенную сумму для второго условия ($p = 1$, $m = 4$) определяем по формуле (5.7):

$$S = 1\,\frac{(1+0{,}07/4)^{4 \cdot 5} - 1}{(1+0{,}07/4)^4 - 1} = \frac{0{,}4148}{0{,}0719} = 5{,}769 \text{ тыс. руб.}$$

В третьем случае ($p = 4$, $m = 2$) рассчитываем наращенную сумму по формуле (5.5):

$$S = 1 \frac{(1+0{,}07/2)^{2\cdot 5}-1}{4[(1+0{,}07/2)^{2/4}-1]} = \frac{0{,}4116}{0{,}0694} \approx 5{,}916 \text{ тыс. руб.}$$

Для четвертого условия ($p = 2$, $m = 4$)

$$S = 1 \frac{(1+0{,}07/4)^{4\cdot 5}-1}{2[(1+0{,}07/4)^{4/2}-1]} = \frac{0{,}4148}{0{,}0706} \approx 5{,}875 \text{ тыс. руб.}$$

В пятом случае ($p = m = 4$) наращенную сумму определяем по формуле (5.6):

$$S = 1 \frac{(1+0{,}07/4)^{4\cdot 5}-1}{0{,}07} = \frac{0{,}4148}{0{,}07} = 5{,}926 \text{ тыс. руб.}$$

Как видим из расчетов, значения наращенных сумм зависят от условий поступления взноса и начисления процента. Самая большая сумма получается при поступлении платежей и начислении процентов ежеквартально.

5.2.2. Определение современной величины ренты

Современной величиной ренты (A) называется сумма всех дисконтированных членов ренты на начало ее срока.

Расчет годовой ренты. Найдем современную величину годовой ренты, выплачиваемой в течение n лет по процентной ставке i в конце периода ренты. Рента немедленная, т.е. момент оценки приведенной величины совпадает с началом ренты. В этих условиях дисконтированные платежи образуют ряд геометрической прогрессии с первым членом и знаменателем, равным $1 / (1 + i_{сл})$.

Современная величина постоянной финансовой ренты

$$A = R\frac{1-(1+i_{сл})^{-n}}{i_{сл}} = R \times a_n, \qquad (5.8)$$

где a_n — коэффициент приведения (дисконтный множитель) постоянной ренты.

П р и м е р 62. Определите современную величину ренты, которая накопилась в результате ежегодных взносов в размере 5 тыс. руб. в течение 4 лет. Процентная ставка — 35%.

♦ ♦ ♦

1. Определяем дисконтный множитель:

$$a_n = \frac{1-(1+0{,}35)^{-4}}{0{,}35} = 1{,}99695.$$

2. Рассчитываем современную величину ренты:

$$A = 5 \times 1{,}99695 = 9{,}89 \text{ тыс. руб.}$$

Расчет p-срочной ренты. Современная величина p-срочной ренты

$$A = R_p \times a_n^p. \tag{5.9}$$

Здесь a_n^p — коэффициент приведения для p-срочной ренты:

$$a_n^p = \frac{1-(1+i_{\text{сл}})^{-n}}{(1+i_{\text{сл}})^{1/p}-1}. \tag{5.10}$$

Подставив (5.10) в формулу (5.9), получим:

$$A = R_p \frac{1-(1+i_{\text{сл}})^{-n}}{(1+i_{\text{сл}})^{1/p}-1}. \tag{5.11}$$

Если в расчетах для p-срочной ренты задается сумма годовых платежей $A = R_p \times a_n^p = R \times a_n$, то с учетом того, что $R = p \times R_p$, получим:

$$A = R\frac{1-(1+i_{\text{сл}})^{-n}}{p\,[(1+i_{\text{сл}})^{1/p}-1]}. \tag{5.12}$$

Общий случай. В самом общем случае, когда рента p-срочная и начисление процентов производится m раз в год, современная величина этой ренты

$$A = R\frac{1-(1+j/m)^{-m\times n}}{p[(1+j/m)^{m/p}-1]}. \tag{5.13}$$

В частных случаях выражение (5.13) будет иметь следующий вид:

а) если $p = m$, то

$$A = R\frac{1 - (1 + j/m)^{-m \times n}}{j}; \qquad (5.14)$$

б) если $p = m = 1$, то получаем выражение (5.8);

в) если $m = 1$, то имеем выражение (5.12);

г) если $p = 1$, то

$$A = R\frac{1 - (1 + j / m)^{-m \times n}}{(1 + j / m)^{m} - 1}. \qquad (5.15)$$

Рассмотрим примеры расчета современной величины ренты в приведенных случаях.

Пример 63. Определите современную величину ренты с платежом 10 тыс. руб., осуществляемым ежеквартально в течение 6 лет по сложной процентной ставке 8% годовых.

◆ ◆ ◆

Современная величина ренты при заданных условиях может быть рассчитана по формуле (5.12):

$$A = 10\frac{1 - (1 + 0{,}08)^{-6}}{4\,[(1 + 0{,}08)^{1/4} - 1]} = \frac{0{,}3698}{0{,}0777} = 10 \cdot 4{,}7593 = 47{,}593 \text{ тыс. руб.}$$

Пример 64. Определите современную величину финансовой ренты, ежегодные выплаты по которой в размере 2 тыс. руб. осуществляются в течение 2 лет по сложной ставке 40% годовых при следующих условиях:

а) выплаты ежегодные, начисление процентов поквартальное;

б) выплаты и начисление процентов поквартальные.

◆ ◆ ◆

В первом случае ($p = 1$; $n = 2$; $m = 4$) используем формулу (5.15):

$$A = 2\frac{1 - (1 + 0{,}4 / 4)^{-4 \cdot 2}}{(1 + 0{,}4 / 4)^{4} - 1} = 2\frac{0{,}534}{0{,}464} = 2{,}302 \text{ тыс. руб.}$$

Во втором случае ($m = p = 4$; $n = 2$) используем формулу (5.14):

$$A = 2\frac{1 - (1 + 0{,}4 / 4)^{-4 \cdot 2}}{0{,}4} = 2\frac{0{,}534}{0{,}4} = 2{,}67 \text{ тыс. руб.}$$

Как видим, современная величина ренты зависит от условий поступления взноса и начисления процентов. Бо'льшая сумма получена при выплатах и начислении процентов поквартально.

5.2.3. Эквивалентность наращенной суммы и современной величины ренты

Современная величина ренты эквивалентна в финансовом смысле самой ренте и представляет собой ее оценку в виде некоторой величины, приведенной к началу срока. Наращенная сумма является некоторым «обобщением» ренты, но приведенной к концу ее срока. Между этими величинами должна существовать определенная зависимость. Если A есть оценка ренты на начало срока, а S — наращенная ее сумма, то наращение процентов на величину A за n периодов дает сумму, равную S:

$$A(1 + i_{сл})^n = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^n = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} = S;$$

$$S = A(1 + i_{сл})^n . \qquad (5.16)$$

Аналогично дисконтирование величины S приведет к величине A, т.е.

$$A = S(1 + i_{сл})^{-n} . \qquad (5.17)$$

При начислении процентов m раз в году эти зависимости будут иметь вид:

$$S = A(1+j/m)^{m \times n} ; \qquad (5.18)$$

$$A = S(1+j/m)^{-m \times n} . \qquad (5.19)$$

5.2.4. Определение размера очередного платежа и срока постоянной финансовой ренты

В финансовых расчетах часто возникают ситуации, когда необходимо оценить размер очередного платежа при заданном сроке ренты и, наоборот, срок ренты при заданном размере платежа. Рассмотрим решение таких задач.

Расчет размера платежа. Размер платежа можно определить из формулы (5.1) или (5.8). При этом получаем

$$R = \frac{S}{k_{\text{н}}} = \frac{S \times i_{\text{сл}}}{(1 + i_{\text{сл}})^n - 1}; \tag{5.20}$$

$$R = \frac{A}{a_{\text{н}}} = \frac{A \times i_{\text{сл}}}{1 - (1 + i_{\text{сл}})^{-n}}. \tag{5.21}$$

В расчетах с p-срочной рентой пользуются формулами (5.3) и (5.11):

$$R_p = \frac{S\,[(1 + i_{\text{сл}})^{1/p} - 1]}{(1 + i_{\text{сл}})^n - 1}; \tag{5.22}$$

$$R_p = \frac{A\,[(1 + i_{\text{сл}})^{1/p} - 1]}{1 - (1 + i_{\text{сл}})^{-n}}. \tag{5.22}$$

Аналогично можно вывести формулы расчета величины взносов для любого случая начисления процентов.

Рассмотрим примеры расчета размера очередного платежа.

Пример 65. Определите размер ежегодных взносов, вносимых в конце года, при ставке 40% годовых в следующих случаях:

а) для создания через 3 года фонда в размере 50 тыс. руб.;

б) для погашения через 3 года текущей задолженности, равной 50 тыс. руб.

◆ ◆ ◆

В первом случае известна наращенная сумма ренты, поэтому для расчетов воспользуемся формулой (5.20):

$$R = \frac{50 \cdot 0{,}4}{(1 + 0{,}4)^3 - 1} = \frac{20}{1{,}744} = 11{,}468 \text{ тыс. руб.}$$

Во втором случае известна современная величина ренты, поэтому для расчетов воспользуемся формулой (5.21):

$$R = \frac{50 \cdot 0{,}4}{1 - (1 + 0{,}4)^{-3}} = \frac{20}{0{,}6356} = 31{,}466 \text{ тыс. руб.}$$

Таким образом, для создания фонда необходим взнос в размере 11,468 тыс. руб., для погашения долга — 31,466 тыс. руб.

Пример 66. К концу пятилетнего периода необходимо создать фонд 1 млн ден. ед. Фонд создается равными взносами в конце каждого полугодия. На взносы 2 раза в год начисляются проценты, номинальная ставка равна 60%. Каков должен быть разовый взнос?

◆ ◆ ◆

По условию задачи рента имеет следующие характеристики: $S = 1$ млн ден. ед.; $p = m = 2$; $i = 0{,}6$; $n = 5$. По формуле наращенной суммы (5.6) находим величину взноса:

$$S = R\frac{(1 + j/m)^{m\times n} - 1}{j} \to R = \frac{S \times j}{(1 + j/m)^{m\times n} - 1};$$

$$R = \frac{1\cdot 0{,}6}{(1 + 0{,}6/2)^{2\cdot 5} - 1} = \frac{0{,}6}{12{,}786} = 0{,}046926 \text{ млн ден. ед.} = 46{,}926 \text{ тыс. ден. ед.}$$

Таким образом, сумма взноса 46,926 тыс. ден. ед. с процентами к концу пятилетнего срока дает 1 млн ден. ед.

Определение срока ссуды. При нахождении срока ссуды используем формулы (5.1) и (5.8). При этом получаем:

а) для годовой ренты

$$n = \frac{\log[(S/R)i_{сл} + 1]}{\log(1 + i_{сл})}; \qquad (5.24)$$

$$n = \frac{\log[1 - (A/R)i_{сл}]^{-1}}{\log(1 + i_{сл})}; \qquad (5.25)$$

б) для p-срочной ренты с начислением процентов один раз в году

$$n = \frac{\log\{(S/R) \times p[(1 + i_{сл})^{1/p} - 1] + 1\}}{\log(1 + i_{сл})};$$
$$n = \frac{\log\{1 - (S/R) \times p[(1 + i_{сл})^{1/p} - 1]\}^{-1}}{\log(1 + i_{сл})}; \qquad (5.26)$$

в) для p-срочной ренты с начислением процентов m раз в году

$$n = \frac{\log\{(S/p) \times p[(1 + j/m)^{m/p} - 1] + 1\}}{m\log(1 + j/m)};$$
$$n = \frac{\log\{1 - (A/R) \times p[(1 - j/m)^{m/p} - 1]\}^{-1}}{m\log(1 + j/m)}. \qquad (5.27)$$

Формулы для других случаев начисления процентов выводятся аналогично. При анализе этих формул становится очевидным, что они позволяют определить значение n при определенных условиях. Например, число выплат n, найденное по формуле (5.25), будет положительным конечным числом, если $(A\ /\ R)\ i < 1$ или $R > A \times i$. Иначе говоря, если A — текущее значение долга, приравненое к современной величине ренты, погашающей этот долг, то за конечное число выплат n этот долг будет погашен. Если же $R = A \times i$, то в этом случае $n \to \infty$ и платежи ренты будут покрывать только текущие начисленные проценты. Если $R < A \times i$, то начисленные проценты превышают платеж ренты и погашение долга размером A выплатой ренты с платежом, равным R, невозможно.

5.3. ПОСТОЯННАЯ ФИНАНСОВАЯ РЕНТА ПРЕНУМЕРАНДО

Рассмотрим ренту, в соответствии с которой платежи проводятся в начале каждого периода (ренты пренумерандо).

Расчет наращенной суммы. Каждый платеж ренты пренумерандо «работает» на один период больше, чем в обычной ренте. Например, первый взнос ренты постнумерандо, равный 1 ден. ед., обратится к концу ренты в величину $(1+i)^{n-1}$, а первый взнос ренты пренумерандо с процентами к концу срока равен $(1+i)^n$. В свою очередь последний взнос ренты постнумерандо, равный 1, не приносит процент, а у ренты пренумерандо к концу срока он вырастает до $(1 + i)$.

Так как к концу срока ренты каждый платеж ренты пренумерандо с начисленными процентами больше соответствующего показателя ренты постнумерандо в $(1 + i)$ раз, то наращенную сумму для годовой ренты пренумерандо можно определить по формуле

$$S_n = R \times k_{\text{нп}},$$

где $k_{\text{нп}} = \sum_{t=1}^{t=n}(1+i_{\text{сл}})^t = (1 + i_{\text{сл}}) + (1 + i_{\text{сл}})^2 + \ldots + (1 + i_{\text{сл}})^n$.

Легко заметить, что между коэффициентами наращения для ренты постнумерандо ($k_н$) и ренты пренумерандо ($k_{нп}$) есть связь:

$$k_{нп} = k_н \times (1 + i_{сл}).$$

Следовательно, наращенная сумма для годовой ренты пренумерандо

$$S_п = S(1 + i_{сл}) = R \times k_н (1 + i_{сл}), \tag{5.28}$$

где S — наращенная сумма для ренты постнумерандо, определяемая выражением (5.1).

При начислении процентов m раз в году наращенная сумма ренты пренумерандо

$$S_п = S(1 + j / m)^m \cdot \tag{5.29}$$

Для p-срочной ренты пренумерандо при начислении процентов один раз в году наращенная сумма составит

$$S_п = S(1 + i_{сл})^{1/p}, \tag{5.30}$$

а при начислении процентов m раз в году

$$S_п = S(1 + j / m)^{m/p}. \tag{5.31}$$

Рассмотрим пример расчета показателей.

Пример 67. Взносы в фонд предприятия будут производиться на протяжении 3 лет ежегодно по 10 тыс. руб. На взносы начисляются проценты по ставке 8% годовых. Определите наращенную сумму, если платежи будут производиться: а) в конце года; б) в начале года.

◆ ◆ ◆

В первом случае для расчета используем формулу (5.1):

$$S = 10 \frac{(1 + 0{,}08)^3 - 1}{0{,}08} = 32{,}464 \text{ тыс. руб.}$$

Во втором случае расчет осуществляется по формуле (5.28):

$$S = 32{,}464(1 + 0{,}08) = 35{,}061 \text{ тыс. руб.}$$

Таким образом, наращенная сумма с платежами в конце года равна 32,464 тыс. руб., а в начале года 35,061 тыс. руб.

Определение современной величины ренты. Приведенную величину годовой ренты пренумерандо можно вычислить по формуле

$$A_п = A(1 + i_{сл}), \tag{5.32}$$

где A — современная величина годовой ренты с платежами в конце периодов.

Ниже приведены формулы современной величины ренты пренумерандо для различных случаев ее расчета:

• при начислении процентов m раз в году:

$$A_п = A(1 + j / m)^m; \tag{5.33}$$

• для p-срочной ренты при начислении процентов раз в году

$$A_п = A(1 + i_{сл})^{1/p}; \tag{5.34}$$

• для p-срочной ренты при начислении процентов m раз в году:

$$A_п = A(1 + j / m)^{m/p}. \tag{5.35}$$

Приведем примеры расчета современной величины ренты пренумерандо.

Пример 68. Определите современную величину финансовой ренты, ежегодные выплаты по которой в размере 2 тыс. руб. осуществляются в течение 3 лет по сложной ставке 60% годовых при следующих условиях:

а) выплаты ежегодные, начисление процентов поквартальное;

б) выплаты и начисление процентов поквартальные.

◆ ◆ ◆

В первом случае расчет производим по формулам (5.15) и (5.33):

$$A_п = 2\frac{1-(1+0{,}6/4)^{-4\cdot 3}}{(1+0{,}6/4)^4-1}(1+0{,}6/4)^4 = 2\frac{0{,}813\cdot 1{,}749}{0{,}749} = 3{,}796 \text{ тыс. руб.}$$

Во втором случае ($n = 3$, $p = m = 4$) расчеты производятся по формулам (5.14) и (5.35):

$$A_п = 2\frac{1-(1+0{,}6/4)^{-3\cdot 4}}{0{,}6/4}(1+0{,}6/4)^{4/4} = 2\frac{0{,}813\cdot 1{,}15}{0{,}6} = 3{,}116 \text{ тыс. руб.}$$

Таким образом, при расчетах выгоднее оказалось условие с ежегодными выплатами и поквартальным начислением процентов. Сравнивая результаты расчета современных величин пренумерандо и постнумерандо, отметим, что лучшим является вариант выплат и начисления процентов поквартально.

5.4. ВЕЧНЫЕ РЕНТЫ

Вечная рента — это рента с бесконечно большим сроком, следовательно, состоящая из бесконечно большого количества платежей. Наращенную сумму и современную величину такой ренты можно определить, используя теорию пределов, когда срок ренты будет устремлен в бесконечность. В результате получим:

$$S(\infty) = \lim_{n\to\infty} R\frac{(1+i_{сл})^n - 1}{i_{сл}} \to \infty\,; \tag{5.36}$$

$$A(\infty) = \lim_{n\to\infty} R\frac{1-(1+i_{сл})^{-n}}{i_{сл}} = \frac{R}{i_{сл}}\,. \tag{5.37}$$

Отсюда следует, что предел наращенной суммы вечной ренты равен бесконечности, а предел ее приведенной величины является конечной величиной. Расчеты современной величины вечной ренты могут использоваться в страховых расчетах, при оценке долгосрочных инвестиций и др.

Для p-срочной вечной ренты ее приведенную величину можно рассчитать по формуле

$$A(\infty) = \frac{R_p}{(1+i_{сл})^{1/p} - 1} = \frac{R}{p[(1+i_{сл})^{1/p} - 1]} \tag{5.38}$$

При начислении процентов m раз в году выражение для годовой ренты имеет вид

$$A(\infty) = \frac{R}{(1+j/m)^m - 1}, \tag{5.39}$$

для p-срочной вечной ренты

$$A(\infty) = \frac{R}{p[(1+j/m)^{m/p} - 1]} = \frac{R_p}{(1+j/m)^{m/p} - 1}\,. \tag{5.40}$$

При $p = m$ выражение (5.40) примет вид:

$$A(\infty) = R \;/\; j = R_p(p \;/\; j)\cdot \qquad (5.41)$$

Рассмотрим пример расчета приведенной величины для вечной ренты.

Пример 69. Определите сумму, необходимую для выкупа вечной ренты, если размеры платежей, которые должны выплачиваться в конце каждого полугодия, равны 500 тыс. руб., а проценты берутся по ставке 40% : а) один раз в году; б) по полугодиям; в) поквартально.

◆ ◆ ◆

В первом случае, т.е. при $p = 2$; $m = 1$; $i = 0,4$; $R_p = 500$ тыс. руб. расчеты выполняем по формуле (5.38):

$$A(\infty) = \frac{500}{(1 + 0,4)^{1/2} - 1} = \frac{500}{0,1832} = 2729,2581 \text{ тыс. руб.}$$

Во втором случае, т.е. при $p = 2$; $m = 2$; $i = 0,4$; $R_p = 500$ тыс. руб. расчеты производим по формуле (5.41):

$$A(\infty) = 500\frac{2}{0,4} = 2500 \text{ тыс. руб.}$$

Наконец, в третьем случае, т.е. при условиях $p = 2$; $m = 4$; $i = 0,4$; $R_p = 500$ тыс. руб. для расчетов используем формулу (5.40):

$$A(\infty) = \frac{500}{(1 + 0,4 \;/\; 4)^{4/2} - 1} = \frac{500}{0,21} = 2380,952 \text{ тыс. руб.}$$

Как видим, современная сумма, необходимая для выкупа вечной ренты, зависит от принятых условий. Более выгодным является условие с начислением процентов один раз в год.

5.5. КОНВЕРСИЯ РЕНТ

Под конверсией ренты обычно понимается изменение условий финансового соглашения, т.е. замена одного связанного с рентой договора другим при сохранении интересов участников сделки. При этом может быть изменена процентная ставка или срок погашения кредита, а кроме того облегчены условия выплаты долга для заемщика или возврата выданной ссуды для кредитора. В простейшем случае изменение условий ренты заключается в замене ее единовременным платежом. В более сложных случаях рента с одним набором условий заменяется рентой с другими условиями. Наиболее распространенным способом изменения условий является тот, при котором несколько рент могут объединяться в одну (консолидация долгов). Указанные изменения рент не могут быть произвольными. Если предполагается, что их конверсия не приводит к изменению финансовых последствий для каждого из участвующих в соглашении сторон, то она должна основываться на принципе финансовой эквивалентности платежей.

Уравнение финансовой эквивалентности имеет вид:

$$A_1 = A_2 \text{ или } R_1 a_1 = R_2 a_2, \qquad (5.42)$$

где с индексом 1 даны параметры прежнего договора, а с индексом 2 — нового договора.

Замена единовременного платежа рентой. При замене единовременного платежа рентой происходит рассрочка платежа — вместо одного платежа последовательно выплачивается ряд сумм. Для соблюдения принципа финансовой эквивалентности современную величину ренты следует приравнять к величине заменяемого платежа. Постоянная рента характеризуется параметрами R, n, i (или R, p, m, n, j), поэтому задача заключается в определении этих параметров при условии, что современная величина ренты известна. Практически это сводится к расчету одного из параметров, если все остальные заданы. Например, при заданных n и i для годовой ренты нетрудно определить взнос ренты R, который будет отвечать принципу финансовой эквивалентности.

Замена ренты единовременным платежом. Рассмотрим конкретный пример. Арендатор рассматривает предложение арендодателя о замене ежегодной арендной платы сроком на 5 лет в размере 48 тыс. руб. на долгосрочную оплату аренды единовременным платежом в размере 150 тыс. руб. Пусть минимально необходимая норма наращения капитала предприятия составляет 30% годовых. Скажите, приемлемо ли для арендатора предложение арендодателя?

Рассмотрим эту задачу в категориях финансовой ренты. Речь идет об определении такой суммы единовременного платежа в начале рентного периода, которая была бы равнозначна рентным взносам в течение 5 лет при минимально достаточном 30%-ном уровне доходности предприятия-арендодателя. Согласно формуле (5.8), эквивалентная сумма разового платежа должна составить

$$A = 48\frac{1-(1+0{,}3)^{-5}}{0{,}3} = 48\cdot 2{,}43557 = 116{,}907 \text{ тыс. руб.}$$

Заметим, что сумма 116,907 тыс. руб. меньше предложенной арендодателем суммы 150 тыс. руб. Вывод — предложение арендодателя является для предприятия-арендатора невыгодным, так как разовый платеж при сложившейся цене капитала предприятия оказывается чрезмерным: из оборота предприятия-арендатора изымается в начале рентного периода сумма, превосходящая ежегодные будущие рентные платежи с минимально требуемой нормой доходности 30%.

Изменение нескольких условий ренты. В более сложных случаях конверсия заключается в замене нескольких условий ренты. Если замена осуществляется при соблюдении принципа финансовой эквивалентности, то из этого следует, что современные величины обеих рент соответствуют (5.42). Исходя из этого равенства можно найти необходимые характеристики заменяющей ренты. Поскольку изменение ставки процентов приводит к изменению финансовых отношений сторон, то далее полагаем, что эта ставка не меняется.

Рассмотрим два случая замены ренты.

1. Имеется годовая немедленная рента с характеристиками R_1, n_1, i. Необходимо заменить ее на отсроченную на t лет ренту, т.е. начало и конец ренты сдвигаются на t лет.

Если новая рента имеет ту же продолжительность n_1, то задача заключается в определении R_2. Если задано значение R_2, то следует определить значение n_2.

Рассмотрим первое условие: $n_1 = n_2$.

Современные величины немедленной и отсроченной рент, согласно выражению (5.8), составят: $A_1 = R_1 \times a_н$; $A_2 = R_2 \times a_н \times V^t$. Так как $A_1 = A_2$, то

$$R_2 = \frac{R_1}{V^t} = R_1(1+i)^t. \qquad (5.43)$$

Таким образом, платеж отсроченной ренты при всех равных условиях равен наращенному за время t платежу немедленной ренты.

Рассмотрим второе условие: $R_1 = R_2$. В этом случае

$$A_1 = R_1 \frac{1-(1+i_{сл})^{-n_1}}{i_{сл}}\,;\; A_2 = R_2 \frac{1-(1+i_{сл})^{-n_2}}{i_{сл}} V^t\,.$$

Так как $A_1 = A_2$, то

$$n_2 = \log(1+i) \frac{(1+i)^{n_1}}{(1+i)^t}\,. \qquad (5.44)$$

2. Допустим, что необходимо изменить продолжительность ренты. Например, годовая рента со сроком n_1 заменяется рентой со сроком n_2. Необходимо определить R_2 из условия $R_1 \times a_{н\,1} = R_2 \times a_{н\,2}$:

$$R_2 = R_1 \frac{1-(1+i_{сл})^{-n_1}}{1-(1+i_{сл})^{-n_2}}\,. \qquad (5.45)$$

Пример 70. Годовая немедленная рента со сроком 5 лет (R = 2000 ден.ед., i = 0,06%) заменяется на ренту со сроком 8 лет, остальные условия остаются прежними. Найдите размер нового платежа.

◆ ◆ ◆

Используя формулу (5.45), получаем:

$$R_2 = 2000 \frac{1-0{,}06^{-5}}{1-0{,}06^{-8}} = 1356{,}68 \text{ ден. ед.}$$

Из расчетов следует, что увеличение срока выплаты ренты привело к сокращению платежа ренты.

5.6. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. На депозитный счет в течение 5 лет вносятся ежегодно в конце каждого года суммы 500 тыс. руб., на которые начисляются сложные проценты по ставке 18% годовых. Определите сумму процентов, которую банк выплатит владельцу счета.

2. Определите размер ежегодных взносов, вносимых в конце каждого года и необходимых для погашения в течение 5 лет долга, равного 50 тыс. руб., если на взносы начисляются сложные проценты по ставке 24% годовых.

3. Платежи размером 100 тыс. руб. вносятся в начале каждого года в течение 3 лет при сложной ставке 14% годовых. Определите итоговую сумму взносов. Укажите вид ренты.

4. Платежи в фонд будут выплачиваться ежегодно по 200 тыс. руб. в течение 4 лет с начислением сложных процентов по ставке 7% годовых. Определите современную величину суммы всех платежей с начисленными процентами.

5. Для создания фонда ежегодно выделяется 10 тыс. руб. На эти средства начисляются сложные проценты по годовой ставке 25%. Определите сумму средств фонда через 3 года для следующих условий:

а) поступление взноса в конце года, начисление процентов раз в год;

б) поступление взноса в конце года, начисление процентов по полугодиям;

в) поступление взносов по полугодиям, начисление процентов поквартально;

г) поступление взносов и начисление процентов по полугодиям.

6. Платежи размером 300 тыс. руб. выплачиваются в конце каждого полугодия при простой ставке процентов 24% годовых в течение 1 года. Определите наращенную сумму и современную величину ренты.

7. Платежи в сумме 200 тыс. руб. выплачиваются в конце каждого полугодия при простой ставке процентов 15% годовых в течение 1 года. Определите наращенную сумму и современную величину ренты.

8. Через 3 года требуется накопить 1 млн руб. Взносы будут вноситься ежегодно с начислением на них сложных процентов по ставке 24% годовых. Определите размер ежегодных взносов.

9. На взносы в фонд предприятия, вносимые ежегодно в конце года, будут начисляться сложные проценты по ставке 25% годовых. Определите размер ежегодных взносов, необходимых для накопления в течение 3 лет суммы 200 тыс. руб.

10. В фонд ежегодно вносятся суммы в размере 25 тыс. руб., на которые начисляются сложные проценты по ставке 25% в год. Определите сумму, накопленную в фонде через 6 лет, и сумму начисленных процентов.

11. Определите размер ежегодных взносов, вносимых в конце года при ставке 6% годовых, в следующих случаях:

а) для создания через 4 года фонда в размере 15 тыс. руб.;

б) для погашения через 4 года текущей задолженности, равной 15 тыс. руб.

12. К концу третьего года необходимо создать фонд, равный 100 тыс. руб. Фонд создается равномерными взносами в конце каждого полугодия. На взносы 4 раза в год начисляются проценты по номинальной ставке, равной 25%. Каков должен быть разовый взнос.

13. На взносы в фонд медицинского страхования, вносимые ежегодно (в конце и начале года) начисляются сложные проценты по ставке 25% годовых. Определите размер ежегодных взносов, необходимых для накопления за 4 года суммы 50 тыс. руб., при двух вариантах расчета.

14. В фонд занятости населения ежегодно (в конце года) вносятся суммы в размере 50 тыс. руб., на которые начисляются сложные проценты по ставке 20% годовых. Определите сумму, накопленную в фонде через 3 года, и сумму начисленных процентов.

15. Определите размер ежегодных взносов, вносимых в конце и начале каждого года и необходимых для погашения в течение 2 лет долга, равного 50 тыс. руб., если на взносы начисляются сложные проценты 75% годовых.

16. На депозитный счет ежегодно в течение 5 лет вносится сумма 1 млн руб., на которую будут начисляться сложные проценты по ставке 70% годовых. Определите сумму процентов, которую банк выплатит владельцу счета.

17. Сумма долга равна 50 тыс. руб. Предполагается, что выплачивается ежегодно по 10 тыс. руб. Определите срок выплаты долга при ставке процентов 60% годовых.

18. Определите срок, за который сумма фонда составит 10 млн руб., если взносы в фонд осуществляются по 1 млн руб. ежегодно и на них ежеквартально начисляются проценты по ставке 40% годовых.

19. Определите современную величину ренты, ежегодные выплаты по которой в размере 10 млн руб. осуществляются в течение 2 лет при следующих условиях:

а) выплаты ежегодные (в начале периода), начисление процентов по сложной ставке 25% годовых по полугодиям;

б) выплаты (в начале месяца) и начисления (по той же ставке) ежемесячные.

20. Определить сумму, необходимую для выкупа вечной ренты, если размеры платежей, которые должны выплачиваться в конце каждого квартала, равны 20 тыс. руб., а проценты начисляются по ставке 17%: а) один раз в год; б) поквартально; в) помесячно; г) по полугодиям.

21. Фонд накопления за 5 лет должен составить 10 млн руб. Определите размеры платежей для ренты пренумерандо при ставке 26% годовых и начислении процентов один раз в году при следующих условиях: а) выплаты в начале года; б) выплаты в начале каждого квартала.

22. Годовая немедленная рента со сроком 5 лет и разовым платежом 2 млн руб. заменяется на ренту со сроком 7 лет. Процентная ставка — 26%. Определите сумму нового разового взноса.

ГЛАВА 6

ПЛАНИРОВАНИЕ ПОГАШЕНИЯ ДОЛГА

6.1. ПОГАШЕНИЕ ДОЛГА ЕДИНОВРЕМЕННЫМ ПЛАТЕЖОМ

Кредит (долг, заем) в зависимости от условий, предусматриваемых соглашением, может погашаться:

- единовременным платежом;
- последовательно во времени путем выплаты равных и неравных платежей.

Рассмотрим различные способы погашения долга.

При погашении долга единовременным платежом обычно создают специальный погасительный фонд. Погасительный фонд — это накапливаемые на банковском счете средства юридических или физических лиц с целью использования их для погашения ранее взятого кредита. Погасительный фонд формируется из последовательных взносов, на которые начисляются проценты. Таким образом, сумма взносов и начисленных процентов, накапливаемых в фонде, должна быть равна сумме долга на момент его погашения. Если погасительный фонд создается для уплаты займа, условия которого предусматривают периодическую выплату процентов, то текущие расходы должника по займу будут состоять из двух элементов: платежа в фонд и выплаты процентов по займу. Сумма этих двух платежей называется срочной уплатой.

Задача разработки плана погашения займа заключается в определении размера срочной уплаты и составляющих ее элементов в зависимости от конкретных условий займа.

Введем следующие обозначения: γ — срочная уплата; D — сумма долга, которую надо погасить через n лет; n — срок займа (число лет); R — погасительный платеж, периодически вносимый в банк или другое финансовое учреждение для создания погасительного фонда; q — ставка процента, в соответствии с которой кредитору выплачивается регулярный доход по займу; i — ставка процента, начисляемого на средства погасительного фонда.

Таким образом, при создании погасительного фонда фигурируют две ставки i и q. Первая определяет скорость роста суммы этого фонда, вторая — сумму выплачиваемых за заем процентов. Нетрудно догадаться, что создание указанного фонда выгодно должнику, если $q \leq i$, так как в данном случае должник на аккумулированные в погасительном фонде средства получает больший процент, чем сам выплачивает за заем.

Рассмотрим некоторые случаи погашения долга.

1. Взносы в погасительный фонд и погашение процентов за него, а также выплаты процентов по займу осуществляются один раз в конце года. Срочная уплата определяется по формуле

$$\gamma = D \times q + R, \tag{6.1}$$

где $D \times q$ — сумма процентов, выплачиваемых кредитору (величина постоянная); R — взносы в погасительный фонд (величина может быть как постоянной, так и переменной).

Разработаем план погашения займа при постоянных погасительных платежах.

Последовательные взносы будут представлять собой финансовую ренту. Если размеры взносов равны, то их величину можно определить по формулам для постоянной финансовой ренты. Наращенная сумма этой ренты по условию должна быть равна долгу, т.е. $D = R \times k_н$, где $k_н$ — множитель наращения. Отсюда формулы для определения размера погасительного платежа и срочной уплаты будут следующими:

$$R = \frac{D}{k_н} = \frac{D \times i_{сл}}{(1 + i_{сл})^n - 1}; \tag{6.2}$$

$$\gamma = D \times q + \frac{D}{k_н} = D\left(q + \frac{1}{k_н}\right) = D\left(q + \frac{i_{сл}}{(1 + i_{сл})^n - 1}\right). \tag{6.3}$$

Пример 71. Долг в сумме 10 тыс. руб., выданный под 60% годовых, должен быть возвращен через 5 лет. Решено создать погасительный фонд. На погасительные платежи в банке начисляют 80% в год. Необходимо разработать план погашения займа — определить ежегодные расходы должника по займу при условии, что погасительные платежи образуют постоянную годовую ренту.

♦ ♦ ♦

Погасительный взнос рассчитаем по формуле (6.2):

$$R = \frac{10 \cdot 0{,}08}{(1 + 0{,}08)^5 - 1} = 10 \cdot 0{,}171 = 1{,}71 \text{ тыс. руб.}$$

Срочная уплата

$$\gamma = 10 \cdot 0{,}06 + 1{,}71 = 2{,}31 \text{ тыс. руб.}$$

Таким образом, должнику надо в конце каждого года вносить в погасительный фонд 1,71 тыс. руб., с тем чтобы к концу 5-летнего периода у него накопились денежные средства для покрытия долга. Ежегодная срочная уплата составит 2,31 тыс. руб.

2. Взносы в погасительный фонд осуществляются p раз в году. В этом случае их ежегодная сумма составит

$$R = \frac{P \times D[(1 + i_{сл})^{1/p} - 1]}{(1 + i_{сл})^n - 1}, \qquad (6.4)$$

а срочная уплата

$$\gamma = \frac{P \times D(1 + q)^n[(1 + i_{сл})^{1/p} - 1]}{(1 + i_{сл})^n - 1}. \qquad (6.5)$$

Пример 72. Ссуда в размере 50 тыс. руб. выдана на 3 года под 18% годовых. Для погашения долга единовременным платежом создается фонд. На взносы в фонд начисляются проценты по ставке 10% годовых с периодической выплатой кредитору. Определите ежегодные расходы должника (срочные уплаты) и общую сумму расходов на погашение долга, если взносы в погасительный фонд осуществляются: а) один раз в году; б) ежеквартально.

◆ ◆ ◆

Сумма ежегодных выплат процентов на сумму долга составит

$$I_г = D \times q = 50 \cdot 0{,}08 = 4 \text{ тыс. руб.}$$

Общая сумма выплат процентов за весь срок задолженности составит

$$I = 4 \cdot 3 = 12 \text{ тыс. руб.}$$

Сумму взносов один раз в году в погасительный фонд определим по формуле (6.2):

$$R = \frac{50 \cdot 0{,}1}{(1 + 0{,}1)^3 - 1} = 15{,}106 \text{ тыс. руб.}$$

Сумму ежегодных платежей в погасительный фонд при ежеквартальных взносах рассчитаем по формуле (6.4):

$$R = \frac{4 \cdot 50\,[(1 + 0{,}1)^{1/4} - 1]}{(1 + 0{,}1)^3 - 1} = 14{,}57 \text{ тыс. руб.}$$

Общая сумма взносов в погасительный фонд за 3 года ($R_п$) составит:
а) при осуществлении взносов один раз в году

$$R_п = n \times R = 3 \times 15{,}106 = 45{,}318 \text{ тыс. руб.};$$

б) при внесении взносов ежеквартально:

$$R_п = n \times R = 3 \times 14{,}710 = 43{,}71 \text{ тыс. руб.}$$

Общая сумма расходов (Q) заемщика по погашению долга составит:
а) при осуществлении взносов один раз в году

$$Q = R\,п + I = 45{,}318 + 12 = 57{,}318 \text{ тыс. руб.};$$

б) при внесении взносов ежеквартально

$$Q = R_п + I = 43{,}710 + 12 = 55{,}71 \text{ тыс. руб.}$$

Как видим, сумма расходов заемщика по погашению долга больше, если взносы вносятся один раз в году.

3. Процентная сумма присоединяется к долгу. В этом случае размер ежегодной срочной уплаты при осуществлении взносов в погасительный фонд один раз в году в соответствии с (5.20) и (4.1) составит

$$\gamma = \frac{D(1 + q)^n i_{сл}}{(1 + i_{сл})^n - 1}. \qquad (6.6)$$

Пример 73. Кредит в сумме 1 млн руб. выдан на 3 года под 6% годовых. Проценты за кредит присоединяются к основной его сумме. Для погашения кредита единовременным платежом создается погасительный фонд, на взносы в который начисляются проценты по ставке 7% годовых. Определите ежегодные расходы заемщика и общую сумму расходов по погашению кредита.

◆ ◆ ◆

Ежегодную срочную уплату рассчитаем по формуле (6.6):

$$\gamma = \frac{1(1 + 0{,}06)^3 \cdot 0{,}07}{(1 + 0{,}07)^3 - 1} = \frac{0{,}0833}{0{,}2250} = 0{,}37 \text{ млн руб.}$$

Общие расходы по погашению долга составят:

$$Q = n \times \gamma = 3 \cdot 0{,}370 = 1{,}11 \text{ млн руб.}$$

6.2. ПОГАШЕНИЕ ДОЛГА РАВНЫМИ СУММАМИ

6.2.1. Понятие о погашении долга частями

Формирование погасительного фонда, как отмечалось выше, для должника имеет смысл, если $q \le i$. В случаях, когда такие условия трудно осуществимы, должнику лучше прибегнуть к погашению долга частями, поскольку при этом он не несет потерь, связанных с низкой ставкой процентов, начисляемой на аккумулированные в фонде средства. Погашение долга частями можно осуществлять двумя методами:

а) равномерно, выплачивая равные суммы в счет долга;

б) путем постоянной срочной уплаты.

6.2.2. Выплаты равных сумм в счет долга

При погашении долга частями текущее его значение с течением времени уменьшается, следовательно, сумма процентных платежей также будет уменьшаться. Размер срочной уплаты в конце первого года составит

$$\gamma_1 = D \times q + D / n = D_1 \times q + D_1 / n .$$

Остаток задолженности на начало второго года

$$D_2 = D_1 - D_1 / n = D_1(1 - 1 / n) .$$

Размер срочной уплаты в конце второго года

$$\gamma_2 = D_2 \times q + D_1 / n .$$

Остаток задолженности на начало третьего года

$$D_3 = D_2 - D_1 / n = D_1(1 - 2 / n) .$$

Общая формула для определения размера очередной срочной уплаты будет иметь вид:

$$\gamma_t = D_t \times q + D_1 / n ,$$

где D_t — остаток задолженности на начало очередного года; t — номер периода ($t = 1, 2, 3,..., n$); q — ставка процентов, начисляемых на сумму долга; $D\,1$ — первоначальная сумма долга; n — срок долга.

Остаток задолженности на начало очередного года определяется по формуле

$$D_{t+1} = D_1\left(1 - \frac{t-1}{n}\right). \tag{6.8}$$

Предположим, что долг погашается p раз в году, тогда размеры срочных уплат можно определить по формуле

$$\gamma_t = D_t \frac{q}{p} + \frac{D_1}{p \times n}, \tag{6.9}$$

где $t = 1,2,..., n \times p$ — номер платежного периода.

Остаток задолженности на начало следующего года

$$D_{t+1} = D_1\left(1 - \frac{t-1}{n \times p}\right). \tag{6.10}$$

Пример 74. Долг 50 тыс. руб. необходимо погасить равными суммами в течение 5 лет. Проценты на долг начисляются по ставке 20% годовых. Составьте план погашения долга.

◆ ◆ ◆

Срочная уплата в конце первого года

$$\gamma_1 = 50 \cdot 0{,}2 + 50 / 5 = 20 \text{ тыс. руб.}$$

Остаток задолженности на начало второго года

$$D_2 = 50\,(1 - 1 / 5) = 40 \text{ тыс. руб.}$$

Размеры срочных уплат и остатки задолженности для последующих лет:

$$\gamma_2 = 40 \cdot 0{,}2 + 50 / 5 = 18 \text{ тыс. руб.};$$

$$D_3 = 50\,(1 - 2 / 5) = 30 \text{ тыс. руб.};$$

$$\gamma_3 = 30 \cdot 0{,}2 + 50 / 5 = 16 \text{ тыс. руб.};$$

$$D_4 = 50\,(1 - 3 / 5) = 20 \text{ тыс. руб.};$$

$$\gamma_4 = 20 \cdot 0{,}2 + 50 / 5 = 14 \text{ тыс. руб.};$$

$$D_5 = 50\,(1 - 4 / 5) = 10 \text{ тыс. руб.};$$

$$\gamma_5 = 10 \cdot 0{,}2 + 50 / 5 = 12 \text{ тыс. руб.};$$

$$D_6 = 50\,(1 - 5 / 5) = 0.$$

Общие расходы по погашению долга

$$Q = 20 + 18 + 16 + 14 + 12 = 80 \text{ тыс. руб.}$$

План погашения долга представлен в таблице.

Год	Сумма в счет погашения долга, тыс. руб.	Остаток на начало года, тыс. руб.	Начисленные проценты, тыс. руб.	Срочная уплата, тыс. руб.
1	10	50	10	20
2	10	40	8	18
3	10	30	6	16
4	10	20	4	14
5	10	10	2	12
Всего	50	—	30	80

6.2.3. Погашение долга равными срочными уплатами

При погашении долга равными срочными уплатами величина долга сокращается ускоренно. Объясняется это тем, что выплаты по процентам с течением времени уменьшаются, а суммы, идущие на погашение долга, увеличиваются. По определению можно записать:

$$\gamma = D_t \times q + R_t = \text{const},$$

где t — порядковый номер периода ($t = 1,2,\dots,n$); $D_t \times q$ — процентные суммы, выплачиваемые должником за очередной период; R_t — остаток долга на начало периода t.

При погашении долга равными срочными уплатами, охватывающими основную сумму долга и проценты, необходимо задать срок возврата займа. При этом последовательность срочных уплат будет представлять собой финансовую ренту, современное значение которой должно быть равно сумме долга.

Если платежи по долгу в течение n лет осуществляются один раз в конце каждого года, размер срочных уплат в соответствии с выражением (5.21) составит

$$\gamma = \frac{D}{a_n} = \frac{D \times q}{1 - (1 + q)^{-n}}, \tag{6.11}$$

где q — ставка, по которой на долг начисляются проценты; a_n — множитель наращения [см. формулу (5.8)]; $D = D_1$ — первоначальная сумма долга.

Очевидно, что проценты за заем в конце первого года погашения составят величину $D_1 \times q$, а разность $\gamma - D_1 \times q = R_1$ идет на погашение долга. Общая сумма расходов заемщика на погашение долга составит

$$Q = n \times \gamma = \frac{n \times D \times q}{1 - (1 + q)^{-n}}. \tag{6.12}$$

Составим план погашения долга.

Проценты за заем в конце первого года погашения составят величину $I_1 = D_1 \times q$. Разность $d_1 = \gamma - D_1 \times q$ идет на погашение долга. Следовательно, сумма выплачиваемых процентов при очередной срочной уплате составит

$$I_t = D_t \times q. \tag{6.13}$$

Сумма погашения долга при очередной срочной уплате:

$$d_t = \gamma - I_t. \tag{6.14}$$

Остаток долга на начало следующего года составит

$$D_{t+1} = D_t - d_t. \tag{6.15}$$

Если равные срочные уплаты при погашении долга выплачиваются p раз в году, то в соответствии с (5.23) их размер составит

$$\gamma = \frac{D[(1+q)^{1/p} - 1]}{1 - (1+q)^{-n}}. \qquad (6.16)$$

Рассмотрим план погашения долга на конкретном примере.

Пример 75. Сумма долга 10 тыс. руб. получена под 50% годовых сроком на 3 года. Составьте план погашения долга при постоянном расходе должника.

◆ ◆ ◆

Размер срочной уплаты составит [см. формулу (6.11)]

$$\gamma = \frac{10 \cdot 0{,}5}{1-(1+0{,}5)^{-3}} = 7{,}10527 \text{ тыс. руб.}$$

Сумма первой уплаты процентов:

$$I_1 = D_1 \times q = 10 \cdot 0{,}5 = 5 \text{ тыс. руб.}$$

Сумма первого платежа в счет погашения долга:

$$d_1 = \gamma - D_1 \times q = 7{,}10527 - 5 = 2{,}10527 \text{ тыс. руб.}$$

Остаток долга на начало второго периода:

$$D_2 = D_1 - d_1 = 10 - 2{,}10527 = 7{,}89474 \text{ тыс. руб.}$$

Данные для оставшихся лет:

$$I_2 = D_2 \times q = 7{,}89474 \cdot 0{,}5 = 3{,}94737 \text{ тыс. руб.}$$

$$d_2 = \gamma - I_2 = 7{,}10527 - 3{,}94737 = 3{,}15790 \text{ тыс. руб.}$$

$$D_3 = D_2 - d_2 = 7{,}89474 - 3{,}15790 = 4{,}73684 \text{ тыс. руб.}$$

$$I_3 = D_3 \times q = 4{,}73684 \cdot 0{,}5 = 2{,}362425 \text{ тыс. руб.}$$

$$d_3 = 7{,}10527 - 2{,}368422 = 4{,}73685 \text{ тыс. руб.}$$

$$D_4 = D_3 - d_3 = 4{,}73683 - 4{,}73685 = 0 \text{ тыс. руб.}$$

Результаты расчетов представлены в таблице.

Год	Остаток долга на начало года, тыс. руб.	Сумма в счет погашения долга, тыс. руб.	Начисленные проценты, тыс. руб.	Срочная уплата, тыс. руб.
1	10,00000	2,10530	5,00000	7,10527
2	7,89473	3,15790	3,94740	7,10527
3	4,73682	4,73680	2,36841	7,10527
Всего	—	10,00000	11,31581	21,31581

Как видим, при погашении долга *равными срочными уплатами* сумма, вносимая в счет погашения, с течением времени увеличивается.

6.3. ПОТРЕБИТЕЛЬСКИЙ КРЕДИТ

Частным случаем погашения долга равными срочными уплатами является *потребительский кредит*, при котором проценты начисляются по простой ставке на всю сумму кредита и присоединяются к ней в момент его выдачи. Погашение суммы долга с начисленными процентами производится частями равномерно в течение срока кредита. Если в году будет p погасительных платежей, то сумма выплаченных процентов составит

$$I = \frac{D \times q \times (n \times p + 1)}{2p}, \qquad (6.17)$$

где D — сумма кредита; q — годовая ставка простых процентов по кредиту; n — срок кредита в годах; p — число погасительных платежей.

Общая сумма расходов по погашению кредита составит

$$S = D + I, \qquad (6.18)$$

а размер одинаковых очередных взносов —

$$R = \frac{D + I}{n \times p} = \frac{S}{n \times p}. \qquad (6.19)$$

Пример 76. Потребительский кредит на сумму 500 руб. был открыт на 2 года по ставке 25% годовых. Погашение кредита должно осуществляться равными взносами ежеквартально. Определите стоимость кредита, погашаемую сумму и размер ежеквартальных взносов.

♦ ♦ ♦

Стоимость кредита (сумма выплаченных процентов)

$$I = \frac{500 \cdot 0{,}25 \cdot (2 \cdot 4 + 1)}{2 \cdot 4} = 140{,}63 \text{ руб.}$$

Погашаемая сумма

$$S = 500000 + 140625 = 640{,}63 \text{ руб.}$$

Размер ежеквартальных взносов

$$R = \frac{640625}{2 \cdot 4} = 80{,}08 \text{ руб.}$$

Начисление процентов указанным способом в мировой банковской практике называется методом 78. Это связано с тем, что для потребительского кредита сроком 12 месяцев ежемесячный размер погашения будет равен 1/12 его суммы. Следовательно, проценты за 1-й месяц будут начисляться со всей 12/12 суммы кредита, за 2-й месяц — с 11/12 суммы кредита, за 3-й месяц — с 10/12 суммы кредита и т.д. до последнего месяца, проценты в котором будут браться с 1/12 суммы кредита. Сумма числителей таких дробей составляет

$$12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 78,$$

что и дало название данному методу начисления процентов.

6.4. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Малое предприятие получило в банке А кредит на сумму 10 тыс. руб. под 6% годовых на 5 лет. Для погашения кредита решено в банке В создать погасительный фонд. Процентная ставка по вкладам в этом банке — 8%. Начисление процентных сумм в обоих банках осуществляется один раз в год по формуле сложных процентов. В погасительный фонд взносы вносятся ежегодно. Определите размер ежегодных выплат в счет создания погасительного фонда и размер срочной уплаты.

2. Кредит 200 руб. выдан под 18% годовых на 90 дней. Для его погашения решено создать погасительный фонд на условиях 20% годовых. Процентные суммы на взносы в погасительный фонд начисляются ежемесячно по формуле сложных (простых) процентов ($K = 360$). Опре-

делите величину взноса в погасительный фонд и сумму срочной уплаты по вариантам расчета простых и сложных процентов.

3. Кредит 80 тыс. руб. выдан на 4 года под 20% годовых. Для погашения единовременным платежом создан фонд. На взносы в фонд начисляются проценты по ставке 25% годовых. Проценты на сумму долга периодически выплачиваются кредитору. Определите ежегодные расходы должника (срочные уплаты) и общую сумму расходов по погашению долга, если взносы в погасительный фонд осуществляются: а) один раз в году; б) по полугодиям; в) ежеквартально. Сделайте выводы.

4. Ссуду 100 тыс. руб. необходимо погасить равными суммами в течение 4 лет. Проценты на долг начисляются по ставке 20% годовых. Определите размеры ежегодных расходов и общие расходы заемщика по погашению долга, если уплаты осуществляются: а) один раз в конце года; б) по полугодиям; в) поквартально. Сделайте выводы.

5. Кредит 500 тыс. руб. взят под 30% годовых на 3 года. Для составления плана погашения кредита равными немедленными постнумерандо взносами определите сумму срочной уплаты и объем взносов в счет погашения основного долга.

6. Кредит 500 руб. погашается в течение 3 лет равными срочными уплатами. Проценты на долг начисляются по ставке 25% годовых и выплачиваются каждый год. Определите годовые расходы по погашению долга и общие расходы за весь период.

7. Кредит 8 тыс. руб., выданный по ставке 35% годовых, должен погашаться равными частями 4 года. Определите размеры последовательных уплат, общие расходы по кредиту и сумму выплаченных процентов, если платежи по кредиту осуществляются: а) в конце каждого года; б) в конце каждого полугодия. Сделайте выводы.

8. Кредит 10 тыс. руб. с ежегодным начислением сложных процентов по ставке 20% годовых должен погашаться равными срочными уплатами, включающими погашение основной суммы кредита и процентов, ежегодно в конце каждого года на протяжении 5 лет. Определите общие расходы по погашению кредита и сумму начисленных процентов.

9. Ссуду 60 тыс. руб. необходимо погасить равными суммами в течение 4 лет. Проценты на долг начисляются по сложной ставке 20% годовых. Определите размеры ежегодных расходов (план погашения долга) и общие расходы по погашению долга.

10. Кредит 10 тыс. руб. погашается равными суммами в течение 3 лет. Проценты на кредит определены по сложной ставке, равной 35% годовых. Составьте план погашения долга и рассчитайте общие расходы по погашению долга.

11. Кредит 1 млн руб. погашается 4 года равными суммами. Определите размеры срочных уплат и общие расходы по погашению долга, если на него начисляются проценты по сложной ставке 30% годовых.

12. Определите размеры равных срочных уплат и общие расходы по погашению кредита 15 тыс. руб., взятого на 3 года, если проценты за кредит начисляются по сложной ставке 25% годовых.

13. Ссуда 60 тыс. руб. погашается в течение 3 лет равными срочными уплатами. Проценты на долг начисляются по ставке 40% годовых и выплачиваются каждый год. Определить годовые расходы по погашению долга и общие расходы за весь срок.

14. Потребительский кредит на 1500 руб. открыт на 5 лет по простой ставке процентов 20% годовых с погашением по полугодиям. Определите погашаемую сумму и размеры погасительных платежей.

15. Потребительский кредит на сумму 100 руб. открыт на 2 года по простой ставке процентов 10% годовых с погашением в конце каждого квартала. Определите погашаемую сумму и размер погасительных платежей.

16. Потребительский кредит на сумму 600 руб. открыт на год по ставке 30% годовых с погашением равными взносами. Определите стоимость кредита, погашаемую сумму и размер взносов, если погашение кредита будет осуществляться: а) ежеквартально; б) ежемесячно. Сделайте выводы.

Литература

Исаев А.М., Шепелева Н.Ю. Практика банковского управления и финансового анализа в формулах. М.: АО «АРГО», 1992.

Коротич Е. Финансовая математика: теория и практика финансово-банковских расчетов. М.: Финансы и статистика, 1994.

Первозванский А.А., Первозванская Т.Н. Финансовый рынок: расчет и риск. М.: Инфра-М, 1994.

Черкасов В.Е. Учебное пособие по финансово-экономическим расчетам. М.: АУЗБАНК, 1993.

Черкасов В.Е., Плотицина Л.А. Банковские операции: маркетинг, анализ, расчеты. М.: Метаинформ, 1995.

Четыркин Е.М., Васильева Н.Е. Финансово-экономические расчеты. М.: Финансы и статистика, 1990.

Четыркин Е.М. Методы финансовых и коммерческих расчетов. М.: Дело, 1992.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОГЛАВЛЕНИЕ

ISBN 5-88439-094-7

9 785884 390942