Тема. ФИНАНСОВЫЕ РЕНТЫ

В настоящее время деятельность в любой области экономики (управлении, финансово-кредитной сфере, в области информации и связи, строительстве, образовании и т.д.) требует от специалиста применения современных методов анализа. Многие из этих методов основаны на финансово-экономических расчетах.

Большое значение для профессиональной деятельности в любой отрасли экономики имеет умение различными вариантами планировать погашение кредита, а также применять финансовые ренты в своей практической деятельности.

1. Понятие финансовых рент. Виды финансовых рент.

В финансовых операциях часто предусматривают не разовые платежи, а множество выплат в течение срока. Например, получение и погашение кредита, взносы в различные фонды (страховой, пенсионный) и так далее. Последовательный ряд платежей и денежных поступлений называют ***потоком платежей***.

Ряд последовательных платежей, выплачиваемых через *равные* промежутки времени вне зависимости от их назначения, происхождения, целей называют ***финансовой рентой (или аннуитентом)***.

Финансовая рента характеризуется следующими параметрами:

1) Величиной отдельного платежа (R), где R – платеж за год;
2) Периодом ренты (интервал времени между последовательными платежами);
3) Сроком ренты (интервал времени от начала до конца последнего периода);
4) Процентной ставкой (i) или номинальной ставкой (j).

Отдельные виды рент могут характеризоваться:

- числом платежей в год;
- моментом платежей (начало или конец периода).

Виды рент.

Финансовые ренты различаются:

1) по продолжительности периода:

- годовые (в год один платеж);
- р - срочные (р - число платежей в году);
- ренты с периодом, превышающим год.

2) по числу отдельных платежей:

- временные или ограниченные (с конечным числом платежей);
- бесконечные (вечные).

3) по величине платежей:

- постоянные (с равными платежами);
- переменные.

4) по числу начисления процентов:

- с начислением процентов один раз в год;
- несколько раз в год.

5) по моменту выплат:

- постнумерандо (обычные, когда платежи осуществляются в конце соответствующих периодов);
- пренумерандо (платежи осуществляются в начале периодов).

Так как платежи осуществляются через равные интервалы времени, то это позволило разработать *теорию количественного анализа рент*, в котором решаются два типа задач:

1. Определение назначенный суммы - суммы всех платежей с начисленными на них процентами к концу срока (S);
2. Вычисление современной (приведенной, капитализированной) величины - суммы всех платежей, дисконтированных на момент времени, совпадающий с началом потока платежей (A).

2. Постоянная финансовая рента постнумерандо.

Расчет наращенной величины.

Рассмотрим расчет наращенной суммы для наиболее сложного случая, когда рента выплачивается ***p*** раз в год, а на платежи начисляются проценты ***m*** раз в год.

$$S = R \times \frac{\left[1+\left(\frac{j}{m}\right)\right]^{mn} - 1}{p\left[\left(1+\left(\frac{j}{m}\right)\right)^{\frac{m}{p}} - 1\right]} = R \times s \qquad (1)$$

где, S - наращенная сумма;

R - платежи (взносы) за год;

j - номинальная ставка;

m - количество начисления процентов (в году);

n - время начисления процентов (лет);

p - количество взносов в году.

s (Kн) - коэффициент наращения, показывающий во сколько раз наращенная сумма больше суммы годовых платежей.

$$s\ (K_н) = \frac{\left[1+\left(\frac{j}{m}\right)\right]^{m\ n} - 1}{p\left[\left(1+\left(\frac{j}{m}\right)\right)^{\frac{m}{p}} - 1\right]}$$

Из формулы (1) можно получить частные случаи [Батракова Л.Г. Финансовые расчеты в коммерческих сделках. URL: https://moodle.yspu.org/pluginfile.php/87784/mod_book/chapter/5191/Батракова%20Л.Г.%20-%20Финансовые%20расчеты%20в%20коммерческих%20сделках%20.pdf, стр. 89]:

p = m ***m = 1*** ***p = 1*** ***p = m = 1***

Таблица 1.1.

p = m	$S = R\times\dfrac{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{mn}-1}{j}$ (2)
p = m = 1	$S = R\times\dfrac{(1+i)^{n}-1}{i}$ (3)
m = 1	$S = R\times\dfrac{(1+i)^{n}-1}{p[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1]}$ (4)
p = 1	$S = R\times\dfrac{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{m}-1}$ (5)

Рассмотрим пример расчета наращенной суммы.

Задача 1.

Для создания фонда средств предприятия выделяется 10 тыс руб. На эти средства начисляются сложные проценты по годовой ставке 7%. Определить сумму средств фонда через пять лет для следующих условий:

а) поступления взносов в конце года, начислении процентов раз в год;

б) поступление взносов по полугодиям, начисление процентов поквартально;

в) поступление взносов и начисление процентов ежеквартально.

Решение:

а) Условие: ***p = m = 1*** (формула 3)

$$S = 10\times\frac{(1+0{,}07)^5-1}{0{,}07} = 10\times\frac{0{,}4026}{0{,}07} = 57{,}514$$ тыс. руб. ($К_н$ = 5,7514)

б) Условие: ***p = 2, m = 4*** (формула 1)

$$S = 10\times\frac{(1+0{,}007\,:\,4)^{4\cdot5}-1}{2\times[(1+0{,}007\,:\,4)^{4:2}-1]} = 10\times\frac{0{,}4148}{0{,}0706} = 58{,}754$$ тыс.руб.

($К_н$ = 5,8754)

в) Условие: ***p = m = 4*** (формула 2)

$$S = 10\times\frac{(1+0{,}007\,:\,4)^{4\cdot5}-1}{0{,}07} = 10\times\frac{0{,}4148}{0{,}07} =$$ 59,257 тыс.руб.

($К_н$ = 5,9257)

Вывод: В зависимости от условий поступления взносов и начисления процентов наращенные суммы различны. Множитель наращения больше при ежеквартальных платежах и ежеквартальных начислениях процентов.

Расчет современной величины.

Рассмотрим расчет <u>современной величины</u> ренты. Для наиболее общего случая когда рента p - срочная и начисление процентов производится m раз в год.

$$A = R \times \frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{p\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right]} = R \times a \qquad (6)$$

где *A* – современная (приведенная, капитализированная) величина (сумма всех дисконтированных членов ренты на начало ее срока);

a (K_{np}) – коэффициент приведения.

$$a\ (K_{np}) = \frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-m\ n}}{p\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right]}$$

С помощью общего случая получить ряд частных.

Таблица 1.2.

p = m	$A = R\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{j}$ (7)
p = m = 1	$A = R \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ (8)
m = 1	$A = R \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{p\left[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\right]}$ (9)
p = 1	$A = R \times \frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1}$ (10)

Рассмотрим пример расчета современной величины.

Задача 2.

Определить современную величину ренты с платежом равным 10 тыс. руб., осуществляемым поквартально в течении 5 лет по сложной ставке 7% годовых.

Решение:

Расчеты проводим по формуле (9):

$n = 5;\ i = 0{,}07;\ p = 4;\ m=1.$

$$A = 10 \times \frac{1-(1+0{,}07)^{-5}}{4 \times \left[(1+0{,}07)^{0{,}25} - 1\right]} = 10 \times \frac{0{,}2870}{0{,}068} = 42{,}206 \text{ тыс. руб.}$$

$$(a\ (K_{пр}) = 4{,}2206)$$

Ответ: современная величина будущих платежей равна 42,206 тыс. руб.

Эквивалентность между наращенной суммой и современной величиной ренты.

Современная величина ренты *эквивалентна* в финансовом смысле самой ренте и представляет собой ее оценку в виде некоторой величины, приуроченной к некоторому моменту времени (например, к началу срока). Наращенная сумма является некоторым обобщением ренты, приуроченной к концу срока ренты.

Рассмотрим случай, когда $m=p=1$.

Пусть A есть оценка ренты на начало срока, а S - наращенная ее сумма, то наращение процентов на величину A за n периодов дает сумму равную S:

$$S = A \times (1+i)^n \qquad (11)$$

Доказательство:

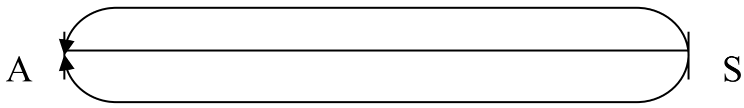
$$A \times (1+i)^n = R \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \times (1+i)^n = R \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} = S$$

Аналогично дисконтирование величины S приведет к величине A, т.е.

$$A = S \times (1+i)^{-n} \qquad (12)$$

Графически эквивалентность можно изобразить следующим образом:

$$A \times (1+i)^n = S$$



$$\frac{S}{(1+i)^n} = A$$

3. Постоянная финансовая рента пренумерандо.

Напомним, что отличие ренты пренумерандо от постнумерандо в том, что платежи производятся в начале каждого периода. Поэтому платеж ренты пренумерандо “работает” на один период больше, чем при ренте постнумерандо.

Расчет наращенной величины.

Первый взнос ренты постнумерандо равный 1 ден.ед., обратиться к концу ренты, в величину $(1 + i)^{n-1}$ ден.ед., а первый взнос ренты пренумерандо с процентами к концу срока будет равен $(1 + i)^n$ ден.ед. В свою очередь последний взнос ренты постнумерандо, равный 1 ден. ед., не приносит процент, а у ренты пренумерандо к концу срока он вырастает до $(1 + i)$ ден. ед.

Легко заметить, что между коэффициентами наращения для ренты постнумерандо K_n и ренты пренумерандо $K_{н\,(n)}$ есть связь:

$$K_{н\,(n)} = K_n\ (1+i)$$

Таким образом, ***наращенная сумма для ренты пренумерандо*** в общем виде будет равна:

$$S_n = S\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}, \text{ т.е.}$$

$$S_n = R\times\frac{\left[1+\left(\frac{j}{m}\right)\right]^{m\,n}-1}{p\left[\left(1+\left(\frac{j}{m}\right)\right)^{\frac{m}{p}}-1\right]}*\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}$$

где S - наращенная сумма постнумерандо.

S_n – наращенная сумма пренумерандо.

Рассмотрим пример расчета наращенной суммы.

Задача 3. Взносы в фонд предприятия будут производиться на протяжении 3-х лет по 10 тыс. руб. На взносы будут начисляться проценты по ставке 8% годовых. Определите наращенную сумму, если платежи будут поступать: а) в конце года; б) в начале года.

Решение

1. В первом случае используется финансовая рента постнумерандо.

Для расчета наращенной суммы используем формулу 3 , когда m=p=1:

$$S = 10\frac{(1+0{,}08)^3-1}{0{,}08} = 32{,}464 \text{ тыс. руб.}$$

2. Во втором случае используется финансовая рента пренумерандо.

Для расчета наращенной суммы используем формулу 3 из таблицы 4.1.2, когда m=p=1:

$$S_n = 32{,}464\ (1+ 0{,}08)=35{,}061 \text{ тыс. руб.}$$

Вывод: наращенная сумма ренты пренумерандо больше наращенной суммы постнумерандо на один процентный платеж, равный 2,597 тыс. руб. (35,061 – 32,464).

Расчет современной величины.

Современная величина ренты пренумерандо в общем виде будет вычисляться.

$$A_n = \frac{R \times \dfrac{1-\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{-m\,n}}{p\left[\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right]}}{} \times \left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}$$

$$A_n = A \times \left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}$$

где A – современная величина ренты постнумерандо;

A_n – современная величина ренты пренумерандо.

Формулы для расчета наращенной и современной величины ренты пренумерандо занесем в таблицу 2.

Таблица 2.

Формулы расчета наращенной и современной величины ренты пренумерандо.

Случаи	**Расчет S_n**	**Расчет A_n**
Общий случай $p \neq m$	$S_n = S\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}$	$A_n = A\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}$
p = m	$S_n = S\left(1+\frac{j}{m}\right)$	$A_n = A\left(1+\frac{j}{m}\right)$
p = m =1	$S_n = S(1+i)$	$A_n = A(1+i)$
m = 1 $p \neq 1$	$S_n = S(1+i)^{\frac{1}{p}}$	$A_n = A(1+i)^{\frac{1}{p}}$
p = 1 $m \neq 1$	$S_n = S\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}$	$A_n = A\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}$

Рассмотрим пример расчета современной величины.

Задача 4. Определите современную величину ренты пренумерандо, ежегодные выплаты по которой в размере 20 тыс. руб. осуществляются в течение 3-х лет по сложной ставке 60% годовых при следующих условиях:

1) выплаты ежегодные, начисление процентов поквартальное;
2) выплаты и начисление процентов поквартальные.

Решение

1. В первом случае для расчета современной величины используем формулу, когда p = 1:

$$A_n = 20 \times \frac{1-\left(1+\frac{0,6}{4}\right)^{-4\times 3}}{\left(1+\frac{0,6}{4}\right)^{4}-1} \times \left(1+\frac{0,6}{4}\right)^{4} = 37,96 \text{ тыс. руб.}$$

2. Во втором случае для расчета современной величины используем формулу, когда m=p:

$$A_n = 20 \times \frac{1-\left(1+\frac{0,6}{4}\right)^{-3\times 4}}{\frac{0,6}{4}} \times \left(1+\frac{0,6}{4}\right) = 31,16 \text{ тыс. руб.}$$

Вывод: более выгодным для принятия решения о выборе финансовой ренты является условие с ежегодными выплатами и поквартальным начислением процентов.

4. Конверсия рент.

Под *конверсией* ренты обычно понимают изменение условий финансового соглашения, то есть изменение одного связанного с рентой договора другим договором при сохранении интересов участников сделки. При этом изменяться может процентная ставка, срок погашения, могут быть облегчены условия выплаты долга для заемщика или выгодные условия для возврата выделенной суммы для кредитора. Наиболее распространенным является способ, при котором происходит объединение нескольких рент в одну (консолидация долгов). Конверсия рент основывается на принципе эквивалентности платежей. Рассмотрим некоторые случаи конверсии рент.

1) Рассмотрим случай, когда необходимо ***заменить продолжительность рент***. Например, годовая рента со сроком n_1 заменяется рентой со сроком n_2.

Уравнение эквивалентности имеет вид:

$$R_1 * \frac{(1-(1+i)^{-n_1})}{i} = R_2 * \frac{(1-(1+i)^{-n_2})}{i};$$

Отсюда:

$$R_2 = R_1 * \frac{1-(1+i)^{-n_1}}{1-(1+i)^{-n_2}}$$

Аналогично можно вывести формулы для замены процентных ставок.

2) Рассмотрим на конкретном примере случай ***замены ренты единовременным платежом*** .

Задача 5. Фирма изучает предложение арендодателя о замене ежегодной арендной платы в течение пяти лет в размере 48 тыс. руб. на оплату аренды единовременным платежом в размере 150 тыс. руб. При этом минимально необходимая норма наращения капитала составляет 30 % годовых. Установить, приемлемо ли для фирмы предложение арендодателя.

Дано: R = 48 тыс. руб. Найти: А1.
n = 5 лет Сравнить: А1 с А2.
i = 35%

A_2 = 150 тыс. руб.

Решение:

Рассмотрим эту задачу, в категориях финансовой ренты. Речь идет об определении такой суммы единовременного платежа в начале рентного периода, который был бы равнозначным рентным взносам в течении пяти лет при 30 % уровне доходности арендодателя.

Сумма разового платежа (формула 8):

$$A_1 = 48 \times \frac{1-(1+0,3)^{-5}}{0,3} = 48 \times 2,43557 = 116,907 \text{ тыс. руб.}$$

Вывод: сумма 116,907 тыс. руб. меньше предложенной арендодателем суммы 150 тыс. руб. Следовательно, предложение арендодателя является для арендатора (предприятия) невыгодным. Так как разовый платеж оказывается чрезмерным, потому что из оборота предприятия изымается в начале рентного периода сумма, превосходящая ежегодные будущие рентные платежи с нормой доходности 30 %. Приемлемой для арендатора будет сумма в размере, не превышающем 116,907 тыс. руб.

Вывод по лекции.

Ренты имеют большое практическое значение в финансовых расчетах. Количественный анализ финансовых рент сводится к расчету наращенных сумм и современной величины ренты. Конверсия рент имеет практическое значение и базируется на условиях финансовой эквивалентности.