

Ярославский государственный педагогический университет
им. К. Д. Ушинского

050100.62 "Педагогическое образование"
профили "Физическое образование", "Информатика и информационные технологии в
образовании"

Общая физика

раздел

"Электродинамика"

составитель П.Г. Штерн

Оглавление

1	Электростатическое поле в вакууме	4
1.1	Микроскопические носители электрических зарядов	4
1.2	Элементарный заряд и его инвариантность	7
1.3	Закон Кулона	10
1.3.1	Полевая трактовка закона Кулона	11
1.4	Электрическое поле и электрическое смещение	12
1.4.1	Принцип суперпозиции электрических полей	14
1.4.2	Электрический диполь. Поле диполя	15
1.5	Теорема Гаусса	17
1.5.1	Теорема Гаусса	17
1.5.2	Применения теоремы Гаусса	18
1.5.3	Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости и двух плоскостей	19
1.5.4	Поле равномерно заряженной бесконечной нити	20
1.5.5	Поле равномерно заряженной сферы	21
1.5.6	Поле равномерно заряженного шара	21
1.5.7	Теорема Гаусса в дифференциальной форме	22
1.5.8	Закон сохранения заряда	23
1.6	Потенциал электростатического поля	25
1.6.1	Работа сил электростатического поля. Консервативность электроста- тических сил	25
1.6.2	Теорема о циркуляции вектора напряженности поля	25
1.6.3	Определение потенциала электростатического поля	26
1.6.4	Связь между потенциалом и напряженностью	27
1.6.5	Вычисление разности потенциалов для некоторых видов полей	28
2	Электростатическое поле при наличии проводников	30
2.1	Проводники в электростатическом поле. Конденсаторы и энергия электро- статического поля	30
2.1.1	Проводники в электростатическом поле. Поле внутри и вне заряжен- ного проводника	30
2.1.2	Силы, действующие на поверхность проводника	31
2.1.3	Свойства замкнутой проводящей оболочки	32
2.1.4	Общая задача электростатики. Метод изображений	33
2.1.5	Электрическая емкость проводника	35
2.1.6	Конденсаторы	36
3	Энергия взаимодействия зарядов и энергия электростатического поля	39
3.1	Энергия заряженного проводника и конденсатора	39
3.1.1	Плотность энергии электростатического поля	39

4	Электростатическое поле при наличии диэлектриков	41
4.1	Диэлектрики в электрическом поле	41
4.1.1	Поляризация диэлектриков. Полярные и неполярные диэлектрики. Свободные и связанные заряды	41
4.1.2	Вектор поляризации, диэлектрическая восприимчивость и диэлектрическая проницаемость	42
4.1.3	Теорема Гаусса для поля в диэлектрике. Явления на границе раздела двух диэлектриков. Преломление линий смещения и напряженности .	43
4.1.4	Неполярные диэлектрики	45
4.1.5	Полярные диэлектрики	47
4.1.6	Сегнетоэлектрики, пьезоэлектрики, электреты. Явления на разломах	50
5	Постоянный электрический ток	52
5.1	Постоянный ток. Законы Ома и Джоуля-Ленца	52
5.1.1	Постоянный ток. Виды тока. Сила тока. Плотность тока	52
5.1.2	Закон Ома в дифференциальной форме	53
5.1.3	Закон Ома в интегральной форме. Сопротивление	54
5.1.4	Сторонние силы. Электродвижущая сила. Обобщенный закон Ома . .	54
5.1.5	Работа и мощность тока. Закон Джоуля-Ленца в дифференциальной и интегральной формах	55
5.1.6	Линейные цепи. Правила Кирхгофа	55
6	Квазистационарные электрические цепи	59
6.1	Переходные процессы в цепи с конденсатором	59
7	Электропроводность твердых тел	62
7.1	Электропроводность металлов	62
8	Электрический ток в вакууме	68
9	Постоянное магнитное поле в вакууме	74
9.1	Магнитное поле в вакууме	74
9.1.1	Сила Лоренца. Поле B	74
9.2	Закон Био—Савара	77
9.3	Основные законы магнитного поля	78
9.4	Применения теоремы о циркуляции вектора B	80
9.5	Дифференциальная форма основных законов магнитного поля	82
9.6	Сила Ампера	83
9.7	Момент сил, действующих на контур с током	85
9.8	Работа при перемещении контура с током	87
10	Магнитное поле в магнетиках	89
10.1	Магнитное поле в веществе	89
10.1.1	Магнитный момент электронов и атомов. Намагниченность	89
10.1.2	Диамагнетики, парамагнетики, ферромагнетики	91
10.1.3	Парамагнетики	94
10.1.4	Ферромагнетики	96
10.1.5	Условия на границе раздела двух магнетиков	98

11	Электромагнитное поле	100
11.1	Законы преобразования полей \mathbf{E} и \mathbf{B}	100
11.2	Следствия из законов преобразования полей	103
11.3	Инварианты электромагнитного поля	104
12	Электромагнитная индукция	105
12.1	Электромагнитная индукция	105
12.1.1	Индукция токов в движущихся проводниках	105
12.2	Закон электромагнитной индукции Фарадея	108
12.2.1	Движущийся проводник в переменном магнитном поле	110
12.3	Дифференциальная формулировка закона электромагнитной индукции . . .	110
12.3.1	Непотенциальность индукционного электрического поля	111
12.4	Самоиндукция. Индуктивность соленоида	111
13	Электромагнитные волны	113
13.1	Уравнения Максвелла	113
13.1.1	Электромагнитное поле. Ток смещения. Уравнения Максвелла в интегральной форме	113
13.1.2	Уравнения Максвелла в дифференциальной форме	115
13.1.3	Закон сохранения заряда. Теорема Пойнтинга. Энергия электромагнитного поля. Вектор Умова-Пойнтинга	116
13.1.4	Волновое уравнение. Решения волнового уравнения. Интенсивность электромагнитной волны	118

Глава 1

Электростатическое поле в вакууме

1.1 Микроскопические носители электрических зарядов

Описываются свойства основных микроскопических носителей электрических зарядов. Обсуждается распределение электрического заряда в протоне и нейтроне и анализируется его физический смысл.

Классификация. Под микроскопическими носителями зарядов понимаются заряженные частицы и ионы. Они могут нести как положительный, так и отрицательный заряд. По числовому значению он может быть лишь в целое число раз больше элементарного:

$$|e| = 1,6021892(46) \cdot 10^{-19} \text{ Кл.} \quad (1.1)$$

К настоящему времени не обнаружено микроскопических носителей с дробным зарядом, несмотря на значительные экспериментальные усилия

Известно около 200 частиц и громадное число ионов, атомов и молекул. Большая часть частиц после возникновения существует непродолжительное время, по истечении которого распадается на другие частицы, т. е. *частицы имеют конечное время жизни.*

В большинстве случаев оно чрезвычайно мало и составляет ничтожные доли секунды. *Существует лишь небольшое число заряженных частиц с бесконечным временем жизни. Это электрон, протон и их античастицы.* В состав ядер атомов входят протоны, а в состав электронной оболочки атомов — электроны. Именно эти частицы обуславливают почти все явления, изучаемые в курсе электричества и магнетизма. В состав ядер кроме протонов входят также нейтроны. Они электрически нейтральны и их время жизни в составе ядер неограниченно. Однако вне ядер они живут в среднем около 17 мин, распадаясь на протоны, электроны и антинейтрино.

Заряженность ионов обуславливается тем, что в электронной оболочке соответствующего атома или молекулы недостает одного или нескольких электронов (положительные ионы) или, наоборот, имеются лишние (отрицательные ионы). Поэтому вопрос об ионах как микроскопических носителях зарядов сводится к вопросу о зарядах электронов и протонов.

Электрон. Электрон является материальным носителем элементарного отрицательного заряда. *Обычно принимается, что электрон является точечной бесструктурной частицей*, т. е. весь электрический заряд электрона сосредоточен в точке. Такое представление внутренне противоречиво, так как энергия электрического поля, создаваемого точечным зарядом, бесконечна, а следовательно, должна быть бесконечной и инертная масса точечного заряда, что противоречит эксперименту, поскольку масса электрона равна $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг. *Однако с этим противоречием приходится мириться вследствие*

отсутствия более удовлетворительного и менее противоречивого взгляда на структуру (или отсутствие структуры) электрона. Трудность бесконечной собственной массы успешно преодолевается при вычислениях различных эффектов с помощью **перенормировки массы**, сущность которой заключается в следующем. Пусть требуется рассчитать некоторый эффект, причем в расчет входит бесконечная собственная масса. Получаемая в результате такого вычисления величина бесконечна и, следовательно, лишена непосредственного физического смысла. Чтобы получить физически разумный результат, проводится еще одно вычисление, в котором присутствуют все факторы, за исключением факторов рассматриваемого явления. В последний расчет также входит бесконечная собственная масса и он приводит к бесконечному результату. Вычитание из первого бесконечного результата второго приводит к взаимному сокращению бесконечных величин, связанных с собственной массой, а оставшаяся величина является конечной. Она характеризует рассматриваемое явление. Таким способом удается избавиться от бесконечной собственной массы и получить физически разумные результаты, которые подтверждаются экспериментом. Такой прием используется, например, при вычислении энергии электрического поля (см. § 18).

Протон. Носителем положительного элементарного заряда является протон. В отличие от электрона, он не рассматривается как точечная частица. Экспериментально хорошо изучено распределение электрического заряда внутри протона. Метод изучения аналогичен использованному в начале текущего столетия Резерфордом для исследования структуры атомов, в результате которого было открыто существование ядра. Анализируется столкновение электронов с протоном. Если представить себе протон в виде *сферически симметричного* распределения заряда в конечном объеме, то *траектория электрона, не проходящего через этот объем, не зависит от закона распределения заряда*. Она точно такая же, как если бы весь заряд протона был сосредоточен в его центре. *Траектории электронов, проходящих через объем протона, зависят от конкретного вида распределения заряда в нем.* Эти траектории могут быть вычислены. Поэтому, проведя достаточное число наблюдений за результатами столкновений электронов с протонами, можно сделать заключение о распределении заряда внутри протона. Поскольку речь идет об очень малых областях пространства, для экспериментов пришлось воспользоваться электронами очень больших энергий. Такая необходимость диктуется квантовой теорией. По соотношениям де Бройля материальные частицы обладают волновыми свойствами, причем длина волны частицы обратно пропорциональна импульсу. Чтобы "прощупать" некоторую пространственную деталь, необходимо, очевидно, пользоваться частицами, длина волны которых меньше соответствующих пространственных размеров детали, а это соответствует достаточно большим импульсам. Поэтому исследование электромагнитной структуры протона¹ стало возможным лишь после создания электронных ускорителей на энергии в несколько миллиардов электрон-вольт. На рис. 1.1, а приведен результат этих экспериментов. По оси ординат отложена не плотность заряда на расстоянии r от центра протона, а величина $4\pi r^2\rho$, представляющая плотность сум-

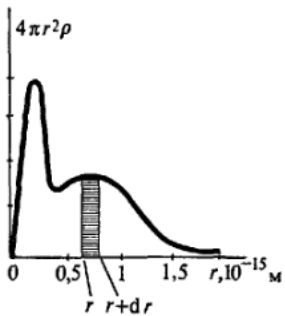
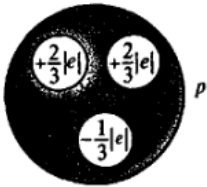
а)

 б)


Рис. 1.1

Электромагнитная структура протона. Почти весь заряд протона сосредоточен внутри шара радиусом r_0

Электрон рассматривается как точечная частица, хотя это и приводит к трудностям. Экспериментально обнаружить внутреннюю электромагнитную структуру электрона пока не удалось. Непрерывное распределение элементарного электрического заряда не связано с его разбиением на части, а означает учет закона движения этого заряда в пространстве.

марного по всем направлениям заряда на расстоянии r от центра, поскольку $4\pi r^2 \rho(r) dr$ — полный заряд в сферическом слое толщиной dr . Из рисунка видно, что *практически весь заряд протона сосредоточен в шаре радиусом $\approx 10^{-15}$ м. После первого максимума $4\pi r^2 \rho(r)$ не убывает монотонно, а имеется еще один максимум.*

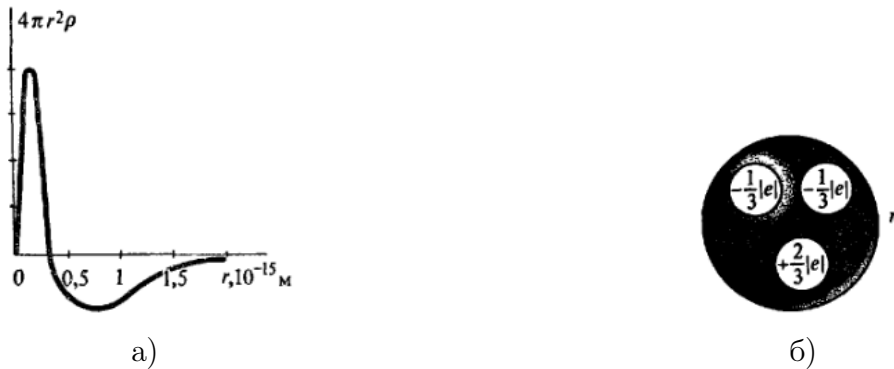


Рис. 1.2. Электромагнитная структура нейтрона. Вблизи центра нейтрона располагается положительный заряд, а дальше от центра — отрицательный. Положительный и отрицательный заряды взаимно компенсируют друг друга и поэтому в целом нейтрон электрически нейтрален.

Нейтрон. Аналогичные эксперименты были проведены также по рассеянию электронов на нейтронах. Они показали, что нейтрон обладает электромагнитной структурой и не является точечной электрически нейтральной частицей. Распределение электрического заряда внутри нейтрона показано на рис. 1.2а).

Очевидно, что *вблизи центра нейтрона располагается положительный заряд, а дальше от центра — отрицательный.* Площади, ограниченные кривыми и осью абсцисс, равны, следовательно, положительный заряд равен отрицательному, и в целом нейтрон электрически нейтрален. *Размеры областей, в которых сосредоточены электрические заряды, у протона и нейтрона примерно одинаковы.*

Что означает непрерывное распределение электрического элементарного заряда? Площадь, ограниченная кривой и осью абсцисс (см. рис. 1.1, а), численно равна заряду протона, а заштрихованная площадь — заряду внутри протона в шаровом слое толщиной dr на расстоянии r от центра протона. Ясно, что этот заряд составляет лишь небольшую часть от полного заряда протона, т. е. небольшую часть элементарного заряда. Однако *в природе не удалось обнаружить физических объектов, заряд которых равен дробной части от элементарного.* Спрашивается, каков смысл утверждения, что в объеме $4\pi r^2 dr$ находится небольшая часть элементарного заряда?

В настоящее время предполагается, что протон состоит из двух точечных кварков с зарядом $+2|e|/3$ и одного — с зарядом $-|e|/3$ (см. рис. 1.1, б). Кварки в протоне движутся. Их относительное время пребывания на различных расстояниях от центра протона может быть эффективно представлено в виде размазанности заряда по объему протона, как показано на рис. 1.1, а. Нейтрон состоит из двух кварков с зарядом $-|e|/3$ и одного — с зарядом $+2|e|/3$ (рис. 1.2, б). Объяснение распределения заряда в нем (рис. 1.2, а) аналогично.

В свободном состоянии кварки не обнаружены, несмотря на значительные экспериментальные усилия. В настоящее время считается, что их в принципе нельзя обнаружить в свободном состоянии, поскольку для этого надо затратить бесконечную энергию, а внутри протона они все же существуют. Такое допущение позволяет объяснить многие явления и поэтому принимается физиками в качестве вероятной гипотезы.

Прямое экспериментальное доказательство наличия кварков внутри протона отсутствует.

Спин и магнитный момент. Кроме заряда частицы могут обладать моментом импульса или спином². Спин не обусловлен вращением частицы, поскольку для такого объяснения при разумных предположениях о размерах частиц пришлось бы допустить наличие линейных скоростей при вращении, превосходящих скорость света, что невозможно. Поэтому *спин рассматривается как внутреннее свойство частицы.*

Со спином связано наличие у заряженной частицы магнитного момента, который также не может быть объяснен движением заряда и рассматривается как первоначальное свойство.

В классической электродинамике магнитный момент может быть лишь результатом движения зарядов по замкнутым траекториям. Поэтому спиновый магнитный момент частиц не может быть описан в классической теории электричества и магнетизма. Однако магнитное поле, обусловленное спиновыми магнитными моментами, может быть при необходимости описано феноменологически. Как правило, напряженность этого поля очень мала. Лишь в случае постоянных магнитов оно достигает больших значений. Классическая теория не в состоянии описать механизм возникновения этого поля, но само поле вне постоянных магнитов полностью описывается классической теорией (см. § 38).

1.2 Элементарный заряд и его инвариантность

Описываются эксперименты, доказывающие существование элементарного электрического заряда и отсутствие зарядов, дробных относительно элементарного. Обсуждаются экспериментальные свидетельства одинаковости абсолютных значений положительных и отрицательных элементарных зарядов и инвариантности заряда.

Опыты Милликена. Мысль о дискретности электрического заряда была в ясной форме высказана уже Б. Франклином в 1752 г., однако она носила умозрительный характер. Как экспериментальный результат дискретность зарядов в принципе следует из открытых в 1834 г. М. Фарадеем (1791 — 1867) законов электролиза. Однако такой вывод из законов электролиза был сделан лишь в 1881 г. Г. Л. Гельмгольцем (1821-1894) и Д. Стонеем (1826-1911). Вскоре после этого в 1895 г. Г. Лоренц (1853 — 1928) разработал теорию электромагнетизма, основывающуюся на представлении о реально существующих элементарных зарядах (электронах). Числовое значение элементарного заряда было теоретически вычислено на основании законов электролиза, поскольку значение постоянной Авогадро было известно. Прямое экспериментальное измерение элементарного заряда было выполнено Р.Э. Миллиkenом (1868-1953) в 1909 г.

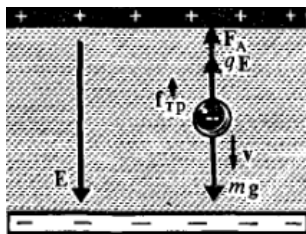


Рис. 1.3. Схема опытов Милликена

Схема опытов Милликена изображена на рис. 1.3. Маленькие шарообразные частицы движутся в вязкой жидкости при наличии однородного электрического поля. На частицу действуют подъемная сила, направленная против силы тяжести (плотность частицы больше плотности жидкости), и сила вязкого трения $f_{тр}$, направленная против скорости.

Сила вязкого трения в соответствии с формулой Стокса пропорциональна скорости. При постоянной скорости частицы сумма действующих на нее сил равна нулю.

Все силы, за исключением действующей на частицу со стороны электрического поля, могут быть измерены экспериментально при движении частицы в

² Не существует заряда, меньше элементарного. Каков смысл представления о распределении заряда в протоне, если его полный заряд равен элементарному?

С какой основной трудностью связано представление об электроне как о точечной частице. Каким искусственным приемом эта трудность преодолевается?

среде без электрического поля. Изучив затем движение частицы в электрическом поле, найдем силу qE . Это позволит вычислить заряд q частицы, поскольку напряженность поля известна.

Можно также изменять напряженность электрического поля и добиться, чтобы частица находилась в покое. В этом случае сила трения также отсутствует, а остальные силы известны. Поэтому, зная, можно определить q .

Заряд частицы с течением времени изменяется, что отражается на движении частицы. Определив заряды q_1 и q_2 частицы в различные промежутки времени, можно найти изменение заряда

$$\Delta q = q_2 - q_1 \quad (1.2)$$

Произведя большое число измерений зарядов, Милликен нашел, что Δq является всегда целым, кратным одной и той же величине $|e|$:

$$\Delta q = n |e|, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (1.3)$$

$$|e| = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}. \quad (1.4)$$

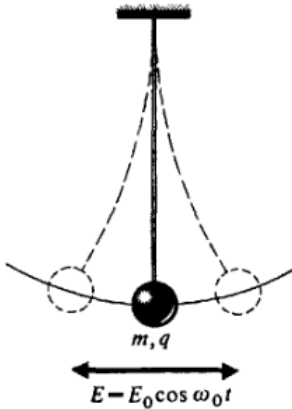


Рис. 1.4. Схема резонансного метода измерения элементарного заряда

Резонансный метод измерения заряда. В дальнейшем методы прямого измерения элементарного заряда были усовершенствованы³. В настоящее время точность измерений такова, что позволяет обнаружить десятые доли элементарного заряда. Наиболее эффективным является резонансный метод, схема которого изображена на рис. 1.4. Шарик достаточно малой массы m укреплен на очень тонком упругом стержне. Под влиянием сил упругости, возникающих при изгибе стерженька, шарик колеблется около положения равновесия с собственной частотой ω_0 , которая может быть измерена экспериментально. Если на шарике есть некоторый заряд q , то под действием переменного электрического поля шарик осуществляет вынужденные колебания, амплитуды которых зависят от соотношения между частотами ω и ω_0 . Максимальная амплитуда колебаний достигается в резонансе ($\omega \approx \omega_0$). Амплитуда колебаний шарика в резонансе равна

$$A_{\text{рез}} = \frac{qE_0Q}{(m\omega_0^2)}, \quad (1.5)$$

где Q — добротность системы, E_0 — амплитуда напряженности электрического поля. Оценим возможности метода. Предположим, что $m = 1 \text{ мг} = 10^{-6} \text{ кг}$; $E_0 \approx 10^5 \text{ В/м}$;

$q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$; $\omega_0 = 10^{-1} \text{ с}^{-1}$; $Q \approx 100$, тогда

$$A_{\text{рез}} \approx \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^5 \cdot 10^2}{10^{-6} \cdot 10^{-2}} \text{ м} \approx 1,6 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 160 \text{ мкм}. \quad (1.6)$$

Величина 160 мкм является очень большой и легко измерить ее небольшую часть. Следовательно, таким способом можно измерить заряды много меньшие, чем $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$. Этот метод доведен до такого совершенства, что позволяет в принципе обнаружить и измерить заряд в десятые доли элементарного, если бы он существовал.

³ Поиски кварков позволили с большой точностью доказать отсутствие в природе дробных зарядов.

Отсутствие кварков в свободном состоянии не доказывает их несуществование в связанном состоянии внутри элементарных частиц.

О В чем состоит принцип резонансного метода измерения элементарного заряда! Какова современная точность этого метода? Приведите числовые оценки.

При изменении заряда шарика на Δq амплитуда резонансных колебаний изменяется скачком:

$$\Delta A_{\text{рез}} = \Delta q E_0 Q / (m \omega_0^2) . \quad (1.7)$$

Измерения позволили с большой точностью установить, что заряд шарика изменяется всегда на целое число элементарных зарядов и что не существует зарядов, меньших элементарного.

Отсутствие дробного заряда. Были предприняты интенсивные поиски дробных зарядов. Это было инициировано предсказанием существования кварков. Предполагается, что кварки являются частицами, из которых построено большинство тяжелых элементарных частиц (протоны и др.). Было предсказано, что электрический заряд кварков должен составлять $1/3$ и $2/3$ элементарного заряда (с соответствующими знаками). Поиски кварков проводились многими учеными различными методами, в том числе и резонансным. Все они дали отрицательный результат. Таким образом, *в настоящее время экспериментально с большой точностью установлено, что дробных зарядов в свободном состоянии не существует.*

Мы выделяем слова "в свободном состоянии", поскольку эксперименты были направлены именно на поиск свободных кварков. *Однако отсюда не следует, что и в связанном состоянии внутри элементарных частиц кварки отсутствуют.* Однако прямая экспериментальная проверка этого утверждения неизвестна.

Равенство положительных и отрицательных элементарных зарядов. В описанных выше опытах измерялся как отрицательный элементарный, так и положительный заряд. Результаты этих опытов доказали их равенство с той же точностью, с какой измеряют значение зарядов. Эта точность не велика. Например, можно сказать, что по абсолютному значению положительный и отрицательный элементарные заряды отличаются не больше, чем на одну десятую часть своей величины, т. е

$$\frac{||e_+| - |e_-||}{|e_{\pm}|} \leq \frac{1}{10} . \quad (1.8)$$

Эта точность совершенно неудовлетворительна, потому что теория предполагает полное равенство абсолютных значений отрицательных и положительных элементарных зарядов.

Неизмеримо более точную оценку можно получить, не измеряя непосредственно значение элементарного заряда. Как известно, в атомах имеется одинаковое число протонов и электронов. Тела также содержат одинаковое число протонов и электронов. Поэтому оценка равенства зарядов протона и электрона может быть проведена по результатам измерения нейтральности тел. А это можно сделать чрезвычайно точно, поскольку даже очень небольшое ее нарушение приводит к возникновению громадных сил электрического взаимодействия между телами, которое легко заметить. Пусть, например, два железных шарика массой по 1 г, находящихся на расстоянии 1 м друг от друга, не нейтральны из-за того, что заряды протона отличаются от заряда электрона на одну миллионную долю заряда. Оценим, какая сила отталкивания возникнет между шариками. В 1 г ${}^{26}_{56}\text{Fe}$ имеется $6 \cdot 10^{23} \cdot 26/56$ зарядов каждого знака. Следовательно, при нарушении нейтральности всего на 10^{-6} на каждом шарике появится заряд

$$q = [1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-6} \cdot 6 \cdot 10^{23} \cdot 26/56] \text{ Кл} = 4,46 \cdot 10^{-2} \text{ Кл} . \quad (1.9)$$

Сила отталкивания между шариками равна

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2} = (4,46 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 9 \cdot 10^9 = 1,8 \cdot 10^7 = 18 \text{ МН} \quad (1.10)$$

Это означает, что между шариками возникает сила отталкивания, равная силе, с которой тяжеловесный железнодорожный состав массой почти 2 тыс. т давит на рельсы. И это всего-навсего при отличии зарядов протона и электрона на 10 часть заряда в 2 г железа. Ясно, что можно легко измерить силы между железными шариками, в громадное число раз меньшие (1.10). А если в эксперименте таких сил не обнаруживается, то это означает соответствующее увеличение точности, с которой заряд электрона по абсолютному значению равен заряду протона. В настоящее время экспериментально установлено, что отрицательный элементарный заряд электрона равен по абсолютному значению положительному заряду протона с относительной точностью 10^{-21} , т. е.

$$\frac{||e_+| - |e_-||}{|e_{\pm}|} \leq 10^{-21}. \quad (1.11)$$

Изложенное доказательство равенства абсолютных значений положительного и отрицательного элементарных зарядов может показаться недостаточно строгим. Можно представить себе тело, состоящее из атомов или молекул, в которых элементарные заряды по абсолютному значению не равны друг другу, хотя их числа в каждом атоме или молекуле одинаковы. В этом случае атомы или молекулы должны обладать зарядом, однако тело в целом может оставаться нейтральным, если в нем наряду с этими атомами и молекулами находятся в нужном числе свободные электроны или положительные ионы (в зависимости от знака заряда атомов или молекул). Однако при таком допущении возникают осложнения, с которыми трудно примириться. Например, приходится отказаться от представления об однородной структуре тел и принять зависимость их структуры от размеров и т. д. Тем не менее желательно иметь более прямое и непосредственное доказательство равенства абсолютных значений положительных и отрицательных элементарных зарядов в атомах. Такое доказательство было получено.

Нейтральность отдельных атомов проверялась прямыми экспериментами: исследовалось отклонение пучка нейтральных атомов в электростатических полях. По отклонению можно судить о заряде атома и сделать заключение о равенстве зарядов электронов и протонов в атоме. Исследования с пучками цезия ($Z = 55$) и калия ($Z = 19$) доказали, что абсолютные значения зарядов электрона и протона равны с относительной точностью $3,5 \cdot 10^{-19}$.

Инвариантность заряда. Независимость числового значения элементарного заряда от скорости также доказывается фактом нейтральности атомов. Из-за различия масс электронов и протонов можно заключить, что электроны в атомах движутся значительно быстрее протонов. *Если бы заряд зависел от скорости,* нейтральность атомов не могла бы соблюдаться. Например, электроны в атоме гелия движутся примерно в два раза быстрее, чем в молекуле водорода, а нейтральность атома гелия и молекулы водорода доказаны с большой точностью. Можно заключить, что с той же точностью заряд не зависит от скорости вплоть до скоростей электронов в атоме гелия. В атоме гелия скорость электронов равна примерно 0,02 с. В более тяжелых атомах, нейтральность которых доказана, электроны движутся во внутренних оболочках со скоростями, равными примерно половине скорости света. Тем самым экспериментально доказано, что элементарный заряд инвариантен вплоть до 0,5 с. Нет оснований предполагать, что он не инвариантен при более высоких скоростях. Поэтому *инвариантность электрического заряда принимается в качестве одного из экспериментальных обоснований теории электричества.*

1.3 Закон Кулона

Электродинамика (или *электромагнетизм*) – раздел физики, изучающий электрические и магнитные явления, а также их взаимосвязь. Этот раздел имеет огромное значение

в электронике, вычислительной технике, телекоммуникациях и связи. Электродинамика лежит в основе и *волновой оптики*, которая рассматривает свет как электромагнитные волны.

Электростатика – раздел электродинамики, изучающий взаимодействие и электрические поля покоящихся электрических зарядов.

Электрический заряд – характеристика частиц и тел, определяющая интенсивность их электромагнитного взаимодействия и величину создаваемого ими электрического поля. В 1729 году Шарль Дюфе обнаружил, что существует два рода зарядов. Один образуется при трении стекла о шёлк, а другой – смолы (эбонита) о шерсть. Поэтому Дюфе назвал заряды стеклянным и смоляным. Было установлено, что если на тело подать одновременно и стеклянный, и смоляной заряды, то эти заряды компенсируются – частично или полностью. По аналогии с положительными и отрицательными числами Бенджамин Франклин ввёл понятие о положительном и отрицательном заряде.

Заряды разных знаков притягиваются друг к другу, одного знака – отталкиваются. Единица измерения заряда в СИ – кулон (Кл). Заряд в один кулон очень велик, и чаще на практике заряды измеряют нанокулонами. Существует минимальный электрический заряд (*элементарный заряд*), равный $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Все остальные заряды больше в целое число раз (или равны). Носителями элементарного заряда являются некоторые элементарные частицы, например, электрон (один отрицательный элементарный электрический заряд) или протон (один положительный элементарный заряд). Заряд нейтрона равен нулю. Суммарный заряд любого атома, состоящего из этих частиц, равен нулю, поскольку число протонов нейтрального атома равно числу электронов.

Закон сохранения электрического заряда: электрический заряд изолированной системы сохраняется во времени. Закон сохранения заряда – один из фундаментальных законов физики. Величина заряда не зависит от скорости, с которой он движется, даже если скорость сравнима со скоростью света и перестает работать механика Ньютона.

В 1785 г. Шарль Кулон (1736 – 1806) опытным путем установил количественный закон взаимодействия электрических зарядов. При этом рассматривались *точечные заряды* – заряженные тела, размерами которых можно пренебречь (по сравнению с расстояниями между телами). *Закон Кулона: сила взаимодействия двух точечных зарядов обратно пропорциональна квадрату расстояния между зарядами, пропорциональна величине обоих зарядов и направлена вдоль линии, соединяющей оба заряда.* Таким образом, в скалярном виде закон Кулона выражается формулой:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (1.12)$$

где q_1 и q_2 – величины взаимодействующих зарядов; r – расстояние между зарядами;

$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9$ м/Ф – коэффициент пропорциональности; при этом отрицательный знак силы в формуле означает притяжение зарядов, а положительный – отталкивание;

$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Кл²/ (Н · м²) – электрическая постоянная.

1.3.1 Полевая трактовка закона Кулона

До работ Фарадея закон Кулона трактовался с позиций *дальнодействия*, т. е. считалось, что одно тело действует на другое как бы без посредников. Поэтому и называлась эта концепция как *действие на расстоянии*. В первой половине XIX в. выработалась другая точка зрения на механизм взаимодействия, согласно которой *взаимодействие между телами осуществляется лишь посредством непрерывной "передачи сил" через пространство между телами*. Такое представление получило название концепции **близкодей-**

ствия. Она была введена в науку Фарадеем (1791 – 1867) в ряде работ, опубликованных в период с 1831 по 1855 г. *Вместе с идеей близкодействия в науку вошло представление о поле как посреднике, осуществляющем взаимодействие.* Первоначально функции посредника приписывались среде, которая заполняет все мировое пространство. Эта среда получила название **Мирового эфира**. Состояние эфира характеризовалось определенными механическими свойствами, такими, как упругость, натяжение, движение одних частей среды относительно других и т. д. По этой трактовке сила, действующая на тело, является следствием взаимодействия тела со средой в той точке, в которой находится тело. Таким образом, *механизм взаимодействия формулируется в виде локальных соотношений.* Попытка математической формулировки этой механической картины передачи взаимодействий была предпринята в 1861-1862 гг. Максвеллом (1831-1879), пытавшимся представить силы электромагнитного взаимодействия в виде механических сил, обусловленных натяжениями и давлениями в эфире. Затем он перешел к феноменологической формулировке взаимодействия, характеризуя состояние среды с помощью векторов **E**, **D**, **H**, **B**, которым, однако, не дается какой-то механической интерпретации. Следует отметить, что при этом Максвелл не исключал возможности механического истолкования феноменологических уравнений. В 1864 г. он сформулировал уравнения электромагнитного поля — уравнения Максвелла. В дальнейшем выяснилось, что нельзя приписывать эфиру механических свойств и нельзя говорить о движении относительно эфира.

Надежда на механическое истолкование электромагнитных взаимодействий потеряла право на существование. Но идея локальной, формулировки взаимодействия и необходимость существования в пространстве поля, которое осуществляет это взаимодействие, сохранились. Поле становится первоначальной сущностью и характеризуется величинами, которые не могут быть интерпретированы в рамках механических представлений. Это утверждение в наиболее четкой форме было высказано в 1889 г.

Герцем (1857 — 1894), экспериментально открывшим электромагнитные волны и сформулировавшим уравнения Максвелла для вакуума в современном виде. Ясно, что поле существует в пространстве и времени наряду с материей в виде атомов, молекул и т. д.

Следовательно, поле есть также вид материи, обладающий свойствами для всякой материи характеристиками — импульсом, энергией и т. д.

1.4 Электрическое поле и электрическое смещение

Заряды взаимодействуют друг с другом на расстоянии. Это отличается от того, к чему мы привыкли в механике, когда тела обычно взаимодействуют при непосредственном механическом контакте. Поэтому для описания взаимодействия зарядов на расстоянии вводят понятие электрического поля. *Электрическое поле – это вид материи, посредством которой происходит силовое воздействие на электрические заряды.* Источником электрического поля может являться электрический заряд. Покоящийся заряд создает в пространстве вокруг себя только электрическое поле, а движущийся – еще и магнитное.

Заряд же является и индикатором поля. Наличие электрического поля в данной точке пространства определяют по силе, действующей на неподвижный положительный точечный заряд, помещенный в это поле (пробный заряд). Силовой характеристикой электрического поля является *напряженность электрического поля*. Ее определяют следующим образом. Если на неподвижный точечный заряд $q_{пр}$ действует сила \vec{F} , то в точке нахождения этого заряда существует электрическое поле напряженностью:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{пр}} . \quad (1.13)$$

Из формулы видно, что если пробный заряд отрицателен, то направление вектора напря-

жянности противоположно направлению силы. Видно также, что единицей напряженности в системе СИ является ньютон на кулон (Н/Кл). Ниже будет показано, что единицей напряженности может быть принят и вольт на метр (В/м): $1 \text{ Н/Кл} = 1 \text{ В/м}$.

Если известна зависимость напряженности электрического поля от координат $\vec{E}(\vec{r})$, то легко найти силу, действующую на точечный заряд $q_{\text{пр.}}$, помещенный в любую точку:

$$\vec{F}(\vec{r}) = q_{\text{пр.}} \vec{E}(\vec{r}). \quad (1.14)$$

Найдем *напряженность поля точечного заряда*. Поместим в точку \vec{r} пробный заряд $q_{\text{пр.}}$ и определим по закону Кулона действующую на него со стороны заряда q силу: $F = k \frac{qq_{\text{пр.}}}{r^2}$. Из определения напряженности (1.13):

$$E = \frac{F}{q_{\text{пр.}}} = k \frac{q}{r^2}. \quad (1.15)$$

Таким образом, напряженность поля, созданного точечным зарядом q , прямо пропорциональна величине этого заряда (создающего поле, заряда - источника поля) и обратно пропорциональна квадрату расстояния от заряда - источника поля до точки, где ищется поле. Естественно, что напряженность не зависит от величины пробного заряда, который является лишь индикатором поля. Если поместить начало координат в точку расположения заряда q , то уравнение (1.15) можно переписать в векторной форме:

$$\vec{E} = k \frac{q\vec{r}}{r^3}. \quad (1.16)$$

И действительно, в этом случае поле направлено по радиус-вектору для положительного заряда, и в противоположную радиус-вектору сторону – для отрицательного заряда.

Поле в каждой точке характеризуется силой и направлением. Поэтому его удобно графически описывать с помощью *линий напряженности (силовых линий)*. Их строят по следующим трем правилам:

1. Линии напряженности начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных или уходят в бесконечность.
2. Вектор напряженности направлен по касательной к линии напряженности в каждой точке.
3. Густота этих линий выбирается такой, чтобы количество линий, пронизывающих единичную нормальную площадку, было равно (или пропорционально) модулю напряженности электрического поля.

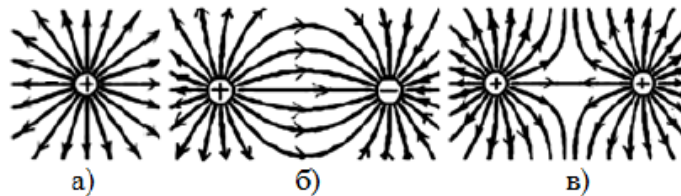


Рис. 1.5.

В соответствии с этими правилами силовые линии положительного точечного заряда представлены на рис. 1.5а. Силовые линии отрицательного заряда выглядят также, но направлены в противоположную сторону. Поле вблизи двух разноименных зарядов представлено графически на рис. 1.5б, вблизи двух одноименных положительных зарядов – на рис. 1.5в, Поле двух одноименных отрицательных зарядов выглядит так же, как поле двух

одноименных положительных зарядов, но силовые линии направлены в противоположную сторону.

Заметим, что если расстояние между силовыми линиями на рисунках увеличивается вдвое, то напряженность, обратно пропорциональная приходящейся на силовую линию площади (квадрату расстояния), уменьшается вчетверо.

Напряженность поля может сложным образом зависеть от координат. Рассмотрим простейший случай. Однородное поле – это электрическое поле, в котором напряженность равна по модулю и направлению в любой точке рассматриваемой области пространства. Как будет показано ниже, приближительное однородное поле – это поле между двумя разноименно заряженными плоскими пластинами. В любом случае возможно выделение достаточно малой области пространства, где поле можно считать однородным. В однородном электрическом поле линии напряженности направлены параллельно друг другу и имеют постоянную густоту.

До сих пор мы обсуждали вид электрического поля зарядов, находящихся в вакууме. Опыт показывает, что, если поместить заряд в диэлектрик (вещество, практически не проводящее электрический ток), то поле и силы взаимодействия зарядов могут измениться. Например, молекулы воды обладают собственным электрическим полем. При помещении их во внешнее поле они поворачиваются так, что за счет собственного поля ослабляют суммарное поле в 81 раз.

Для описания электрических полей в диэлектриках удобно ввести понятие *электрического смещения*. Электрическое смещение иногда называют еще *электрической индукцией*. Вектор электрического смещения \vec{D} в простейшем случае связан с вектором напряженности электрического поля \vec{E} соотношением:

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}. \quad (1.17)$$

Измеряется электрическое смещение в $\text{В}/\text{м}^2$. В определении электрического смещения роль диэлектрика учитывается диэлектрической проницаемостью ε . В вакууме же электрическое смещение с точностью до константы ε_0 совпадает с напряженностью. Диэлектрическая проницаемость показывает, во сколько раз ослабляется поле в диэлектрике по сравнению с вакуумом. Как уже отмечалось, для воды при комнатной температуре и постоянном поле она равна 81. Для воздуха вследствие малой плотности молекул газа диэлектрическая проницаемость близка к единице. Для керосина ε равна 2, растительного масла – 2-4, стекла – 6-10, крахмала – 12, крови – 85. С учетом такого экранирования поля закон Кулона в диэлектрике приобретает вид:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{q_1q_2}{r^2}. \quad (1.18)$$

Диэлектрическая проницаемость среды в паре с электрической постоянной $\varepsilon\varepsilon_0$ входят не только в закон Кулона, но и во многие другие уравнения электродинамики.

1.4.1 Принцип суперпозиции электрических полей

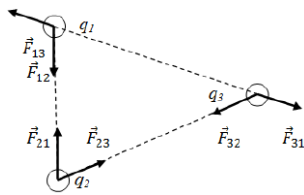


Рис. 1.6.

Опыт и здравый смысл подсказывают, что сила взаимодействия двух зарядов не изменится, если в систему добавить другие заряды (рис. 1.6). При этом силы \vec{F}_{12} и \vec{F}_{21} не зависят от заряда q_3 , силы \vec{F}_{13} и \vec{F}_{31} – от заряда q_2 (который выбран в данном примере отрицательным), силы \vec{F}_{23} и \vec{F}_{32} – от заряда q_1 . Таким образом, результирующую силу, действующую на любой заряд, можно найти

как векторную сумму сил парного взаимодействия зарядов:

$$\left. \begin{aligned} \vec{F}_1 &= \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13}; \\ \vec{F}_2 &= \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23}; \\ \vec{F}_3 &= \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32}. \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

Аналогичным образом складываются и пропорциональные силам электрические поля, так что результирующее поле равно векторной сумме полей отдельных зарядов:

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_1 &= \vec{E}_{12} + \vec{E}_{13} \\ \vec{E}_2 &= \vec{E}_{21} + \vec{E}_{23} \\ \vec{E}_3 &= \vec{E}_{31} + \vec{E}_{32} \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

Или в общем случае имеем принцип суперпозиции электрических полей: напряженность электрического поля системы зарядов равна векторной сумме напряженностей полей, которые создает каждый из этих зарядов в отдельности:

$$\vec{E} = \sum \vec{E}_i. \quad (1.21)$$

Принцип суперпозиции позволяет рассчитать поле сложной системы из большого количества точечных зарядов, а также тела с произвольным объемным распределением заряда. Так, тело с произвольным объемным распределением заряда можно разбить на малые части и, используя выражение для поля точечного заряда и принцип суперпозиции электрических полей, можно рассчитать суммарное поле.

1.4.2 Электрический диполь. Поле диполя

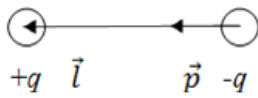


Рис. 1.7.

Электрический диполь – это система из двух равных по модулю и противоположных по знаку электрических точечных зарядов q и $-q$, расположенных на расстоянии l друг от друга (рис. 1.7). Это понятие широко используется в физике. Выше уже рассмотрено экранирование внешнего электрического поля молекулами среды, которые можно рассматривать как набор диполей. Кроме того, диполь создает и собственное поле, существенное во многих случаях. При этом очень часто размер диполя пренебрежимо мал по сравнению с размером рассматриваемой системы. Дадим количественное описание свойств диполя. Если из точки положения отрицательного заряда в точку положения положительного заряда провести вектор \vec{l} , то можно дать следующее определение. *Электрический (дипольный) момент* (\vec{p}) диполя определяют по формуле:

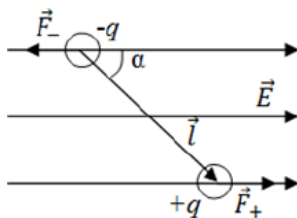


Рис. 1.8.

$$\vec{p} = q\vec{l}. \quad (1.22)$$

Если поместить электрический диполь в электрическое поле напряженностью \vec{E} (рис. 1.8), то на заряды диполя соответственно действуют силы:

$$\vec{F}_+ = q\vec{E}; \quad (1.23)$$

$$\vec{F}_- = -q\vec{E}. \quad (1.24)$$

Эти силы противоположно направлены и создают суммарный момент силы (рис. 1.8)

$$M = qEl \sin \alpha = pE \sin \alpha. \quad (1.25)$$

Уравнение можно переписать в векторном виде с использованием векторного произведения:

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}. \quad (1.26)$$

Отсюда следует вывод, что на электрический диполь в электрическом поле действует момент силы, определяемый электрическим моментом, напряженностью поля и ориентацией диполя. Существенно, что этот момент силы разворачивает диполь так, чтобы поле диполя частично компенсировало внешнее поле (и обеспечивало диэлектрическую проницаемость $\varepsilon > 1$).

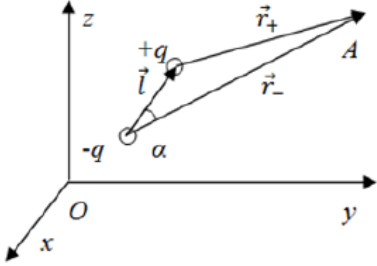


Рис. 1.9.

Как уже отмечалось, во многих случаях важную роль играет и собственное поле диполя. Рассчитаем электрическое поле электрического диполя с использованием принципа суперпозиции. Особенно результат интересен на расстояниях, значительно превышающих размер диполя. Предположим, что необходимо вычислить напряженность электрического поля в точке A (рис. 1.9). Напряженность поля, создаваемого зарядами диполя в соответствии с принципом суперпозиции равна:

$$\vec{E} = kq \left(\frac{\vec{r}_+}{r_+^3} - \frac{\vec{r}_-}{r_-^3} \right) = kq \left(\frac{\vec{r}_+}{r_+^3} - \frac{\vec{r}_+ + \vec{l}}{((r_+ + l)^2)^{3/2}} \right). \quad (1.27)$$

В приближении, что точка A достаточно удалена от диполя и

$$\frac{l}{r_+} \ll 1, \quad (1.28)$$

можно принять $r_+ \approx r$, где r – расстояние от диполя до точки A. При этом из рисунка следует $\vec{r}_- = \vec{r} + \vec{l}$. Кроме того, трижды воспользуемся формулами приближенного вычисления степени суммы с учетом малости (1.28):

$$\begin{aligned} \vec{E} &\approx kq \left(\frac{\vec{r}}{r^3} - \frac{\vec{r} + \vec{l}}{r^3 \left(1 + \frac{2\vec{r}\vec{l}}{r^2}\right)^{3/2}} \right) \approx kq \left(\frac{\vec{r}}{r^3} - \frac{\vec{r} + \vec{l}}{r^3 \left(1 + \frac{3\vec{r}\vec{l}}{r^2}\right)} \right) \approx \\ &\approx \frac{kq}{r^3} \left(\vec{r} - (\vec{r} + \vec{l}) \left(1 - \frac{3\vec{r}\vec{l}}{r^2}\right) \right). \end{aligned} \quad (1.29)$$

Наконец, воспользовавшись той же малостью при перемножении скобок, получим окончательно две составляющие напряженности вдоль \vec{r} и вдоль дипольного момента \vec{p} :

$$\frac{kq}{r^3} \left(\vec{r} - (\vec{r} + \vec{l}) \left(1 - \frac{3\vec{r}\vec{l}}{r^2}\right) \right) \approx \frac{k(3\vec{e}_r p \cos \alpha - \vec{p})}{r^3}, \quad (1.30)$$

где $\vec{e}_r = \vec{r}/r$ единичный вектор вдоль \vec{r} , α – угол между дипольным моментом и \vec{r} .

Таким образом, поле диполя пропорционально дипольному моменту и обратно пропорционально кубу расстояния от диполя до точки наблюдения. Существенно, что поле диполя убывает с расстоянием быстрее, чем поле точечного заряда, убывающее пропорционально квадрату расстояния. Иными словами, электрическое поле диполя является короткодействующим – по сравнению с полем точечного заряда. Так, при двукратном удалении поле диполя уменьшится в 8 раз, тогда как поле точечного заряда только в 4 раза.

1.5 Теорема Гаусса

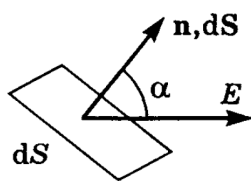


Рис. 1.10.

Поток вектора . Для большей наглядности воспользуемся геометрической картиной описания электрического поля (с помощью линий вектора) и еще, для упрощения рассуждений, будем считать, что густота линий *равна* модулю вектора . Тогда число линий, пронизывающих элементарную площадку dS , нормаль которой составляет угол α с вектором , определяется согласно рисунку 1.10 как $E dS \cos \alpha$. Эта величина и есть поток $d\Phi$ вектора \vec{E} сквозь площадку dS . В более компактной форме

$$d\Phi = E_n dS = \vec{E} d\vec{S},$$

где E_n проекция вектора \vec{E} на нормаль к площадке dS , $d\vec{S}$ — вектор, модуль которого равен dS , а направление совпадает с нормалью к площадке. Заметим, что выбор направления вектора \vec{E} (а следовательно, и $d\vec{S}$) условен, его можно было бы направить и в противоположную сторону.

Если имеется некоторая произвольная поверхность S , то поток вектора \vec{E} сквозь нее

$$\Phi = \int_S \vec{E} d\vec{S}. \quad (1.31)$$

Эта величина алгебраическая: она зависит не только от конфигурации поля \vec{E} , но и от выбора направления нормали. В случае *замкнутых* поверхностей принято нормаль брать наружу области, охватываемой этими поверхностями, т. е. выбирать *внешнюю* нормаль, что в дальнейшем будет всегда и подразумеваться.

Хотя здесь речь шла о потоке вектора \vec{E} , понятие потока в равной степени относится к любому векторному полю.

1.5.1 Теорема Гаусса

Поток вектора \vec{E} сквозь произвольную замкнутую поверхность S обладает удивительным и замечательным свойством: он зависит только от алгебраической суммы зарядов, охватываемых этой поверхностью. А именно

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} q_{\text{внутри}}, \quad (1.32)$$

где кружок у интеграла означает, что интегрирование проводится по замкнутой поверхности.

Это выражение и составляет суть **теоремы Гаусса**: *поток вектора \vec{E} сквозь замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов внутри этой поверхности, деленной на ϵ_0 .*

Доказательство теоремы. Сначала рассмотрим поле одного точечного заряда q . Окружим этот заряд *произвольной замкнутой поверхностью* S (рис. 1.4) и найдем поток вектора \vec{E} сквозь элемент dS :

$$d\Phi = \vec{E} d\vec{S} = E dS \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dS \cdot \cos \alpha = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \quad (1.33)$$

где $d\Omega$ — телесный угол, опирающийся на элемент поверхности dS , с вершиной в точке расположения заряда q . Интегрирование этого выражения по всей поверхности S эквивалентно интегрированию по всему телесному углу, т. е. замене $d\Omega$ на 4π , и мы получим $\Phi = \frac{q}{\epsilon_0}$, как и требует формула (1.32).

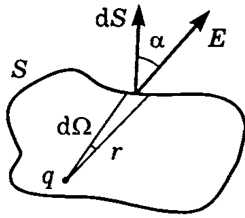


Рис. 1.11.

Заметим, что при более сложной форме замкнутой поверхности углы α могут быть больше $\pi/2$, а значит, $\cos \alpha$ и $d\Omega$ в (1.32) принимают, вообще говоря, как положительные, так и отрицательные значения. Итак, $d\Omega$ — величина алгебраическая: если $d\Omega$ опирается на внутреннюю сторону поверхности S , то $d\Omega > 0$, если же на внешнюю сторону, то $d\Omega < 0$.

Отсюда, в частности, следует: если заряд q расположен вне замкнутой поверхности S , то поток вектора \vec{E} через нее равен нулю. Для этого достаточно провести из заряда q коническую поверхность так, чтобы она оказалась касательной к замкнутой поверхности S .

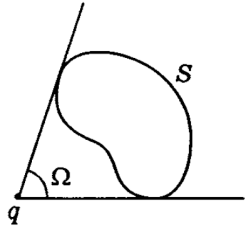


Рис. 1.12.

Тогда интегрирование выражения (1.32) по поверхности S эквивалентно интегрированию по Ω (рис. 1.12): внешняя сторона поверхности S будет видна из точки q под углом $\Omega > 0$, а внутренняя под углом $-\Omega$ (оба угла по модулю равны). В сумме получим нуль, и $\Phi = 0$, что также совпадает с утверждением (1.32). На языке линий вектора \vec{E} это означает, что сколько линий входит в объем, ограниченный поверхностью S , столько и выходит.

Теперь обратимся к случаю, когда электрическое поле создается системой точечных зарядов q_1, q_2 и т. д. В этом случае согласно принципу суперпозиции $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots$, где \mathbf{E}_1 — поле, создаваемое зарядом q_1, q_2 и т. д. Тогда поток вектора \mathbf{E} можно записать так:

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \oint (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots) d\vec{S} = \oint \vec{E}_1 d\vec{S} + \oint \vec{E}_2 d\vec{S} + \dots = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots$$

Согласно предыдущему каждый интеграл в правой части равен q_i/ϵ_0 , если заряд q_i находится *внутри* замкнутой поверхности S , и нулю, если *снаружи* поверхности S . Поэтому в правой части останется алгебраическая сумма *только* тех зарядов, которые находятся внутри поверхности S .

Для завершения доказательства теоремы остается учесть случай, когда заряды распределены непрерывно с объемной плотностью, зависящей от координат. В этом случае можно считать, что каждый элементарный объем dV содержит "точечный" заряд ρdV . Тогда в правой части (1.32)

$$q_{\text{внутр}} = \int \rho dV, \quad (1.34)$$

где интегрирование проводится только по объему, заключенному внутри замкнутой поверхности S .

Необходимо обратить внимание на следующее важное обстоятельство: в то время как само поле зависит от конфигурации *всех* зарядов, поток вектора сквозь произвольную замкнутую поверхность S определяется только алгебраической суммой зарядов *внутри* поверхности S . Это значит, что если передвинуть заряды, то поле изменится всюду, в частности, и на поверхности S ; изменится, вообще говоря, и поток вектора через S . Однако если передвижка зарядов произошла без пересечения поверхности S , поток вектора через эту поверхность останется *прежним*, хотя, повторяем, само поле может измениться, причем весьма существенно. Удивительное свойство электрического поля!

1.5.2 Применения теоремы Гаусса

Поскольку поле зависит от конфигурации *всех* зарядов, теорема Гаусса, вообще говоря, не дает возможности найти это поле. Однако в ряде случаев теорема Гаусса оказывается весьма эффективным аналитическим инструментом: она позволяет получить ответы

на некоторые принципиальные вопросы, не решая задачи, а также находить и само поле \mathbf{E} , причем чрезвычайно простым путем. Рассмотрим несколько примеров, а затем сформулируем некоторые общие выводы о том, в каких случаях применение теоремы Гаусса оказывается наиболее целесообразным.

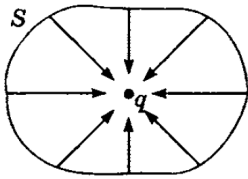


Рис. 1.13.

Пример 1. О невозможности устойчивого равновесия заряда в электрическом поле (Теорема Ирншоу). Пусть в вакууме имеется система неподвижных точечных зарядов, находящихся в равновесии.

Рассмотрим один из этих зарядов — заряд q . Может ли состояние его равновесия быть устойчивым?

Чтобы ответить на этот вопрос, окружим заряд q небольшой замкнутой поверхностью S (рис. 1.13). Допустим, для определенности, что $q > 0$. Тогда для того чтобы равновесие заряда q было устойчивым, необходимо, чтобы во всех точках поверхности S поле \mathbf{E} , образованное всеми *остальными* зарядами системы, было направлено к заряду q : только в этом случае при любом малом смещении заряда q из положения равновесия на него будет действовать *возвращающая* сила, и положение равновесия действительно будет устойчивым. Но такая конфигурация поля \mathbf{E} вокруг заряда q противоречит теореме Гаусса: поток вектора \mathbf{E} сквозь поверхность S отрицателен, согласно же теореме Гаусса он должен быть равным нулю, поскольку этот поток создается зарядами, расположенными *вне* поверхности S . А равенство потока вектора \mathbf{E} нулю означает, что в каких-то точках поверхности S вектор \mathbf{E} направлен внутрь, а в каких-то обязательно наружу. Отсюда и следует, что устойчивое равновесие заряда в любом электростатическом поле невозможно. Теорема Ирншоу утверждает, что *не существует такой конфигурации неподвижных зарядов, которая была бы устойчивой, если нет других сил, кроме сил кулоновского взаимодействия между зарядами системы.*

1.5.3 Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости и двух плоскостей

Рассмотрим сначала поле, создаваемое бесконечной равномерно заряженной плоскостью с постоянной поверхностной плотностью заряда

$$\sigma = \frac{dq}{ds}. \tag{1.35}$$

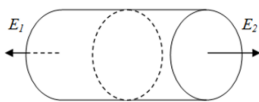


Рис. 1.14.

Поверхностная плотность заряда измеряется в Кл/м². В качестве гауссовой поверхности выделим цилиндр с осью, перпендикулярной плоскости, и основаниями площадью S , расположенными относительно плоскости симметрично (рис. 1.14). Круг с пунктирными границами представляет часть заряженной плоскости, попавшую внутрь цилиндра. В силу симметрии напряженность поля на основаниях перпендикулярна плоскости, равна по модулю ($E_1 = E_2 = E$) и противоположна по направлению.

Нормальная составляющая напряженности на боковой поверхности цилиндра равна нулю (как и соответствующий поток) — из тех же соображений симметрии. Поэтому поток вектора напряжённости через выделенную замкнутую поверхность определяется потоком через основания и равен $2ES$. В свою очередь заряд внутри цилиндра равен σS . По теореме Гаусса имеем:

$$2ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}, \tag{1.36}$$

откуда

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \tag{1.37}$$

Таким образом, поле бесконечной равномерно заряженной плоскости по модулю не зависит от координат, перпендикулярно плоскости и имеет противоположные направления в полупространствах, разделенных плоскостью.

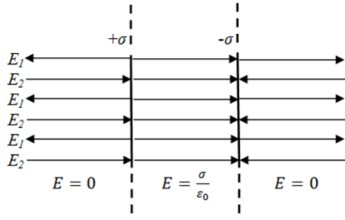


Рис. 1.15.

Рассчитаем теперь поле двух разноименно заряженных плоскостей (поле плоского конденсатора). Предположим, что поверхностная плотность заряда плоскостей одинакова по модулю (рис. 1.15). Тогда создаваемое плоскостями поле равно соответственно $E_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$, $E_2 = \frac{-\sigma}{2\epsilon_0}$. В соответствии с принципом суперпозиции эти поля векторно складываются. При этом поля зарядов вне конденсатора противоположны по направлению и при сложении компенсируются. В свою очередь, в пространстве между пластинами поля направлены в одну сторону, так что результирующее поле равно:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} . \tag{1.38}$$

Для реального плоского конденсатора с ограниченной шириной заряженных пластин поле тоже можно считать по приведенным формулам, если расстояние между пластинами d много меньше длины a и ширины b пластин:

$$d \ll a, \quad d \ll b.$$

При этом на краях пластин на расстояниях порядка расстояния между пластинами имеют место краевые эффекты – спад напряженности от максимального значения практически до нуля.

1.5.4 Поле равномерно заряженной бесконечной нити

Рассчитаем поле, создаваемое бесконечной нитью с постоянной линейной плотностью заряда

$$\lambda = \frac{dq}{dl} \tag{1.39}$$

на расстоянии R от нити. Линейная плотность заряда измеряется в Кл/м. Выберем в качестве гауссовой поверхности цилиндр радиуса R и высотой h с осью, совпадающей с нитью (рис. 1.16).

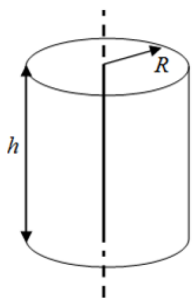


Рис. 1.16.

В силу симметрии напряженность поля на боковой поверхности цилиндра постоянна по модулю и перпендикулярна боковой поверхности. Нормальная составляющая напряженности на основаниях цилиндра равна нулю (как и соответствующий поток) – тоже из соображений симметрии. Поэтому поток вектора напряжённости через выделенную замкнутую поверхность определяется потоком через боковую поверхность цилиндра и равен произведению напряженности на боковую поверхность цилиндра $E2\pi Rh$. В свою очередь заряд внутри цилиндра равен λh . По теореме Гаусса:

$$E2\pi Rh = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} , \tag{1.40}$$

откуда поле равномерно заряженной бесконечной нити равно

$$E = \frac{\lambda}{2\pi R\epsilon_0} . \tag{1.41}$$

Похожим образом рассчитывается поле равномерно заряженной цилиндрической поверхности. При этом несложно показать, что поле снаружи от такой поверхности совпадает с полем нити, а поле внутри такой поверхности равно нулю.

1.5.5 Поле равномерно заряженной сферы

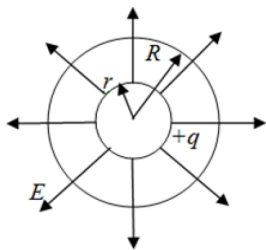


Рис. 1.17

Найдем теперь поле равномерно (по поверхности) заряженной сферы радиуса r и заряда q . Выберем в качестве гауссовой поверхности сферу радиуса R . Из соображений симметрии напряженность на поверхности любой сферы является константой и может быть направлена только по направлению радиуса.

Снаружи заряженной сферы при $R > r$ (рис. 1.17) теорема Гаусса дает:

$$E4\pi R^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}, \quad (1.42)$$

откуда выражение для поля совпадает с выражением для поля точечного заряда:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}. \quad (1.43)$$

Внутри заряженной сферы (при $R < r$) внутри гауссовой поверхности отсутствует заряд, что в соответствии с теоремой Гаусса означает отсутствие поля:

$$E = 0. \quad (1.44)$$

1.5.6 Поле равномерно заряженного шара

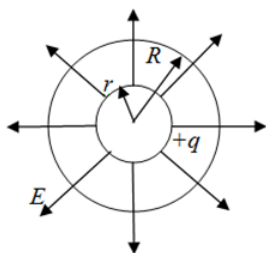


Рис. 1.18.

Решим теперь несколько более сложную задачу и найдем поле равномерно (по объему) заряженного шара радиуса r и заряда q . Выберем по-прежнему в качестве гауссовой поверхности сферу радиуса R . По-прежнему из соображений симметрии напряженность на поверхности любой сферы является константой и может быть направлена только по направлению радиуса. Как и для заряженной сферы, снаружи заряженного шара при $R > r$ (рис. 1.18) теорема Гаусса дает $E4\pi R^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$, откуда выражение для поля по-прежнему совпадает с выражением для поля точечного заряда:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}. \quad (1.45)$$

Однако внутри заряженного шара при $R < r$ внутри гауссовой поверхности имеется заряд q_1 , который можно рассчитать через объемную плотность заряда, равную частному от деления заряда на бъем заряженного шара:

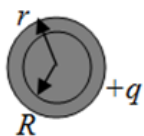


Рис. 1.19.

Заряд q_1 пропорционален (рис. 1.19) объему гауссовой поверхности $\frac{4}{3}\pi R^3$:

$$q_1 = \rho \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{qR^3}{r^3}. \quad (1.46)$$

Воспользуемся теперь по аналогии с (1.42) теоремой Гаусса:

$$E4\pi R^2 = \frac{q_1}{\varepsilon_0} \quad (1.47)$$

откуда с учетом (1.47):

$$E = \frac{qR}{4\pi\varepsilon_0 r^3}. \quad (1.48)$$

Таким образом, по мере удаления от центра симметрии напряженность поля равномерно заряженного шара сначала (при $R < r$) линейно растет пропорционально R , а затем (при $R > r$) квадратично падает пропорционально R^2 . Следует отметить, что расчет полей заряженных тел различной геометрии может быть выполнен и с помощью закона Кулона, но такой расчет является более громоздким.

1.5.7 Теорема Гаусса в дифференциальной форме

Замечательное свойство электрического поля, которое выражает собой теорема Гаусса, побуждает представить эту теорему в иной форме, расширяющей ее возможности как инструмента исследования и расчета.

В отличие от формулы (1.32) — ее называют **интегральной** — мы будем искать **дифференциальную** форму теоремы Гаусса, в которой устанавливается связь между объемной плотностью заряда и **изменениями** напряженности в окрестности данной точки пространства.

Для этого представим сначала заряд q в объеме V , охватываемом замкнутой поверхностью S , как $q_{\text{внутри}} = \langle p \rangle V$, где $\langle p \rangle$ — среднее по объему V значение объемной плотности заряда. Затем подставим это выражение в уравнение (1.32) и разделим обе части его на V . В результате получим

$$\frac{1}{V} \oint \vec{E} d\vec{S} = \langle p \rangle / \varepsilon_0. \quad (1.49)$$

Теперь устремим объем V к нулю, стягивая его к интересующей нас точке поля. Очевидно, при этом $\langle p \rangle$ будет стремиться к значению ρ в данной точке поля, а значит, отношение в левой части уравнения (1.49) будет стремиться к ρ / ε_0 .

Величину, являющуюся пределом отношения $\oint \vec{E} d\vec{S}$ к V при $V \rightarrow 0$, называют *дивергенцией* поля и обозначают $\text{div } \vec{E}$. Таким образом, по определению

$$\text{div } \vec{E} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint \vec{E} d\vec{S}. \quad (1.50)$$

Аналогично определяется дивергенция любого другого векторного поля. Из определения (1.50) следует, что дивергенция является скалярной функцией координат.

Чтобы получить выражение для дивергенции поля, надо согласно (1.50) взять бесконечно малый объем V , определить поток вектора сквозь замкнутую поверхность, охватывающую этот объем, и найти отношение этого потока к объему. Полученное выражение для дивергенции будет зависеть от выбора системы координат (в разных системах координат оно оказывается разным). Например, в декартовой системе координат

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \quad (1.51)$$

Итак, мы выяснили, что при $V \rightarrow 0$ в выражении (1.49) его правая часть стремится к ρ / ε_0 , а левая — к $\text{div } \vec{E}$. Следовательно, дивергенция поля связана с плотностью заряда в той же точке уравнением

$$\text{div } \vec{E} = \rho / \varepsilon_0 \quad (1.52)$$

Это уравнение и выражает теорему Гаусса в дифференциальной форме. Написание многих формул и действия с ними значительно упрощаются, если ввести векторный дифференциальный оператор ∇ ("набла"). В декартовых координатах он имеет вид

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (1.53)$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — орты осей X, Y, Z . Сам по себе вектор ∇ смысла не имеет. Он приобретает смысл только в сочетании со скалярной или векторной функцией, на которую символически умножается. Так, например, если вектор ∇ умножить скалярно на вектор, то получим

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \nabla_x E_x + \nabla_y E_y + \nabla_z E_z = \frac{\partial}{\partial x} E_x + \frac{\partial}{\partial y} E_y + \frac{\partial}{\partial z} E_z,$$

а это есть не что иное, как $\operatorname{div} \mathbf{E}$, согласно (1.51). Таким образом, дивергенция поля может быть записана как $\operatorname{div} \mathbf{E}$ или $\nabla \cdot \mathbf{E}$ (в обоих случаях читается как "дивергенция"). Мы будем пользоваться вторым, более удобным обозначением. Тогда, например, теорема Гаусса (1.52) будет иметь вид

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \varepsilon_0. \quad (1.54)$$

В дифференциальной форме теорема Гаусса является локальной теоремой: дивергенция поля в данной точке зависит только от плотности электрического заряда ρ в той же точке и больше ни от чего. Это одно из замечательных свойств электрического поля. Например, в разных точках поля точечного заряда поле отличается друг от друга. Это же относится, вообще говоря, и к пространственным производным $E_x/\partial x$, $E_y/\partial y$, $E_z/\partial z$. Однако, как утверждает теорема Гаусса, сумма этих производных, которая определяет дивергенцию \mathbf{E} , оказывается во всех точках поля (вне самого заряда) равной нулю.

В тех точках поля, где дивергенция положительна, мы имеем *источники* поля (положительные заряды), а в тех точках, где она отрицательна, — *стоки* (отрицательные заряды).

Линии вектора выходят из источников поля, а в местах стоков они заканчиваются.

1.5.8 Закон сохранения заряда

Обсуждаются два аспекта понятия сохранения заряда. Даются интегральная и дифференциальная формулировки закона сохранения заряда.

Два аспекта понятия сохранения заряда. В понятие "сохранение заряда" включаются две группы совершенно различных фактов:

1. *Электрон и протон являются материальными частицами с бесконечным временем жизни, а их элементарные электрические заряды инвариантны и не зависят от скорости. Следовательно, их заряды существуют без изменения столь долго, сколь долго существуют протоны и электроны, независимо от того, как они движутся, т. е. при любых движениях заряд сохраняется. В этом аспекте закон сохранения заряда является просто следствием неуничтожимости носителей заряда как физических объектов и инвариантности заряда;*
2. *Кроме протонов и электронов существует большое число других заряженных элементарных частиц. Все они порождаются, порождают другие частицы и уничтожаются в различных процессах взаимопревращений. Весь громадный экспериментальный материал свидетельствует, что каков бы ни был процесс взаимопревращения частиц, суммарный заряд частиц до взаимопревращения равен суммарному заряду частиц после взаимопревращения. Например, при распаде до испускания электрона ядро имеет некоторый положительный заряд $Ze^{(+)}$. После испускания электрона положительный заряд ядра увеличивается на один элементарный положительный заряд и становится равным $(Z+1)e^{(+)}$. Однако в сумме с отрицательным зарядом испущенного электрона система "ядро + электрон" имеет прежний заряд $(Z+1)e^{(+)} - |e^{(-)}| = Ze^{(+)}$. В качестве другого примера можно привести порождение γ -квантом пары электрон — позитрон. Исходная частица — γ -квант — нейтральна. Она превращается в пару частиц, суммарный заряд которых равен нулю, что доказано с большой точностью при измерении положительного заряда позитрона. Исследовано громадное число взаимопревращений элементарных частиц и во всех процессах соблюдается равенство суммарного заряда до процесса и после процесса, или, иначе говоря, соблюдается закон сохранения заряда. Благодаря этому заряд приобретает в некотором смысле существование, независимое от носителей, и закон его сохранения может быть сформулирован следующим образом: *заряд сохраняется при всех процессах и движениях, связанных с носителями зарядов.**

Однако, несмотря на относительную самостоятельность, заряд не может существовать независимо от носителей заряда или вне пространства и времени. Это означает, что *заряд не является самостоятельной сущностью, независимой от материи, он выражает одно из свойств материи*. Выяснение природы этой связи — одна из труднейших проблем современной физики. Еще не ясно, почему существует только один элементарный заряд и почему он равен $|e|$, а не какому-то другому значению.

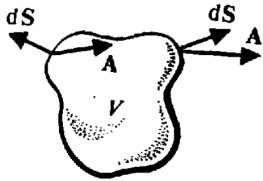


Рис. 1.20.

Интегральная формулировка закона сохранения заряда. Исходя из закона сохранения заряда как экспериментального факта, выразим его в виде утверждения о том, что изменение заряда в некотором объеме V может произойти только в результате втекания или вытекания заряда через замкнутую поверхность S , ограничивающую объем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \oint_S \vec{j} d\vec{S}. \quad (1.55)$$

Левая часть (1.55) определяет скорость изменения заряда в объеме, а правая — силу тока через поверхность, ограничивающую объем. *Знак минус учитывает, что если положительный заряд внутри объема уменьшается, то плотность тока направлена из объема V* . Напомним, что у замкнутых поверхностей положительной нормалью считается внешняя нормаль. Следовательно, вектор $d\vec{S}$ в (1.55) направлен по внешней нормали к поверхности (рис. 1.20).

Дифференциальная формулировка закона сохранения заряда. В формуле (1.55) объем V и поверхность S не изменяются с течением времени. Следовательно, производную по времени в левой части (1.55) можно ввести под знак интеграла. С другой стороны, правую часть равенства можно по формуле Гаусса — Остроградского преобразовать в интеграл по объему:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV, \quad \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{j} dV. \quad (1.56)$$

Переносим все члены в (1.55) в левую часть и принимая во внимание (1.56), получаем

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} \right) dV = 0. \quad (1.57)$$

Это равенство справедливо для любого объема. Очевидно, что подынтегральное выражение тождественно равно нулю. Доказательство производят от противного. Если в некоторой точке подынтегральное выражение не равно нулю, то в качестве V можно взять маленький объем вблизи этой точки, в пределах которого подынтегральное выражение сохраняет знак. Интеграл по этой области не равен нулю, что противоречит исходному равенству (1.57). Поэтому подынтегральное выражение равно нулю во всех точках. Тогда

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0. \quad (1.58)$$

Равенство (1.58) является выражением закона сохранения заряда в дифференциальной форме. Оно называется также **уравнением непрерывности**.

1.6 Потенциал электростатического поля

1.6.1 Работа сил электростатического поля. Консервативность электростатических сил

Поскольку на заряд в электростатическом (постоянном электрическом) поле действует сила, то при движении этого заряда в поле совершается работа. В однородном поле на точечный заряд q действует постоянная сила (1.14), так что работа при перемещении по прямой траектории на расстояние равна

$$A = \vec{F} \cdot \vec{l}. \quad (1.59)$$



Рис. 1.21.

В соответствии с формулой работа пропорциональна величинам заряда, напряженности, перемещения и косинуса угла между векторами \vec{E} и \vec{l} . В общем случае, когда напряженность зависит от координат, а траектория криволинейна, сначала находят работу на бесконечно малом перемещении $d\vec{l}$

$$dA = \vec{F} d\vec{l} = q\vec{E}d\vec{l}, \quad (1.60)$$

а затем берут интеграл по участку траектории (рис. 1.21):

$$A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{l} = \int_1^2 a\vec{E}d\vec{l} = q \int_1^2 e_l dl, \quad (1.61)$$

где $E_l = E \cos \alpha$ – проекция напряженности на направление движения заряда.

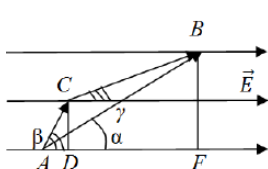


Рис. 1.22.

Сравним работу по перемещению заряда q в однородном поле (рис. 1.22) из точки A в точку B по прямой и по ломаной линии через точку C

$$\begin{aligned} A_{AB} &= qE \cdot AB \cdot \cos \alpha = qE \cdot AF, \\ A_{ACB} &= qE (AC \cos \beta + CB \cos \gamma) = qE (AD + DF) = qEAF = A_{AB}. \end{aligned} \quad (1.62)$$

Таким образом, работа по перемещению заряда по разным траекториям оказалась одинаковой – все зависит лишь от начальной и конечной точек. И для любой траектории, путем разбиения ее на короткие прямолинейные отрезки, несложно показать, что работа по перемещению заряда зависит лишь от начального и конечного расположения заряда. Таким образом, работа сил электрического поля не зависит от траектории перемещения заряда из одной точки в другую. Такие поля называют *потенциальными*, а создающие их силы – *консервативными*.

1.6.2 Теорема о циркуляции вектора напряженности поля

Найдем сначала работу по перемещению заряда по замкнутому контуру в потенциальном поле на примере контура рис. 1.22:

$$A_{ABCA} = A_{AB} - A_{ACB} = qEAF - qEAF = 0. \quad (1.63)$$

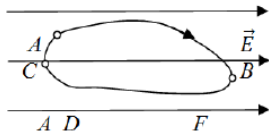


Рис. 1.23.

Это справедливо и для произвольного замкнутого контура и может быть показано опять же путем разбиения траектории на короткие (бесконечно малые) прямолинейные отрезки (рис. 1.23). При этом суммарная длина проекций отрезков перемещения по полю компенсируется суммарной длиной проекций отрезков перемещения против поля.

Так на рис. 1.23 на участках AB и CD работа положительна, а на участке BC – отрицательна. При этом положительная и отрицательная работа определяются проекциями соответствующих участков на направление электрического поля и равны по модулю. Таким образом, работа по перемещению заряда по замкнутому контуру в потенциальном поле равна нулю:

$$A = \oint dA = 0. \quad (1.64)$$

Поскольку в соответствии с (1.61) $A = \int_1^2 E_l dl$ то для замкнутого пути имеем

$$A = q \oint E_l dl = 0$$

и

$$\oint E_l dl = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0. \quad (1.65)$$

Этот интеграл называют циркуляцией вектора напряженности. Таким образом, формула (1.65) выражает теорему о циркуляции вектора напряженности: циркуляция вектора напряженности электростатического поля вдоль любого замкнутого контура равна нулю. Отсюда следует, что силовые линии не могут быть замкнутыми, они начинаются или кончаются на зарядах, или уходят в бесконечность. В противном случае, например, при циклическом перемещении вдоль замкнутой силовой линии положительного заряда совершалась бы положительная работа. Поле, обладающее свойством (1.65), называют **потенциальным**.

1.6.3 Определение потенциала электростатического поля

В потенциальном поле каждое положение заряда характеризуется возможностью совершения работы, иными словами, потенциальной энергией. Найдем в качестве примера потенциальную энергию пробного заряда q в поле заряда Q . Работу будем считать положительной, если она совершается силами поля и отрицательной, если она совершается против сил поля. При увеличении расстояния между зарядами на $d\vec{l}$ в соответствии с законом Кулона работа dA совершается за счет убыли потенциальной энергии dW системы:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{l} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \cdot d\vec{l} = -dW \quad (1.66)$$

Поскольку $\vec{r} \cdot d\vec{l}/r = dr$ то $-dW = Qqdr/4\pi\epsilon_0 r^2$.

Отсюда интегрирование дает выражение для потенциальной энергии:

$$W = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r} + C. \quad (1.67)$$

Потенциальная энергия, как и в механике, определяется с точностью до константы и зависит от точки отсчета. Во многих случаях удобно считать, что нулевой энергией обладает заряд, удаленный в бесконечность. При таком выборе $C = 0$ и:

$$W = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (1.68)$$

Для одноименных зарядов потенциальная энергия положительна, для разноименных – отрицательна. Из формулы видно, что отношение W/q не зависит от величины пробного заряда. Поэтому по аналогии с определением силовой характеристики поля (напряженности), *определим энергетическую характеристику электрического поля – потенциал φ* :

$$\varphi = W/q. \quad (1.69)$$

Для точечного заряда из двух вышеприведенных формул

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (1.70)$$

Заметим, что в физике отсчет потенциала (как и потенциальной энергии) обычно ведут относительно бесконечности; в электротехнике – относительно Земли, так что потенциал Земли принимают равным нулю; в радиотехнике – относительно металлического корпуса аппарата.

Часто удобнее определять не потенциал, а разность потенциалов, которая равна работе, совершаемой полем по перемещению единичного положительного заряда из точки 1 в точку 2:

$$A/q = \varphi_1 - \varphi_2 = U_{12}. \quad (1.71)$$

Единица измерения потенциала и разности потенциалов 1 Вольт (В). $1 \text{ В} = 1 \text{ Дж}/1\text{Кл}$. Потенциал – это скалярная величина. Зная разность потенциалов, можно найти работу поперемещению заряда из точки 1 в точку 2: $A = q(\varphi_1 - \varphi_2)$. В физике во многих задачах приходится рассматривать движение электрона в электрическом поле. В связи с этим часто применяется внесистемная единица измерения энергии *электронвольт* (эВ), который равен энергии, необходимой для переноса электрона в электростатическом поле с разностью потенциалов 1 В. Так как заряд электрона составляет $1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, то $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж.

Если поле создается не одним зарядом Q , а несколькими $Q_1, Q_2, Q_3 \dots$, то потенциальная энергия пробного заряда по аналогии с (1.68) находится как сумма энергий взаимодействия пробного заряда с каждым из них:

$$W = \sum_i \frac{Q_i q}{4\pi\epsilon_0 r_i}, \quad (1.72)$$

где r_i – расстояние от пробного заряда до i -того.

Аналогично потенциал, созданный системой зарядов, дается формулой:

$$\varphi = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}. \quad (1.73)$$

1.6.4 Связь между потенциалом и напряженностью

Разность потенциалов через формулы для работы (1.70) и (1.71) несложно связать с напряженностью поля:

$$U_{12} = \frac{A}{q} = \int_1^2 E_l dl. \quad (1.74)$$

Отсюда можно, например, получить формулу для однородного поля:

$$U_{12} = El \cos \alpha, \quad (1.75)$$

где α – угол между направлением напряженности перемещением l . Формулу для дифференциальной связи U и E получим, сближая в (1.74) в пределе точки 1 и 2:

$$d\varphi = -E_l dl. \quad (1.76)$$

Здесь учтено, что U_{12} и $d\varphi$ имеют противоположный знак. Несколько сложнее решить обратную задачу и выразить напряженность через потенциал. Из (1.76) следует

$$E_l = -\frac{d\varphi}{dl}. \quad (1.77)$$

Выбирая направление l последовательно вдоль осей x, y, z , получим:

$$E_x = -\frac{d\varphi}{dx}, \quad E_y = -\frac{d\varphi}{dy}, \quad E_z = -\frac{d\varphi}{dz}. \quad (1.78)$$

Таким образом, проекции напряженности определяются производными от потенциала по соответствующей координате или в обобщенной сокращенной символической записи – вектором градиента:

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi. \quad (1.79)$$

В соответствии с математическим свойством градиента, потенциал быстрее всего убывает в направлении \vec{E} . В направлении, перпендикулярном \vec{E} (и силовой линии), $E_l = 0$, откуда $\frac{d\varphi}{dl} = 0$ и $\varphi = \text{const}$. Такое направление определяет направление *эквипотенциальной поверхности – поверхности, все точки которой имеют одинаковый потенциал* ($\varphi = \text{const}$). Разность потенциалов между любыми точками такой поверхности равна нулю, следовательно, равна нулю и работа электрических сил при перемещении заряда. И действительно, если перемещать заряд перпендикулярно силе, работа не совершается. Эквипотенциалы изображают на схемах электрических полей наряду с силовыми линиями. На рис. 1.24 изображено поле точечного заряда, на рис. 1.25 – поле конденсатора. Эти поля характеризуются силовыми линиями и перпендикулярными к ним эквипотенциалами. Чем плотнее расположены эквипотенциальные поверхности, тем больше напряженность поля в данной области пространства. Пример – поле точечного заряда.

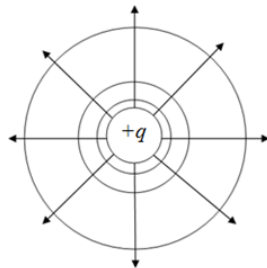


Рис. 1.24.

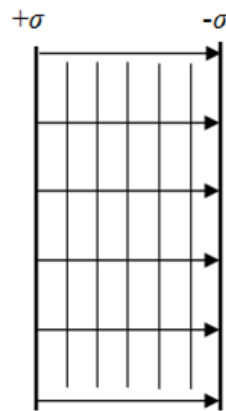


Рис. 1.25.

1.6.5 Вычисление разности потенциалов для некоторых видов полей

Рассмотрим ряд примеров расчета разности потенциалов в вакууме в поле различной геометрии.

Для поля равномерно заряженной бесконечной плоскости из (1.37) имеем $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$. Тогда согласно (1.74) *разность потенциалов в поле равномерно заряженной бесконечной плоскости* между точками, лежащими на расстоянии x_1 и x_2 от плоскости, равна:

$$U_{12} = \int_{x_1}^{x_2} E_l dl = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} dl = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (x_2 - x_1). \quad (1.80)$$

Рассчитаем теперь разность потенциалов в поле между двумя разноименно заряженными плоскостями с одинаковой по модулю поверхностной плотностью заряда. В пространстве между пластинами напряженность поля из (1.38) равна $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$. Отсюда

$$U_{12} = \int_0^d E_l dl = \int_0^d \frac{\sigma}{\varepsilon_0} dl = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}, \quad (1.81)$$

здесь d – расстояние между пластинами.

Далее найдем *разность потенциалов* между точками, лежащими на расстоянии R_1 и R_2 от центра сферы, в *поле равномерно заряженной сферы* радиуса r и заряда q . Снаружи заряженной сферы (при $R > r$) из (1.58) $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$. Отсюда

$$U_{12} = \int_{R_1}^{R_2} E_l dl = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} dR = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (1.82)$$

Если измерять потенциал относительно бесконечности, приняв $R_2 = \infty$ и $R_1 = R$, то получим формулу для потенциала заряженной сферы (при $R > r$):

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}. \quad (1.83)$$

Внутри заряженной сферы (при $R < r$) поле отсутствует, и работа при перемещении пробного заряда не совершается, что означает постоянство потенциала и равенство его потенциалу на поверхности сферы:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}. \quad (1.84)$$

Наконец, рассчитаем *разность потенциалов* между точками, лежащими на расстоянии R_1 и R_2 от оси цилиндра, в *поле равномерно заряженного бесконечного цилиндра* радиуса r с линейной плотностью заряда λ . Напряженность поля вне цилиндра рассчитывается по аналогии с полем, создаваемым бесконечной нитью с постоянной линейной плотностью заряда (1.56) $E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$. Отсюда разность потенциалов в поле цилиндра при $R > r$ равна:

$$U_{12} = \int_{R_1}^{R_2} E_l dl = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R} dR = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (1.85)$$

Напряженность поля внутри заряженного цилиндра равна нулю (по аналогии с полем, создаваемым заряженной сферой). Это означает постоянство потенциала внутри цилиндра и равенство его потенциалу на поверхности цилиндра.

Глава 2

Электростатическое поле при наличии проводников

2.1 Проводники в электростатическом поле. Конденсаторы и энергия электростатического поля

2.1.1 Проводники в электростатическом поле. Поле внутри и вне заряженного проводника

Проводники обладают высокой проводимостью вследствие высокой концентрации свободных зарядов. Так в металлах концентрация свободных электронов составляет порядка 10^{28-3} . Если поместить проводник во внешнее электрическое поле, то поле будет действовать на заряды. Свободные заряды проводника начнут перемещаться: положительные – вдоль поля, отрицательные – против поля. На одном из концов проводника будет накапливаться избыток положительного заряда, на другом – отрицательного. Зарядов переместится столько, сколько необходимо для полной компенсации внешнего поля. Таким образом, электрическое поле внутри проводника обращается в нуль. При этом из теоремы Гаусса следует, что внутри проводника сохраняется электрическая нейтральность вещества. Отсутствие поля внутри проводника приводит к тому, что потенциал во всех точках внутри проводника постоянен (это следует из (1.79): $\vec{E} = -grad\varphi$). Поверхность проводника в электрическом поле также является эквипотенциальной, иначе вдоль поверхности имело бы место перемещение заряда. Отсюда вытекает, что *силовые линии (и вектор напряженности поля) направлены по нормали к поверхности проводника в каждой точке*.

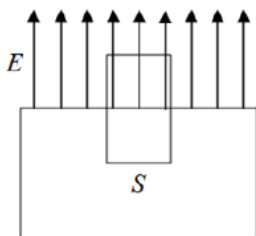


Рис. 2.1.

Таким образом, нейтральный проводник, внесенный в электрическое поле, разрывает часть силовых линий, так что они заканчиваются на отрицательных наведенных зарядах и вновь начинаются на положительных зарядах. Явление перераспределения поверхностных зарядов проводника во внешнем электрическом поле называется *электростатической индукцией*. Рассчитаем теперь напряженность электрического поля вблизи поверхности проводника, определяемую поверхностной плотностью зарядов, воспользовавшись теоремой Гаусса (рис. 2.1). На малом участке S поверхностную плотность заряда σ можно считать постоянной, так что заряд этого участка поверхности равен $q = \sigma S$. Выберем в качестве гауссовой поверхности цилиндр с образующими, перпендикулярными поверхности проводника, и основаниями площади S , параллельными этой поверхности, причем цилиндр пересекает поверхность проводника. Поток вектора напряженности электрического поля через боковую поверхность цилиндра (как и горизонтальная составляющая напряженности) отсутствует из соображений симметрии.

Поток вектора напряженности электрического поля через нижнее основание цилиндра отсутствует вследствие отсутствия поля и силовых линий в проводнике. Таким образом, полный поток вектора напряженности электрического поля определяется потоком через верхнее основание цилиндра. По теореме Гаусса имеем по аналогии с (1.37): $ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$ откуда

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (2.1)$$

В результате напряженность электрического поля вблизи поверхности проводника вдвое больше, чем в случае заряженной диэлектрической плоскости с той же поверхностной плотностью заряда.

В случае, если вблизи проводника находится диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε , напряженность электрического поля внутри диэлектрика ослабляется в ε раз:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}. \quad (2.2)$$

2.1.2 Силы, действующие на поверхность проводника

Рассмотрим случай, когда заряженный участок поверхности проводника граничит с вакуумом. На малый элемент ΔS поверхности проводника действует сила

$$\Delta \vec{F} = \sigma \Delta S \cdot \vec{E}_0 \quad (2.3)$$

где $\sigma \Delta S$ — заряд этого элемента, \vec{E}_0 — напряженность поля, создаваемого всеми *остальными* зарядами системы в месте нахождения заряда $\sigma \Delta S$. Сразу же заметим, что \vec{E}_0 не равно напряженности \vec{E} поля вблизи данного элемента поверхности проводника, однако между ними имеется простая связь. Найдем ее, т. е. выразим \vec{E}_0 через \vec{E} . Пусть \vec{E}_σ — напряженность поля, создаваемого зарядом на площадке ΔS в точках, очень близких к этой площадке — здесь она ведет себя как бесконечная равномерно заряженная плоскость. Тогда согласно (2.1) $\vec{E}_\sigma = \sigma 2\varepsilon_0$. Результирующее поле как внутри, так и вне проводника (вблизи площадки ΔS) является суперпозицией полей \vec{E}_0 и \vec{E}_σ . По разные стороны площадки ΔS поле \vec{E}_0 практически одинаково, поле же \vec{E}_σ имеет противоположные направления (рис. 2.2, где для определенности взято $\sigma > 0$). Из условия $\vec{E} = 0$ в проводнике следует, что $E_\sigma = E_0$ тогда снаружи проводника у его поверхности $E = E_0 + E_\sigma = 2E_0$.

Итак,

$$\vec{E}_0 = \vec{E}/2 \quad (2.4)$$

и уравнение (2.3) примет вид

$$\Delta \vec{F} = \frac{1}{2} \sigma \Delta S \cdot \vec{E} \quad (2.5)$$

Разделив обе части этого уравнения на ΔS , получим выражение для силы, действующей на единицу поверхности проводника:

$$\vec{F}_{\text{ед}} = \frac{1}{2} \sigma \vec{E} \quad (2.6)$$

Это выражение можно переписать и в другой форме, ибо входящие в него величины σ и \vec{E} являются взаимно связанными. Действительно, согласно (2.1) $E_n = \sigma/\varepsilon_0$ или $\vec{E} = (\sigma/\varepsilon_0) \vec{n}$, где \vec{n} — внешняя нормаль к элементу поверхности в данной точке проводника. Поэтому

$$\vec{F}_{\text{ед}} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \vec{n} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \vec{n} \quad (2.7)$$

где учтено, что $\sigma = \varepsilon_0 E_n$ и $E_n^2 = E^2$. Величину $\vec{F}_{\text{ед}}$ называют *поверхностной плотностью сил*. Независимо от знака σ , а значит, и направления \vec{E} , сила $\vec{F}_{\text{ед}}$ всегда направлена, как видно из (2.7), наружу проводника, стремясь его растянуть.

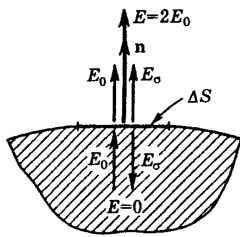


Рис. 2.2.

Пример. Найдем выражение для электрической силы, действующей в вакууме на проводник в целом, полагая, что известна напряженность \vec{E} поля во всех точках у поверхности проводника. Умножив (2.7) на dS , получим выражение для силы $d\vec{F}$, действующей на элемент поверхности dS :

$$d\vec{F} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 d\vec{S}$$

где $d\vec{S} = \vec{n}dS$. Результирующая сила, действующая на весь проводник, определяется интегрированием этого уравнения по всей поверхности проводника:

$$\vec{F} = \frac{\varepsilon_0}{2} \oint E^2 d\vec{S} \quad .$$

2.1.3 Свойства замкнутой проводящей оболочки

Мы выяснили, что в состоянии равновесия избыточных зарядов внутри проводника нет — вещество внутри проводника электрически нейтрально. Поэтому удаление вещества из некоторого объема внутри проводника (создание замкнутой полости) поля нигде не изменит, т. е. никак не отразится на равновесном расположении зарядов. Это значит, что избыточный заряд распределяется на проводнике с полостью так же, как и на сплошном — по его наружной поверхности.

Таким образом, если в полости нет электрических зарядов, электрическое поле в ней равно нулю. *Внешние заряды, в частности заряды на наружной поверхности проводника, не создают в полости внутри проводника никакого электрического поля.* Именно на этом основана **электростатическая защита** — экранирование тел, например измерительных приборов, от влияния внешних электростатических полей. Практически сплошной проводник-оболочка может быть заменен достаточно густой металлической сеткой.

Доказать отсутствие электрического поля в пустой полости можно и иначе. Возьмем замкнутую поверхность S , которая охватывает полость и целиком находится в веществе проводника.

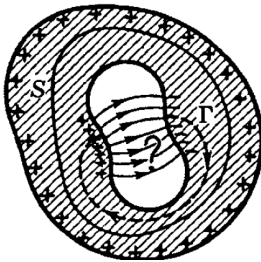


Рис. 2.3.

Так как поле \vec{E} всюду в проводнике равно нулю, то и поток вектора \vec{E} через S тоже равен нулю. Отсюда согласно теореме Гаусса равен нулю и суммарный заряд внутри S . Это, правда, не исключает ситуации, показанной на рис. 2.3, когда на поверхности самой полости имеются равные количества положительного и отрицательного зарядов. Такое предположение, однако, запрещает другая теорема — теорема о циркуляции вектора \vec{E} . В самом деле, пусть контур Γ пересекает полость по одной из линий вектора \vec{E} и замыкается в веществе проводника. Ясно, что линейный интеграл вектора \vec{E} вдоль этого контура не равен нулю, чего согласно теореме о циркуляции быть не может.

Теперь обратимся к случаю, когда полость не пустая, а в ней есть какой-то электрический заряд q (может быть и не один). Представим себе также, что все внешнее пространство заполнено проводящей средой. Поле в ней при равновесии равно нулю, значит, среда электрически нейтральна и не содержит нигде избыточных зарядов.

Так как всюду в проводнике $\vec{E} = 0$, то равным нулю будет и поток вектора \vec{E} сквозь замкнутую поверхность, окружающую полость. По теореме Гаусса это означает, что алгебраическая сумма зарядов внутри этой замкнутой поверхности также будет равна нулю. Таким образом, алгебраическая сумма индуцированных зарядов на поверхности полости равна по модулю и противоположна по знаку алгебраической сумме зарядов внутри этой полости.

При равновесии заряды, индуцированные на поверхности полости, располагаются так, чтобы полностью скомпенсировать снаружи полости поле зарядов, находящихся внутри полости.

Поскольку проводящая среда внутри всюду электрически нейтральна, то она не оказывает никакого влияния на электрическое поле. Поэтому, если ее удалить, оставив только проводящую оболочку вокруг полости, от этого поле нигде не изменится и вне оболочки оно останется равным нулю.

Таким образом, поле зарядов, окруженных проводящей оболочкой, и зарядов, индуцированных на поверхности полости (на внутренней поверхности оболочки), равно нулю во всем внешнем пространстве. Мы приходим к следующему важному выводу: *замкнутая проводящая оболочка разделяет все пространство на внутреннюю и внешнюю части, в электрическом отношении совершенно не зависящие друг от друга.* Это надо понимать так: после любого перемещения зарядов внутри оболочки никаких изменений поля во внешнем пространстве не произойдет, а значит, распределение зарядов на внешней поверхности оболочки останется прежним. То же относится и к полю внутри полости (если там есть заряды) и к распределению индуцированных на стенках полости зарядов — они также останутся неизменными в результате перемещения зарядов вне оболочки. Все сказанное справедливо, разумеется, только в рамках электростатики.

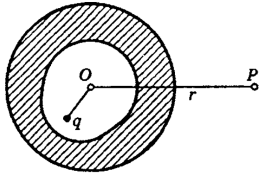


Рис. 2.4.

Пример. Точечный заряд q находится внутри электрически нейтральной оболочки, наружной поверхностью которой является сфера (рис. 2.4). Найдем потенциал ϕ в точке P вне оболочки на расстоянии r от центра O наружной поверхности.

Поле в точке P определяется только зарядами, индуцированными на наружной поверхности оболочки — сфере, ибо, как было показано, поле точечного заряда q и зарядов, индуцированных на внутренней поверхности оболочки, равно всюду нулю вне полости. Далее, заряд на наружной оболочке вследствие ее симметрии распределяется равномерно, поэтому

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}.$$

Частным случаем замкнутой проводящей оболочки является безграничная проводящая плоскость. Все пространство с одной стороны такой плоскости в электрическом отношении независимо от пространства с другой стороны ее.

Указанным свойством замкнутой проводящей оболочки мы будем пользоваться в дальнейшем неоднократно.

2.1.4 Общая задача электростатики. Метод изображений

Очень часто приходится встречаться с задачами, в которых распределение зарядов неизвестно, но заданы потенциалы проводников, их форма и относительное расположение. И требуется определить потенциал $\varphi(r)$ в любой точке поля между проводниками. Напомним, что, зная $\varphi(r)$, можно легко восстановить само поле $\vec{E}(r)$ и по значению \vec{E} непосредственно у поверхности проводников найти распределение поверхностных зарядов на них.

Уравнения Пуассона и Лапласа. Найдем дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять функция φ — потенциал. Для этого подставим в левую часть (1.54) вместо \vec{E} его выражение через φ , т. е. $\vec{E} = -\nabla\varphi$. В результате получим общее дифференциальное уравнение для потенциала — **уравнение Пуассона**:

$$\nabla^2\varphi = -\rho/\epsilon_0 \tag{2.8}$$

где ∇^2 — *оператор Лапласа (лапласиан)*. В декартовых координатах он имеет вид

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

т. е. представляет собой скалярное произведение $\nabla \cdot \nabla$ [см. (1.19)]. Если между проводниками нет зарядов ($q = 0$), то уравнение (2.8) переходит в более простое — *уравнение Лапласа*:

$$\nabla^2 \varphi = 0. \quad (2.9)$$

Определение потенциала сводится к нахождению такой функции φ , которая во всем пространстве между проводниками удовлетворяет уравнениям (2.8) или (2.9), а на поверхностях самих проводников принимает заданные значения φ_1, φ_2 и т. д.

В теории доказывается, что эта задача имеет единственное решение. Это утверждение называют теоремой единственности, с физической точки зрения этот вывод довольно очевиден: если решение не одно, то будет не один потенциальный "рельеф", следовательно, в каждой точке поле \vec{E} , вообще говоря, неоднозначно — мы пришли к физическому абсурду.

По теореме единственности можно также утверждать, что заряд на поверхности проводника в статическом случае распределяется тоже единственным образом. Действительно, между зарядами на проводнике и электрическим полем вблизи его поверхности имеется однозначная связь (2.7): $\sigma = \varepsilon_0 E_n$. Отсюда сразу и следует, что единственность поля \vec{E} определяет и единственность распределения заряда на поверхности проводника.

Решение уравнений (2.8) и (2.9) в общем случае — задача сложная и кропотливая. Аналитические решения этих уравнений получены лишь для немногих частных случаев. Использование же теоремы единственности весьма облегчает решение ряда электростатических задач. Если решение задачи удовлетворяет уравнению Лапласа (или Пуассона) и граничным условиям, то можно утверждать, что оно является правильным и единственным, каким бы способом (хотя бы путем догадки) мы ни нашли его.

Пример. Покажем, что поле в пустой полости проводника отсутствует. Потенциал φ в полости должен удовлетворять уравнению Лапласа (2.9) и на стенках полости принимать какое-то значение φ_0 . Решение уравнения Лапласа, удовлетворяющее этому условию, можно угадать сразу: $\varphi = \varphi_0$. Согласно теореме единственности других решений быть не может. Поэтому

$$\vec{E} = -\nabla \varphi = 0.$$

Метод изображений. Это искусственный метод, позволяющий в ряде случаев (к сожалению, немногих) рассчитать электрическое поле достаточно просто. Рассмотрим идею этого метода на самом простом примере, когда точечный заряд q находится около безграничной проводящей плоскости (рис. 2.7, а).

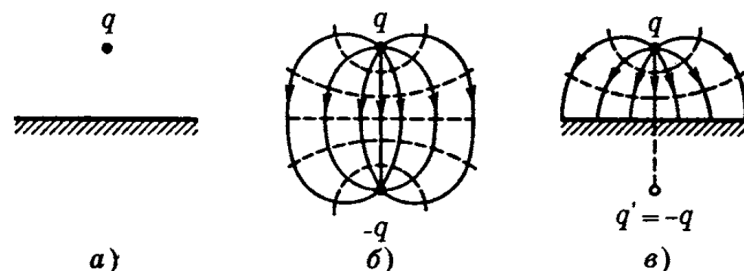


Рис. 2.5.

Идея метода заключается в том, что мы должны найти другую задачу, которая решается просто и решение которой или часть его может быть использовано. В нашем случае

такой простой задачей является задача с двумя зарядами q и $-q$. Поле этой системы известно (его эквипотенциали и линии вектора \vec{E} показаны на рис. 2.5, б).

Совместим со средней эквипотенциальной поверхностью (ее потенциал $\varphi = 0$) проводящую плоскость и уберем заряд $-q$. Согласно теореме единственности поле в верхнем полупространстве останется прежним. Действительно, на проводящей плоскости и всюду в бесконечности $\varphi = 0$, точечный же заряд q можно рассматривать как предельный случай малого сферического проводника, радиус которого стремится к нулю, а потенциал — к бесконечности. Таким образом, в верхнем полупространстве граничные условия для потенциала остались теми же, стало быть, тем же осталось и поле в этой области (рис. 2.5, в).

Заметим, что к этому выводу можно прийти, исходя и из свойств замкнутой проводящей оболочки (см. § 2.1.3 2.4), поскольку оба полупространства, разделенные проводящей плоскостью, в электрическом отношении независимы друг от друга, удаление заряда $-q$ никак не скажется на поле в верхнем полупространстве, оно останется прежним.

Итак, в рассматриваемом случае поле отлично от нуля только в верхнем полупространстве, и для вычисления этого поля достаточно ввести фиктивный заряд-изображение $q' = -q$, противоположный по знаку заряду q , поместив его по другую сторону проводящей плоскости на таком же расстоянии от нее, что и заряд q . Фиктивный заряд q' создает в верхнем полупространстве точно такое же поле, как и индуцированные заряды на плоскости. Именно это подразумевают, когда говорят, что фиктивный заряд заменяет собой "действие" всех индуцированных зарядов. Надо только иметь в виду, что "действие" фиктивного заряда распространяется лишь на то полупространство, в котором находится действительный заряд q . В другом полупространстве поле отсутствует.

Резюмируя, можно сказать, что метод изображений по существу основан на подгонке потенциала под граничные условия: мы стараемся найти другую задачу (конфигурацию зарядов), у которой конфигурация поля в интересующей нас части пространства была бы той же. Если это удастся сделать с помощью достаточно простых конфигураций, то метод изображений оказывается весьма эффективным. Рассмотрим еще один пример.

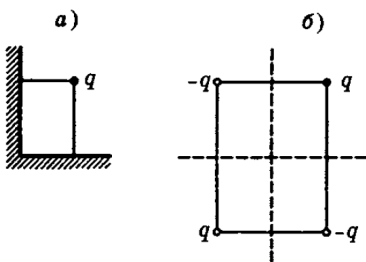


Рис. 2.6.

Пример. Точечный заряд q находится между двумя проводящими взаимно перпендикулярными полуплоскостями (рис. 2.6, а).

Найдем расположение точечных фиктивных зарядов, действие которых на заряд q будет эквивалентно действию всех индуцированных зарядов на данных полуплоскостях.

Нужно найти систему из точечных зарядов, у которой эквипотенциальные поверхности с $\varphi = 0$ совпадали бы с проводящими полуплоскостями. Одним и двумя фиктивными зарядами здесь не обойтись, таких зарядов должно быть три (рис. 2.6, б). Только при такой конфигурации системы из четырех зарядов можно осуществить необходимую "подгонку" — обеспечить, чтобы на проводящих полуплоскостях потенциал был равен нулю. Именно эти три фиктивных заряда и создают то же поле внутри "прямого угла", что и заряды, индуцированные на проводящих полуплоскостях.

Найдя эту конфигурацию точечных зарядов (другую задачу), можно затем просто решить ряд других вопросов, например найти потенциал и напряженность поля в любой точке внутри "прямого угла", силу, действующую на заряд q , и др.

2.1.5 Электрическая емкость проводника

Рассмотрим уединенный проводник, который удален от других проводников, тел и зарядов. Если на него подать некий заряд, то он будет обладать неким потенциалом. Опыт

показывает, что разные проводники, будучи одинаково заряженными, имеют различные потенциалы, зависящие от геометрии проводника. Если проводнику сообщить заряд q , то он распределится по поверхности так, что напряженность поля внутри проводника окажется равной нулю. Зная распределение заряда, можно с помощью принципа суперпозиции найти потенциал и напряженность поля в любой точке.

Если поместить на этот же проводник вдвое больший заряд, то он распределится по поверхности проводника точно так же, причем заряды в любой точке поверхности возрастут вдвое. При этом и потенциал в каждой точке возрастет пропорционально заряду проводника, так что потенциал пропорционален заряду. Поэтому для уединенного проводника можно ввести понятие *электрической емкости* (или просто емкости) *проводника* как отношения заряда на проводнике к его потенциалу:

$$C = \frac{q}{\varphi}. \quad (2.10)$$

Емкость – скалярная величина, характеризующая способность проводника накапливать электрические заряды. Так как заряды распределяются на внешней поверхности проводника, то емкость зависит от его размеров и формы, но не зависит от материала, агрегатного состояния и наличия полостей внутри проводника. Единицей емкости в СИ является фарад (Ф). 1 фарад – это емкость проводника, потенциал которого изменяется на 1 В при сообщении ему заряда 1 Кл.

Так потенциал уединенной сферы (и шара) радиуса r в соответствии с формулой (1.83) равен $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$. Отсюда по определению можно найти емкость уединенного шара в вакууме:

$$C = 4\pi\epsilon_0 r. \quad (2.11)$$

В диэлектрике поле ослабляется в ϵ раз. Пропорционально уменьшаются напряженность поля и потенциал:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r}, \quad (2.12)$$

так что емкость уединенного шара в диэлектрике равна:

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon r. \quad (2.13)$$

Несложно посчитать, что емкостью в 1 Ф обладает в вакууме уединенный шар, имеющий радиус 10 миллионов км, а емкость шарообразной Земли по той же формуле составляет 0,7 мФ. Так что фарад – большая величина, поэтому чаще используют микрофарады, нанофарады, пикофарады. Еще один пример. Если считать емкость тела человека равной емкости электропроводящего шара того же объема, то, как несложно показать, ее можно оценить величиной порядка 10^{-11} Ф.

2.1.6 Конденсаторы

В технике необходимы устройства, которые обладают большой емкостью – аккумулируют большой заряд при малом потенциале. Такие устройства называются конденсаторами. Они используют тот факт, что емкость неуединенного проводника часто существенно больше емкости того же проводника, когда он уединен. Конденсатор обычно представляет собой систему двух проводников (обкладок), разделенных диэлектриком. На емкость конденсатора не должны оказывать влияние окружающие тела, поэтому проводникам придают такую форму, чтобы поле конденсатора было сосредоточено в узком зазоре между обкладками. Этому условию удовлетворяют две плоские пластины, два коаксиальных (соосных) цилиндра, две концентрические (имеющие общий центр) сферы. Поэтому конденсаторы делят на плоские, цилиндрические и сферические.

Так как поле сосредоточено внутри конденсатора, то силовые линии электрического поля начинаются на одной обкладке и кончаются на другой. Поэтому свободные заряды, возникающие на разных обкладках, являются разноименными зарядами, равными по модулю. *Емкостью конденсатора* называется отношение заряда q , накопленного в конденсаторе, к разности потенциалов U_{12} между его обкладками:

$$C = q/U_{12}. \quad (2.14)$$

Рассчитаем емкость плоского конденсатора, состоящего из двух параллельных металлических пластин площадью S каждая, расположенных на расстоянии d друг от друга и имеющих заряды $+q$ и $-q$. Предположим, что расстояние между пластинами мало по сравнению с их линейными размерами. Тогда поле между обкладками можно считать однородным, и разность потенциалов между пластинами, промежутком между которыми заполнен диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε , равна из (1.80)

$$U_{12} = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{qd}{\varepsilon_0 \varepsilon S}. \quad (2.15)$$

Здесь учтено, что $\sigma = q/S$. Тогда по определению *емкость плоского конденсатора* равна:

$$C = \frac{q}{U_{12}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}. \quad (2.16)$$

При сравнении формул для емкости уединенного шара и плоского конденсатора видно, что емкость плоского конденсатора можно сделать на много порядков больше, чем у шара – за счет увеличения отношения площади пластин к расстоянию между ними: $\frac{S}{d} \gg 4\pi r$. Реально площадь пластин компактного конденсатора увеличивают путем скручивания их в рулон.

Из формулы (1.81) для разности потенциалов в поле вокруг равномерно заряженной сферы аналогичным образом несложно вычислить емкость сферического конденсатора:

$$C = \frac{q}{U_{12}} = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon Rr}{R-r}, \quad (2.17)$$

где R и r – радиусы образующих конденсатор сфер.

Из формулы (1.84) для разности потенциалов в поле вокруг равномерно заряженного цилиндра также несложно вычислить емкость цилиндрического конденсатора:

$$C = \frac{q}{U_{12}} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon L}{\ln \frac{R}{r}}, \quad (2.18)$$

где R и r – радиусы образующих конденсатор коаксиальных (соосных) цилиндров, L – длина образующей цилиндров.

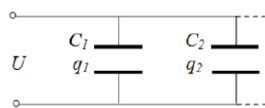


Рис. 2.7.

Для варьирования параметров конденсаторы соединяют в батареи. Различают два вида соединений конденсаторов – параллельное и последовательное. Для увеличения емкости применяют параллельное соединение (рис. 2.7). При параллельном соединении разность потенциалов на всех конденсаторах одинакова и составляет U . Полный заряд батареи равен сумме зарядов всех конденсаторов:

$$q = \sum q_i = \sum C_i U, \quad (2.19)$$

так что суммарная емкость батареи составит:

$$C = \frac{q}{U} = \sum C_i. \quad (2.20)$$

Таким образом, при параллельном соединении конденсаторов электрическая емкость батареи равна сумме емкостей входящих в нее конденсаторов.

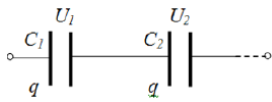


Рис. 2.8.

При последовательном соединении (рис. 2.8) заряды всех конденсаторов одинаковы и равны заряду q батареи. Разность потенциалов батареи равна сумме разностей потенциалов на каждом из конденсаторов:

$$U = \sum U_i, \quad (2.21)$$

где $U_i = \frac{q}{C_i}$

Поскольку $U = \frac{q}{C}$, то суммарная емкость батареи рассчитывается по формуле:

$$\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i}. \quad (2.22)$$

При последовательном соединении емкость батареи всегда меньше наименьшей из емкостей входящего в батарею конденсатора, используемого в батарее. Достоинство последовательного соединения конденсаторов в том, что на каждый конденсатор приходится лишь часть разности потенциалов батареи, что уменьшает вероятность пробоя конденсаторов.

Глава 3

Энергия взаимодействия зарядов и энергия электростатического поля

3.1 Энергия заряженного проводника и конденсатора

3.1.1 Плотность энергии электростатического поля

Электростатические силы взаимодействия консервативны, поэтому система зарядов обладает потенциальной энергией. Найдем сначала энергию заряженного уединенного проводника. Пусть имеется уединенный проводник с зарядом q емкостью C и потенциалом φ . При увеличении заряда этого проводника на dq совершается работа по преодолению кулоновских сил отталкивания между одноименными зарядами. Эта работа идет на увеличение электрической энергии заряженного проводника. Примем начало отсчета потенциала в бесконечно удаленной точке. Тогда работа dA , совершаемая внешними силами при переносе заряда dq из бесконечности на проводник, равна:

$$dA = \varphi dq = \varphi d(C\varphi) = C\varphi d\varphi. \quad (3.1)$$

Здесь использована связь заряда, емкости и потенциала проводника. Постепенное увеличение заряда на проводнике приводит к увеличению потенциала проводника от 0 до φ . При этом совершается работа, задаваемая интегралом от (3.1):

$$A = \int_0^{\varphi} C\varphi d\varphi = \frac{C\varphi^2}{2}. \quad (3.2)$$

Очевидно, что энергия заряженного проводника W равна работе A , которую надо совершить, чтобы зарядить проводник:

$$W = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{q\varphi}{2}. \quad (3.3)$$

Найдем теперь энергию заряженного конденсатора. Для переноса заряда dq с одной обкладки на другую внешние силы совершают работу

$$dA = U_{12}dq = U_{12}d(CU_{12}) = CU_{12}dU_{12}. \quad (3.4)$$

Увеличение заряда приводит к увеличению разности потенциалов на конденсаторе от 0 до U . Таким образом, работа по увеличению разности потенциалов на конденсаторе от 0 до U дается интегралом:

$$A = \int_0^U CU_{12}dU_{12} = \frac{CU^2}{2}. \quad (3.5)$$

В результате *энергия конденсатора* W равна работе A , которую надо совершить, чтобы его зарядить:

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{qU}{2}. \quad (3.6)$$

Полученное выражение для энергии конденсатора позволяет найти силу, с которой пластины плоского конденсатора притягивают друг друга. Предположим, что расстояние $= d$ между обкладками меняется на величину dx . При этом сила совершает работу за счет уменьшения потенциальной энергии конденсатора $dA = Fdx = -dW$, откуда получаем известную из механики формулу:

$$F = -\frac{dW}{dx}. \quad (3.7)$$

Воспользовавшись формулами для энергии конденсатора и емкости плоского конденсатора, получим

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2 x}{2\varepsilon_0 \varepsilon S} \quad (3.8)$$

и окончательно силу притяжения пластин в конденсаторе:

$$F = -\frac{dW}{dx} = -\frac{q^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon S}. \quad (3.9)$$

Здесь знак "минус" указывает, что сила F является силой притяжения.

Если отключить конденсатор от внешнего источника заряда и начать раздвигать его пластины, то энергия конденсатора $W = \frac{q^2 d}{2\varepsilon_0 \varepsilon S}$ будет линейно увеличиваться с увеличением занимаемого полем объема конденсатора при постоянной (в соответствии с теоремой Гаусса) напряженности поля. Поэтому логично интерпретировать энергию конденсатора как энергию электрического поля, определяемую занимаемым полем объемом и напряженностью. Выразим энергию электрического поля плоского конденсатора через напряженность:

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S (Ed)^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} V, \quad (3.10)$$

где $V = Sd$ — занимаемый полем объем между обкладками конденсатора.

Поскольку электрическое поле конденсатора однородно, то разделив энергию на объем, получим объемную *плотность энергии электростатического поля*:

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} = \frac{ED}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon}. \quad (3.11)$$

Плотность энергии электростатического поля измеряется в джоулях на кубический метр. В случае неоднородного поля плотность энергии электростатического поля в каждой точке выражается через малый объем dV :

$$w = \frac{dW}{dV} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}. \quad (3.12)$$

При этом энергия поля в объеме V выражается через интеграл по этому объему:

$$W = \int_V w dV = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{2} \int_V E^2 dV.$$

Глава 4

Электростатическое поле при наличии диэлектриков

4.1 Диэлектрики в электрическом поле

4.1.1 Поляризация диэлектриков. Полярные и неполярные диэлектрики. Свободные и связанные заряды

Рассмотрим теперь подробнее поведение диэлектриков в электрическом поле. Диэлектрик плохо проводит электрический ток. Заряды, входящие в состав молекул диэлектрика, прочно связаны друг с другом и под действием внешнего электрического поля могут лишь немного смещаться – положительный заряд относительно отрицательного. При этом, как отмечалось выше, вещество превращается в диполь, поле которого противоположно внешнему полю.

Процесс образования дипольного момента в диэлектрике при наложении внешнего поля называется *поляризацией диэлектрика*. Таким образом, если в проводнике на поле реагируют *свободные заряды*, то в диэлектрике – *связанные заряды*. Различают два основных типа диэлектриков - полярные и неполярные.

В молекулах *полярных диэлектриков* изначально имеется смещение положительного заряда относительно отрицательного – даже в отсутствие внешнего электрического поля. Примером полярного диэлектрика является молекула воды H_2O , которая по форме представляет собой равнобедренный треугольник, причем электронные облака (и отрицательный заряд) смещены от атомов водорода к электроотрицательному атому кислорода. Похожее смещение отрицательного заряда атомов водорода имеет место в полярных молекулах хлористого водорода HCl и аммиака NH_3 . Молекула полярного диэлектрика является жестким диполем с дипольным моментом (1.22) $\vec{p} = q\vec{l}$.

Молекулы неполярных диэлектриков более симметричны, и в них в отсутствие внешнего электрического поля нет смещения положительного заряда относительно отрицательного. Примерами неполярных диэлектриков являются азот и многие углеводороды типа полиэтилена. Однако при наложении поля положительный заряд молекулы смещается в направлении поля, отрицательный – против поля. Возникает упругий диполь и индуцированный (наведенный полем) дипольный момент.

Для оценки состояния поляризации используют понятие вектора поляризации. *Вектор поляризации* (или *поляризованность*) диэлектрика – это дипольный момент единицы объема:

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \vec{p}_i, \quad (4.1)$$

где по небольшому объему ΔV суммируются дипольные моменты \vec{p}_i отдельных молекул.

Для большинства веществ в отсутствие внешнего электрического поля вектор поляризации равен нулю. Даже для полярных диэлектриков вследствие хаотического движения молекул дипольные моменты отдельных молекул распределены случайным образом, так что $\vec{P} = 0$ (рис. 4.1а).

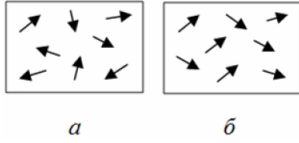


Рис. 4.1

Во внешнем электрическом поле, как правило, $\vec{P} \neq 0$. Дипольные моменты отдельных молекул диэлектриков стремятся - вопреки хаотическому движению - сориентироваться вдоль силовых линий поля (рис. 4.1б). Таким образом, во внешнем электрическом поле вектор поляризации является функцией поля. При этом опытом установлено, что в большинстве случаев поле можно считать небольшим, так что в разложении в ряд Тейлора зависимости

$\vec{P}(\vec{E})$ можно ограничиться линейным членом:

$$\vec{P} = \beta \epsilon_0 \vec{E}, \quad (4.2)$$

где безразмерная величина β - диэлектрическая восприимчивость.

4.1.2 Вектор поляризации, диэлектрическая восприимчивость и диэлектрическая проницаемость

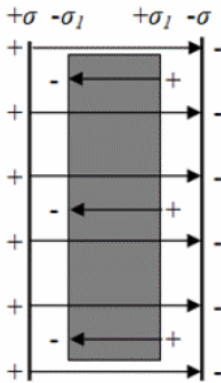


Рис. 4.2

Микроскопические диполи-молекулы определяют макроскопическую диэлектрическую проницаемость среды. Поэтому найдем теперь связь вектора поляризации и диэлектрической восприимчивости с диэлектрической проницаемостью. Пусть имеется плоский конденсатор, в который помещена пластина диэлектрика (рис. 4.2). Пластина состоит из молекул, обладающих электрическим дипольным моментом. В конденсаторе без диэлектрика поле создается свободными зарядами - зарядами на пластинах конденсатора. В конденсаторе с диэлектриком напряженность поля в диэлектрике является разностью двух полей:

$$E = E_0 - E_1, \quad (4.3)$$

поля свободных зарядов (2.1): $E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ и поля связанных зарядов:

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0}. \quad (4.4)$$

При этом внутри диэлектрика связанные заряды взаимно компенсируются, так что некомпенсированные связанные заряды поверхностной плотностью σ_1 сосредоточены на двух поверхностях диэлектрика. Найдем связь модуля вектора поляризации P и σ_1 :

$$P = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} |\vec{p}_i| = \frac{1}{Sd} q_1 d = \frac{q_1}{S} = \sigma_1 \quad (4.5)$$

где S - площадь пластин конденсатора, d - расстояние между пластинами, q_1 - связанный заряд пластины, $q_1 d$ - дипольный момент пластины диэлектрика.

Получим из (4.3)

$$E = E_0 - \frac{P}{\epsilon_0}. \quad (4.6)$$

Подставив из (4.2) $P = \beta \epsilon_0 E$, получим $E = E_0 - \beta E$ или

$$E(1 + \beta) = E_0. \quad (4.7)$$

Иными словами, поле в диэлектрике E в $1 + \beta$ раз меньше, чем поле в вакууме E_0 . Вспомнив определение диэлектрической проницаемости ε , получим ее связь с диэлектрической восприимчивостью:

$$1 + \beta = \varepsilon. \quad (4.8)$$

Полезной может оказаться и формула для связи вектора поляризации с диэлектрической проницаемостью:

$$\vec{P} = (\varepsilon - 1) \varepsilon_0 \vec{E}, \quad (4.9)$$

Отметим, что полученные соотношения выполняются только для однородных изотропных диэлектриков. В анизотропных кристаллах ситуация сложнее, поскольку зависит от взаимной ориентации электрического поля и осей кристалла. Кроме того, необходимо учитывать, что в переменных полях диэлектрическая проницаемость и диэлектрическая восприимчивость зависят от частоты поля.

4.1.3 Теорема Гаусса для поля в диэлектрике. Явления на границе раздела двух диэлектриков. Преломление линий смещения и напряженности

Запишем теперь теорему Гаусса через *поток вектора электрического смещения* $\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$. Из (1.32) имеем с учетом ослабления поля в диэлектрике в случае среды с диэлектрической проницаемостью ε :

$$\oint E_n dS = \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i, \quad (4.10)$$

откуда:

$$\oint D_n dS = \sum_{i=1}^N q_i. \quad (4.11)$$

Таким образом, если мы записываем теорему Гаусса через поток вектора электрического смещения, то необходимо учитывать только свободные заряды – без учета свойств диэлектрика. В свою очередь, при записи теоремы Гаусса через поток вектора напряженности, мы учитываем свойства диэлектрика, как со свободными, так и со связанными зарядами. Аналогичны различия в картинах силовых линий напряженности и электрического смещения. Силовые линии напряженности начинаются и заканчиваются, как на свободных, так и на связанных зарядах. А силовые линии электрического смещения начинаются и заканчиваются только на свободных зарядах.

Подобные рассуждения позволяют перейти к задаче о преломлении линий смещения и напряженности на границе раздела двух диэлектриков. Будем считать, что на этой границе отсутствуют свободные заряды. Однако, как мы уже видели (рис. 4.2), на границе диэлектрика (а в общем случае – на границе раздела двух диэлектриков) в поле возникает связанный заряд, который может приводить к разрыву полей.

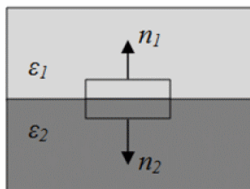


Рис. 4.3

Рассмотрим сначала соотношение между нормальными к поверхности раздела компонентами вектора электрического смещения D_n . Воспользуемся теоремой Гаусса, выбрав в качестве гауссовой поверхности поверхность цилиндра (рис. 4.3). При этом основания цилиндра должны быть малы (чтобы считать электрическое смещение константой), параллельны границе раздела и находиться в разных диэлектриках, а высота цилиндра должна быть бесконечно малой – в том числе и по сравнению с основаниями. Такой выбор позволяет пренебречь потоком вектора электрического смещения через боковую поверхность цилиндра по сравнению с потоком через основания.

Тогда из теоремы Гаусса (4.11) следует, что потоки вектора электрического смещения через основания равны и противоположны $D_{2n}\Delta S - D_{1n}\Delta S = \sigma\Delta S$ где σ – поверхностная плотность стороннего заряда на границе раздела. Взяв обе проекции вектора \vec{D} на общую нормаль \vec{n} (направленную от диэлектрика 1 к диэлектрику 2) и сократив на ΔS , предыдущее уравнение приведем к виду

$$D_{2N} - D_{1n} = \sigma.$$

Из этого соотношения видно, что нормальная составляющая вектора \vec{D} , вообще говоря, претерпевает скачок при переходе границы раздела. Однако если сторонние заряды на границе раздела отсутствуют ($\sigma = 0$), то

$$D_{1n} = D_{2n}, \quad (4.12)$$

получаем, что *нормальная компонента вектора электрического смещения на границе раздела диэлектриков остается непрерывной*. Выразив полученное соотношение через напряженность поля, получим, что нормальная компонента вектора напряженности на границе раздела диэлектриков претерпевает разрыв:

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \quad (4.13)$$

Перейдем теперь к тангенциальным составляющим, соотношение которых удобно найти для вектора напряженности с помощью теоремы о циркуляции. (Заметим, что теорема о циркуляции остается справедливой и в диэлектрике).

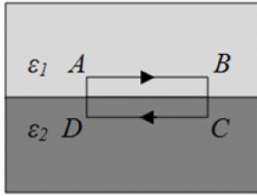


Рис. 4.4

Выделим вблизи границы раздела небольшой прямоугольный контур ABCD (рис. 4.4). Выберем стороны $AB = CD = l$ так, чтобы они были параллельны границе раздела и находились в разных диэлектриках, а стороны BC и DA были бесконечно малыми по сравнению со сторонами BC и DA . Тогда, пренебрегая в теореме о циркуляции (1.65) $\oint E_l dl = 0$ интегралами по бесконечно малым сторонам, получим: $E_{1\tau}l - E_{2\tau}l = 0$, откуда следует, что *тангенциальная компонента вектора напряженности на границе раздела диэлектриков остается непрерывной*:

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}. \quad (4.14)$$

Выразив это соотношение через электрическое смещение, получим, что тангенциальная компонента вектора электрического смещения на границе раздела диэлектриков претерпевает разрыв:

$$\frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \quad (4.15)$$

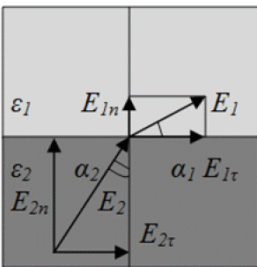


Рис. 4.5

Таким образом, мы получили, что вектора напряженности и электрического смещения претерпевают преломление при переходе из одной среды в другую. Пусть в первой среде (рис. 4.5) $tg\alpha_1 = \frac{E_{1\tau}}{E_{1n}}$, а во второй среде $tg\alpha_2 = \frac{E_{2\tau}}{E_{2n}}$. Тогда из (4.13) и (4.14) получим *закон преломления вектора напряженности электрического поля*:

$$\frac{tg\alpha_2}{tg\alpha_1} = \frac{E_{2\tau}/E_{2n}}{E_{1\tau}/E_{1n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \quad (4.16)$$

Аналогично преломляются и силовые линии электрического смещения. Формула показывает, что при переходе в диэлектрик с большей диэлектрической проницаемостью силовые линии напряженности и электрического смещения удаляются от нормали.

у
Нике-
рова
 $H_{1\tau} =$

4.1.4 Неполлярные диэлектрики

В отсутствие внешнего электрического поля "центры тяжести" положительных и отрицательных зарядов в молекулах этого диэлектрика совпадают ($\vec{l} = 0$) и дипольные моменты молекул равны нулю.

Во внешнем электрическом поле происходит деформация электронных оболочек атомов и молекул. *Центры тяжести* положительных и отрицательных зарядов смещаются друг относительно друга ($\vec{l} \neq 0$). Соответственно неполярная молекула диэлектрика приобретает во внешнем электрическом поле **индуцированный (наведенный) дипольный электрический момент**, пропорциональный напряженности \vec{E} внешнего поля.

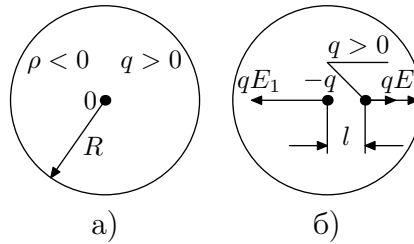


Рис. 4.6.

Покажем это на модели атома, изображенной на рис. 4.6, а. Положительно заряженное ядро атома – точечный заряд q – находится в центре облака электронов, имеющего форму шара, радиус R которого равен размеру атома ($R \sim 10^{-10}$ м). Если атом многоэлектронный, то приближенно можно считать, что отрицательный заряд электронов равномерно "размазан" по всему объему атома – шара с постоянной объемной плотностью $\rho = -3q/(4\pi R^3)$. Во внешнем электрическом поле напряженностью \vec{E} на ядро атома действует сила $q\vec{E}$, а на объемный заряд – сила $-q\vec{E}$. При этом центр O объемного заряда смещается относительно ядра атома на такое расстояние \vec{l} в сторону, противоположную направлению вектора \vec{E} , при котором сила $q\vec{E}_1$, действующая на ядро со стороны объемного заряда, уравнивает силу $q\vec{E}$, действующую на ядро со стороны внешнего поля (рис. 4.6, б): $q\vec{E} + q\vec{E}_1 = 0$ откуда $\vec{E}_1 = -\vec{E}$ и $E_1 = E$. Напряженность поля объемного заряда при $l < R$ можно найти по формуле для напряженности поля внутри равномерно заряженной сферы с объемной плотностью заряда $\rho < 0$, положив в ней $r = l$:

$$E_1 = -\frac{\rho l}{3\epsilon_0} = \frac{ql}{4\pi\epsilon_0 R^3}.$$

Так как $E_1 = E$, то индуцированный дипольный электрический момент атома

$$p = ql = 4\pi\epsilon_0 R^3 E. \quad (4.17)$$

Вектор \vec{p} , как видно из рис. 4.6, б, совпадает по направлению с вектором \vec{E} . Поэтому

$$p = \alpha\epsilon_0 E, \quad (4.18)$$

где $\alpha = 4\pi R^3$ – поляризуемость атома (молекулы), зависящая только от объема атома (молекулы). Исходя из формулы (4.17), легко показать, что $l \ll R$ при всех возможных значениях напряженности внешнего поля вплоть до $10^7 - 10^8$ В/м (при таких значениях происходит электрический пробой электроизоляционных материалов):

$$l = \frac{4\pi\epsilon_0 R^3}{q} E \lesssim \frac{10^{-30} \cdot 10^8}{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-19}} \text{ м} \sim 10^{-13} \text{ м}.$$

Неполярная молекула подобна **упругому диполю**, длина плеча которого пропорциональна растягивающей его силе, т.е. пропорциональна напряженности внешнего электрического поля. Тепловое движение неполярных молекул никак не влияет на возникновение

у них индуцированных электрических моментов: векторы \vec{p} всегда совпадают по направлению с вектором \vec{E} , а поляризуемость α не зависит от температуры. Это связано с очень малой инертностью электронов, которые смещаются в молекуле всегда в направлении силы $-e\vec{E}$ действующей на них со стороны внешнего электрического поля.

Разреженные газы. В этом случае напряженность * локального поля весьма незначительно отличается от напряженности E внешнего поля. Поэтому [см. (4.18)] поляризованность равна

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \alpha \varepsilon_0 \vec{E} = \alpha \varepsilon_0 \vec{E} \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} 1 = \alpha \varepsilon_0 n \vec{E}. \quad (4.19)$$

Здесь $\sum_{\Delta V} 1 = n \Delta V$, где n – концентрация молекул.

Сравнивая (4.19) с (17.11) заключаем, что диэлектрическая восприимчивость равна

$$\beta = \alpha n. \quad (4.20)$$

Относительная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0$ с учетом (17.31) представляется в виде

$$\varepsilon_r = 1 + \alpha n. \quad (4.21)$$

Значение ε_r отличается от единицы на величину αn , которая для газов весьма мала. Например, концентрация молекул воздуха при нормальных условиях равна $n = 2,6 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$. Считая в соответствии с (4.18) для молекул $\alpha \approx 10^{-29} \text{ м}^3$, находим

$$\alpha n \approx 10^{-3} \quad (4.22)$$

С увеличением размеров молекул α и, следовательно, и αn увеличиваются, оставаясь по порядку величины малыми.

Величина ε_r может зависеть от температуры лишь неявно, посредством зависимости n от температуры. Обозначим: N_A, ρ_m, m – соответственно постоянная Авогадро, плотность газа, масса молекулы и напишем очевидное равенство

$$n = N_A \rho_m / m. \quad (4.23)$$

С помощью (4.23) перепишем соотношение (4.21) в виде

$$\frac{(\varepsilon_r - 1) m}{\rho_m} = \alpha N_A. \quad (4.24)$$

Следовательно, $(\varepsilon_r - 1) / \rho_m$ является постоянной, не зависящей от температуры и давления, величиной, если только давление достаточно мало. При увеличении давления плотность растет и возникает необходимость учета отличия локального поля от внешнего.

Плотные газы. В этом случае в формуле (4.19) надо для * использовать выражение для напряженности локального поля, действующего на молекулу внутри диэлектрика:

$$\vec{E}^* = \vec{E} + \vec{P} / (3\varepsilon_0).$$

Тогда

$$\vec{P} = \alpha \varepsilon_0 n \left[\vec{E} + \vec{P} / (3\varepsilon_0) \right], \quad (4.25)$$

откуда

$$\vec{P} = \frac{\alpha \varepsilon_0 n}{1 - \alpha n / 3} \vec{E}. \quad (4.26)$$

Подставляя (4.26) в выражение для вектора смещения, находим

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + \frac{\alpha \varepsilon_0 n}{1 - \alpha n / 3} \vec{E}, \quad (4.27)$$

откуда

$$\frac{3(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r + 2} = \alpha n. \quad (4.28)$$

Эта формула называется **формулой Клаузиуса — Моссотти**. Ее с помощью (4.23) можно представить в виде

$$\frac{3(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r + 2} \frac{m}{\rho_m} = \alpha N_A. \quad (4.29)$$

Левая часть равенства (4.29) не зависит от температуры и давления в тех пределах, в которых молекулярная восприимчивость остается постоянной. Для газов такие давления могут быть большими (порядка 100 МПа). В жидкостях и твердых телах при больших плотностях α зависит от давления. Формула (4.29) проверена экспериментально в широком диапазоне давлений. Например, для углекислого газа CO_2 , являющегося неполярным, справедливость соотношения Клаузиуса-Моссотти (4.29) была проверена с большой точностью до давлений примерно 100 МПа при 100° . Во всем интервале этих давлений относительное отклонение левой части (4.29) от постоянного значения не превышает нескольких сотых, причем до давлений примерно в 20 МПа наблюдается небольшой рост, а выше — небольшое уменьшение значения левой части (4.29). Относительная диэлектрическая проницаемость ε_r при этом изменяется довольно значительно, примерно в полтора раза в интервале давлений от 1 МПа до 100 МПа.

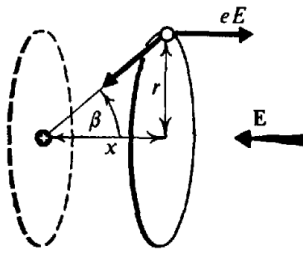


Рис. 4.7

Пример. Оценить атомную диэлектрическую восприимчивость α атома водорода. Напряженность электрического поля направлена перпендикулярно плоскости движения электрона (рис. 4.7).

Запишем условие равновесия движущегося электрона при наличии внешнего поля:

$$eE = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0(x^2 + r^2)} \cos \beta = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x}{(x^2 + r^2)^{3/2}}. \quad (4.30)$$

При $x \ll r$ получаем $x/(x^2 + r^2)^{3/2} = x/r^3$ и поэтому [см. (4.30)]

$$ex = 4\pi\varepsilon_0 r^3 E = p,$$

откуда

$$\alpha = 4\pi r^3 \approx 1,57 \cdot 10^{-30} \text{ м}^3,$$

что дает правильный порядок атомной диэлектрической восприимчивости атома водорода.

4.1.5 Полярные диэлектрики

Описываются основные свойства полярных диэлектриков.

Зависимость поляризованности от температуры. Постоянный дипольный момент у большинства молекул имеет порядок $10^{-29} - 10^{-30}$ Кл·м. Например, у он равен $0,36 \cdot 10^{-30}$ Кл·м, у $SO_2 - 5,3 \cdot 10^{-30}$ Кл·м, у $l - 3,5 \cdot 10^{-29}$ Кл·м. Дипольные моменты большинства молекул измерены и имеются в таблицах.

Дипольный момент \vec{p} , находящийся в электрическом поле \vec{E} , обладает потенциальной энергией

$$W = -\vec{p} \cdot \vec{E}. \quad (4.31)$$

Эта величина достигает минимального значения, когда направление диполя совпадает с направлением напряженности электрического поля. Поскольку устойчивым является состояние системы с наименьшей энергией, моменты диполей полярных молекул стремятся повернуться до совпадения с направлением напряженности электрического поля. Этот поворот осуществляется парой сил, действующих на диполь (см. рис. 4.6). Однако тепловое движение расстраивает упорядочивающее действие электрического поля. В результате устанавливается некоторое равновесие.

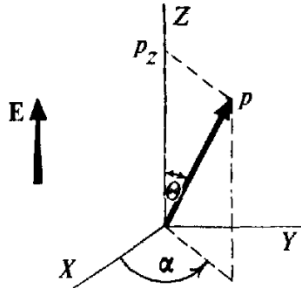


Рис. 4.8

Совместим ось Z с направлением напряженности \vec{E} электрического поля (рис. 4.8). Потенциальная энергия молекул (4.31) зависит от угла между направлениями их дипольного момента и напряженности:

$$W = -pE \cos \Theta = -p_z E \quad (4.32)$$

и, следовательно, распределение Больцмана в данном случае характеризует распределение направлений дипольных моментов молекул по углам. Число молекул dn , дипольные моменты которых расположены в телесном угле $d\Omega$, равно

$$dn = A e^{\frac{pE \cos \Theta}{kT}} d\Omega = A e^{\frac{pE \cos \Theta}{kT}} d\alpha \sin \Theta. \quad (4.33)$$

Тогда среднее значение компоненты момента диполей по оси Z равно

$$\langle p_z \rangle = \frac{\int p_z dn}{\int dn} = \frac{Ap \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi e^{\beta \cos \theta} \cos \theta \sin \theta d\theta}{A \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi e^{\beta \cos \theta} \sin \theta d\theta} \quad (4.34)$$

введено обозначение

$$\beta = pE / (kT). \quad (4.35)$$

Прежде всего необходимо вычислить внутренний интеграл в знаменателе (4.34):

$$I = \int_0^\pi e^{\beta \cos \theta} \sin \theta d\theta, \quad (4.36)$$

поскольку внутренний интеграл в числителе выражается формулой

$$\int_0^\pi e^{\beta \cos \theta} \sin \theta d\theta = \partial I / \partial \beta \quad (4.37)$$

Интеграл (4.36) вычисляется легко:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi e^{\beta \cos \theta} \sin \theta d\theta = -\frac{1}{\beta} e^{\beta \cos \theta} \Big|_0^\pi = -\frac{1}{\beta} (e^{\beta \cos \pi} - e^{\beta \cos 0}) = \\ &= -\frac{1}{\beta} (e^{-\beta} - e^\beta) = \frac{1}{\beta} (e^\beta - e^{-\beta}) = \frac{2}{\beta} \cdot \frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2} = \frac{2}{\beta} \cdot \text{sh } \beta, \end{aligned} \quad (4.38)$$

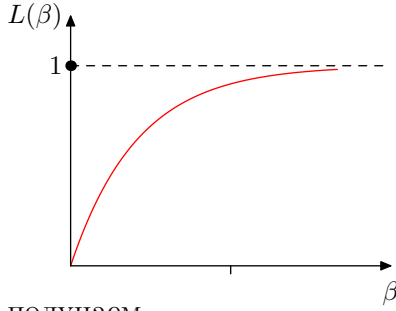
откуда

$$\frac{\partial I}{\partial \beta} = \frac{2}{\beta} \cdot \text{ch } \beta - \frac{2}{\beta^2} \cdot \text{sh } \beta = \frac{2}{\beta} \cdot \text{sh } \beta \left(\text{cth } \beta - \frac{1}{\beta} \right). \quad (4.39)$$

Таким образом, формула (4.35) с учетом (4.37) и (4.39) принимает вид

$$\langle p_z \rangle = pL(\beta), \quad (4.40)$$

где $L(\beta) = \text{cth } \beta - 1/\beta$ — функция Ланжевена рис. 4.9.



получаем Рис. 4.9

При не очень больших напряженностях поля, когда $pE \ll kT$, т. е. $\beta \ll 1$, разлагая гиперболический котангенс в ряд

$$\text{cth } \beta = 1/\beta + \beta/3 - \beta^3/45 + \dots \quad (4.41)$$

и ограничиваясь в выражении для $L(\beta)$ линейным по β членом

$$L(\beta) = \beta/3, \quad (4.42)$$

$$\langle p_z \rangle = p^2 E / (3kT). \quad (4.43)$$

Поле насыщения. С увеличением напряженности поля дипольные моменты все более интенсивно ориентируются в направлении напряженности и при $pE \gg kT$, т. е. при $\beta \gg 1$, можно считать, что все дипольные моменты параллельны между собой и имеют направление напряженности поля. Следовательно,

$$\langle p_z \rangle = p. \quad (4.44)$$

Соотношение (4.44) получается из (4.40), если учесть, что при $\beta \gg 1$ функция $L(\beta)$ близка к единице:

$$L(\beta \rightarrow \infty) \rightarrow 1. \quad (4.45)$$

При выполнении условия (4.44) достигается максимально возможная поляризованность и дальнейшее увеличение напряженности поля не приводит к ее увеличению. Напряженность поля, при которой достигается максимально возможная поляризованность, называется **напряженностью поля насыщения**. Считая порядок величины дипольных моментов равным 10^{-29} Кл·м, заключаем, что при $T = 300$ К напряженность поля насыщения равна

$$E \approx kT/p \simeq 4,2 \cdot 10^8 \text{ В/м}. \quad (4.46)$$

Отсюда видно, что условие $pE \ll kT$, при котором справедлива формула (4.43), выполняется вплоть до напряженностей полей, равных миллионам вольт на метр. Поэтому в большинстве практически важных случаев можно пользоваться формулой (4.43).

Разреженные газы. В этом случае напряженность локального поля можно считать равной напряженности внешнего и представить поляризованность [см. (4.43)] в виде

$$\vec{P} = np^2 \vec{E} / (3kT). \quad (4.47)$$

Далее, в полной аналогии с ходом вычислений по формулам (4.19)—(21.8), получаем, что относительная диэлектрическая восприимчивость равна

$$\varepsilon_r = 1 + np^2 / (3kT\varepsilon_0). \quad (4.48)$$

Наряду с поляризованностью из-за переориентировки постоянных дипольных моментов полярные диэлектрики обладают также поляризованностью, обусловленной индуцированными дипольными моментами, которая описывается формулой (21.8). Поэтому с учетом обоих механизмов поляризации выражение для ε_r полярных газообразных диэлектриков при не слишком большом давлении имеет вид

$$\varepsilon_r = 1 + n [\alpha + p^2 / (3kT\varepsilon_0)]. \quad (4.49)$$

Как видно из (4.17), $\alpha = 10^{-29} \text{ м}^3$. С другой стороны, при комнатной температуре $kT \approx 4 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}$ и поэтому при $p \approx 10^{-29} \text{ Кл} \cdot \text{м}^2 / (3kT\varepsilon_0) \sim 10^{-27} \text{ м}^3$, т. е. вклад в поляризованность от индуцированных дипольных моментов примерно в сто раз меньше, чем

от постоянных, и им можно пренебречь. Однако в принципе современная точность измерений такова, что позволяет разделить вклад в поляризованность от постоянных и индуцированных дипольных моментов. Для этого измеряют ϵ_r в широком интервале температур и пользуются формулой (4.49). Зависимость ϵ_r от $1/T$ на графике является прямой линией. Ее пересечение с осью ординат при $1/T = 0$ дает $\epsilon_r = 1 + \alpha n$. Отсюда по формуле (4.49) вычисляется $\alpha = (\epsilon_r - 1) / n$. После этого по результатам измерения при других значениях $1/T$ с помощью формулы (4.49) можно вычислить постоянный дипольный момент, поскольку все остальные величины в этом уравнении известны.

4.1.6 Сегнетоэлектрики, пьезоэлектрики, электреты. Явления на разломах

До сих пор обсуждались типичные физические параметры однородных и изотропных диэлектриков. В дополнение кратко опишем необычные электрические свойства некоторых диэлектриков, связанные, в первую очередь, со структурными особенностями и анизотропией вещества.

Сегнетоэлектрики – вещества, обладающие в отсутствие электрического поля в некотором диапазоне температур электрической поляризацией, зависящей от внешних условий. Они являются электрическим аналогом ферромагнетиков. Известно несколько сот сегнетоэлектриков, в том числе сегнетокерамика, жидкие кристаллы и полимерные материалы. К сегнетоэлектрикам относятся сегнетова соль ($\text{NaKCl}_4 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$), титанат бария (BaTiO_3), ниобат лития (LiNbO_3).

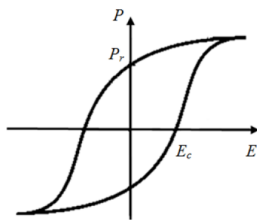


Рис. 4.10

Сегнетоэлектрики характеризуются наличием доменов – областей с монопольной поляризацией в пределах одного домена. Диэлектрическая проницаемость этих материалов достигает нескольких тысяч, и зависит от предыстории. В сегнетоэлектрических диэлектриках, помещенных в электрическое поле, возникает остаточная электрическая поляризация (эффект памяти). Петля гистерезиса, представленная на рис. 4.10, характеризуется двумя величинами: остаточной поляризацией P_r , имеющейся даже при нулевом поле E , и коэрцитивным полем E_c , при котором вектор поляризации изменяет направление на обратное.

Пьезоэлектрики – анизотропные кристаллические материалы (диэлектрики и полупроводники), в которых при механических деформациях возникает электрическая поляризация (пьезоэффект). Они также деформируются под влиянием внешнего электрического поля (обратный пьезоэффект). Типичным примером пьезоэлектрика является кварц SiO_2 в некоторых модификациях. Эффект возникает благодаря тому, что при деформации происходит смещение ионов в кристаллической решетке и деформация электронных орбит. Это приводит к возникновению ненулевого вектора поляризации в некоторых кристаллических решетках.

Электреты – материалы, длительно сохраняющие поляризованное состояние после снятия внешнего поля. Являются электрическим аналогом магнитов. Так некоторые органические смолы, застывая в сильном электрическом поле, сохраняют застывшей поляризацию молекул.

Рассмотренные материалы и их свойства широко применяются в технике. Однако при использовании сегнетоэлектриков и электретов может возникнуть проблема экранировки. В воздухе или другой окружающей среде могут найтись свободные ионы, которые перераспределяются так, что нейтрализуют их вектор поляризации. В таких случаях необходима специальная очистка материала.

В заключение несколько слов о явлениях на разломах – о свойстве свежееобразованной поверхности испускать электроны и фотоны высокой энергии. В научных экспериментах удалось зарегистрировать при разломах горных пород электроны, вылетающие со скоро-

стями, близкими к скорости света. Подобные явления, даже не разбивая гранитных глыб, может наблюдать каждый. Например, в темноте нетрудно заметить свечение при разламывании кусочков сахара, при растирании в ступе сахарного песка, при разрыве бумаги, при быстром разматывании рулона липкой ленты и даже при сходе ночных лавин в горах.

Такие эффекты могут быть связаны с электроотрицательностью атомов на одной из границ разлома, приводящей к захвату электронов от атомов другой границы, а также с пьезоэффектом. Явления на разломах имеют большое практическое значение. В частности, оптические и электрические эффекты вблизи геологических разломов в ряде случаев позволяют заблаговременно предсказывать землетрясения и другие стихийные бедствия.

Глава 5

Постоянный электрический ток

5.1 Постоянный ток. Законы Ома и Джоуля-Ленца

5.1.1 Постоянный ток. Виды тока. Сила тока. Плотность тока

Направленное движение электрических зарядов называют электрическим током. Перенос электрического тока чаще осуществляется электронами. Однако в жидкостях, газах и плазме носителями тока нередко являются ионы – как положительные, так и отрицательные. В полупроводниках часто удобно рассматривать перенос тока так называемыми "дырками". сечение проводника в единицу времени:

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (5.1)$$

Ток является *постоянным*, если сила тока не зависит от времени. Для постоянного тока уравнение (5.1) можно проинтегрировать и получить

$$I = \frac{q}{t}. \quad (5.2)$$

Локальной характеристикой тока в данной точке проводника является *плотность тока*:

$$j = \frac{dI}{dS}, \quad (5.3)$$

где dS – элемент сечения проводника. Плотность тока особенно важна в случае, когда плотность тока в разных точках проводника различна.

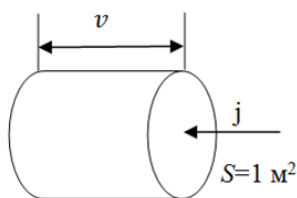


Рис. 5.1

Плотность тока и силу тока можно рассматривать как вектор, направленный по линии движения зарядов в данной точке проводника. Направление тока совпадает с направлением движения положительных носителей тока и противоположно направлению движения отрицательных носителей тока. Плотность тока несложно связать со скоростью направленного движения v и концентрацией носителей заряда n . Из рис. 5.1 видно, что в единицу времени единицу площади сечения проводника пересекут nv носителей заряда – все частицы из объема длиной v , но не больше. Приняв для определенности, что заряд каждого носителя равен элементарному заряду e , получим по определению плотности тока:

$$j = env. \quad (5.4)$$

Отметим, что при обычных температурах скорость направленного движения носителей заряда на порядки меньше скорости хаотического движения.

Единица измерения силы тока – ампер (А). $1 \text{ А} = 1 \text{ Кл/с}$. Иногда силу тока называют просто током. Плотность тока измеряется в амперах на квадратный метр (А/м^2).

5.1.2 Закон Ома в дифференциальной форме

В каждой точке проводника плотность тока является функцией напряженности поля. Получим вид этой функции. Для определенности будем считать носителями тока электроны. Под действием поля электрон приобретает некоторую скорость в направлении, противоположном вектору напряженности E . Однако время от времени он теряет эту направленную скорость, например, в результате столкновений с атомами среды. Ускорение электрона массы m (по модулю) в поле по второму закону Ньютона равно:

$$a = \frac{eE}{m}. \quad (5.5)$$

С другой стороны, ускорение можно выразить через среднюю скорость направленного движения v и среднее время между столкновениями τ :

$$a = \frac{v_{\text{макс}}}{\tau} = \frac{2v}{\tau}. \quad (5.6)$$

Здесь учтено, что при равноускоренном движении средняя скорость равна половине максимальной. Приравнивая выражения, получим, что скорость направленного движения носителей заряда пропорциональна напряженности поля:

$$v = \frac{e\tau E}{2m} = \chi E. \quad (5.7)$$

Здесь выделен коэффициент пропорциональности

$$\chi = \frac{e\tau}{2m}$$

между скоростью направленного (дрейфового) движения электрона и напряженностью поля, называемый *подвижностью* электрона. Так как обычно скорость направленного движения носителей заряда намного меньше скорости хаотического движения, то время столкновения τ определяется средней скоростью хаотического (а не направленного) движения электронов u :

$$\tau = \lambda/u. \quad (5.8)$$

$$v = \frac{\lambda e E}{2mu} = \chi E. \quad (5.9)$$

При этом подвижность электрона определяется выражением

$$\chi = \frac{\lambda e}{2mu}. \quad (5.10)$$

С учетом (5.4) получим связь плотности тока с напряженностью поля – *закон Ома в локальной (дифференциальной) форме*:

$$j = \gamma E = E/\rho, \quad (5.11)$$

где введены понятия *удельной электропроводности* (или *проводимости*) γ и *удельного сопротивления* ρ проводника:

$$\gamma = en\chi = \frac{ne^2\lambda}{2mu} = \frac{1}{\rho}. \quad (5.12)$$

5.1.3 Закон Ома в интегральной форме. Сопротивление

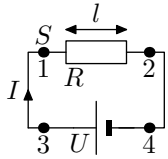


Рис. 5.2

Выведем теперь закон Ома в интегральной форме для участка цепи, не содержащего источник тока. Пусть ток течет по проводнику сечением S и длиной l (рис. 5.2). Умножим обе части уравнения $j = E/\rho$ на площадь S , перейдя от плотности тока к току. Получим выражение для напряженности и свяжем ее в одномерном случае с потенциалом:

$$E = \frac{I\rho}{S} = -\frac{d\varphi}{dl}. \quad (5.13)$$

Получим для потенциала $-d\varphi = \frac{I\rho}{S}dl$ откуда, интегрируя в пределах границ проводника, имеем:

$$\Delta\varphi_{12} = I\frac{\rho l}{S} = IR, \quad (5.14)$$

где $R = \frac{\rho l}{S}$ – сопротивление участка цепи.

Чаще полученный закон Ома для участка цепи в интегральной форме формулируют следующим образом: сила тока в цепи прямо пропорциональна напряжению и обратно пропорциональна сопротивлению (разность потенциалов на участке цепи при постоянном токе называют напряжением U):

$$I = \frac{U}{R}. \quad (5.15)$$

5.1.4 Сторонние силы. Электродвижущая сила. Обобщенный закон Ома

Чтобы постоянный ток протекал по проводнику, необходимо на его концах поддерживать разность потенциалов. Это можно осуществить с помощью источника тока. Рассмотрим электрическую цепь рис. 5.2 Пренебрежем сопротивлением подводящих проводников, так что потенциалы точек 1 и 3 а также точек 2 и 4 попарно равны. На участке 1 – 2 работает закон Ома для участка цепи в интегральной форме $\varphi_1 - \varphi_2 = IR$. Напряженность электрического поля на этом участке отлична от нуля, и оно придает зарядам на этом участке в соответствии с формулой (5.6) направленное движение.

На участке 4 – 3, в источнике тока, положительные заряды вопреки законам электростатики переходят от меньшего потенциала к большему. Такое перемещение проходит под действием , называемых *сторонними* (неэлектростатическими). Эти силы могут иметь, например, химическое происхождение – как это обычно имеет место в батарейках или аккумуляторах. По аналогии с определением разности потенциалов (1.71) *электродвижущей силой* (ЭДС) E источника тока называют отношение работы сторонних сил цепи к заряду:

$$E = \frac{A_{ст}}{q}. \quad (5.16)$$

Работа сторонних сил отлична от нуля только внутри источника тока.

Обобщим теперь закон Ома (5.14) на *неоднородный участок цепи*, который помимо сопротивления, дополнительно включает источник тока с ЭДС E :

$$\Delta\varphi_{12} + E = IR. \quad (5.17)$$

Отсюда имеем закон Ома для неоднородного участка цепи или *обобщенный закон Ома*:

$$I = \frac{\Delta\varphi_{12} + E}{R}. \quad (5.18)$$

Если цепь замкнута, то точки 1 и 2 совпадают, $\Delta\varphi_{12} = 0$, и

$$I = \frac{E}{R}. \quad (5.19)$$

Часто источник тока имеет заметное собственное внутреннее сопротивление r , которое необходимо учитывать наряду с внешним сопротивлением R . Тогда получим закон Ома для замкнутой цепи:

$$I = \frac{E}{R + r}. \quad (5.20)$$

5.1.5 Работа и мощность тока. Закон Джоуля-Ленца в дифференциальной и интегральной формах

Прохождение электрического тока через сопротивление R в цепи требует затрат энергии, поскольку энергия направленного движения носителей заряда постоянно расходуется на взаимодействие со средой, например, на столкновения с молекулами. Эти затраты обычно в конечном счете переходят в тепловую энергию среды. Рассчитаем этот процесс по аналогии с выводом закона Ома в дифференциальной форме. За время между соседними столкновениями каждый электрон приобретет кинетическую энергию

$$T = \frac{mv_{\text{макс}}^2}{2} = \frac{m}{2} (a\tau)^2 = \frac{m}{2} \left(\frac{e\tau E}{m} \right)^2 = \frac{e^2\tau^2}{2m} E^2 \quad (5.21)$$

Поделив это выражение на время τ и умножив на концентрацию свободных электронов n , получим удельную тепловую мощность, выделяющуюся при прохождении тока в единице объема проводника

$$w = \frac{ne^2\tau}{2m} E^2 = \frac{ne^2\lambda}{2mi} E^2 = \gamma E^2 = jE = \frac{E^2}{\rho}. \quad (5.22)$$

Это и есть закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме. В соответствии с ним удельная мощность, выделяющаяся в проводнике при прохождении тока, пропорциональна квадрату напряженности поля.

Перейдем теперь к интегральной форме закона. Пусть ток течет по проводнику сечением S и длиной l . Умножим обе части уравнения $w = \frac{E^2}{\rho}$ на объем проводника Sl . Получим в левой части тепловую мощность W , выделяющуюся при прохождении тока во всем проводнике:

$$W = \frac{(El)^2 S}{\rho l} = \frac{U^2}{R} = UI = I^2 R. \quad (5.23)$$

Это и есть закон Джоуля-Ленца в интегральной форме.

5.1.6 Линейные цепи. Правила Кирхгофа

Формулируются правила расчета линейных цепей.

Изолированная замкнутая цепь. Этот случай представляет собой закон Ома для замкнутой цепи (5.20): *если в изолированной замкнутой цепи имеется один источник сторонних э.д.с., то сила тока в цепи должна быть такой, чтобы суммарное падение напряжения на внешнем сопротивлении и внутреннем сопротивлении источника было равно сторонней э.д.с. источника.* Если имеется несколько источников сторонних э.д.с., то надо взять их сумму со знаками, приняв в качестве положительной э.д.с. некоторого направления.

Чтобы не ошибиться в знаках, удобно поступить следующим образом. Принимаем за положительное направление обхода цепи либо обход по часовой стрелке, либо против часовой. На рис. 5.3 за положительный выбран обход против часовой стрелке. Электродвижущие силы элементов обозначены E_1, E_2, E_3 . В каком направлении течет ток, заранее неизвестно. Поэтому за направление тока выбираем любое, например на рис. 5.3 оно совпадает с положительным направлением обхода.

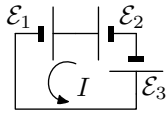


Рис. 5.3

Теперь необходимо условиться о знаках. Знак э. д. с. берется положительным, если при движении по контуру в положительном направлении первым встречается отрицательный полюс источника. Если же первым встречается положительный полюс, то соответствующая э. д. с. будет с отрицательным знаком. Знак силы тока считается положительным, если направление тока совпадает с направлением обхода. В противном случае знак отрицателен. Таким образом, как э. д. с., так и сила тока являются алгебраическими величинами, принимающими как положительные, так и отрицательные значения. Теперь нетрудно обобщить уравнение (5.20) на произвольное число источников сторонних э. д. с. в изолированном замкнутом контуре: *произведение алгебраического значения силы тока на сумму внешних и внутренних сопротивлений всех участков замкнутой цепи равно сумме алгебраических значений сторонних э. д. с. в замкнутом контуре:*

$$\pm I \sum_k R_k = \sum_i \pm E_i \quad (5.24)$$

где \pm перед I и E_i означает, что знак должен быть выбран в соответствии с приведенными выше правилами. Например, для случая, изображенного на рис. 117, уравнение (5.24) имеет вид

$$I(R + r_1 + r_2 + r_3) = E_1 - E_2 + E_3 \quad (5.25)$$

где r_1, r_2, r_3 — внутренние сопротивления источников сторонних э. д. с., R — полное сопротивление всех участков цепи вне источников. Если бы при том же направлении обхода, принятого за положительный, стрелка, изображающая ток I , была ориентирована противоположно, то вместо уравнения (5.25) получилось бы следующее:

$$-I(R + r_1 + r_2 + r_3) = E_1 - E_2 + E_3. \quad (5.26)$$

Уравнения (5.26) надо решать относительно I . Если в конкретном случае I положительно, то ток течет, как указывается стрелкой, если же отрицательно, то в противоположном направлении,

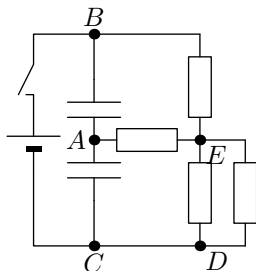


Рис. 5.4

Разветвленные цепи. Во многих практически важных случаях электрические цепи являются более сложными, как, например, на рис. 5.4. Однако в цепь любой сложности входят элементы двух простейших видов:

1. узлов, в которых встречается более чем два проводника (рис. 5.4; точки C и B));
2. замкнутых контуров (рис. 5.4; контуры $ABEDCA$, $CDEAC$, $ABEA$).

Правила Кирхгофа. Правила Кирхгофа служат для составления системы уравнений, из которой находятся силы тока для разветвленной цепи любой сложности. Они являются записью закона Ома (5.24) для каждого из замкнутых контуров и закона сохранения заряда в каждом узле. Правила знаков для сил тока и э.д.с. в каждом из замкнутых контуров такие же, как для изолированного контура [см. (5.24)]. Направление положительного обхода для всех контуров выбирается одинаковым. Закон сохранения заряда в узлах требует, чтобы сумма сил токов, входящих в узел, была равна сумме сил токов, выходящих из него, иначе говоря, сумма алгебраических значений сил токов в узле должна быть равной нулю. При составлении суммы силы токов, изображаемых стрелками с направлением от узла, берутся, например, со знаком минус,

а силы токов, изображаемых стрелками с направлением к узлу, со знаком плюс. Можно, конечно, брать обратные знаки, это не изменит соответствующих уравнений, важно лишь для всех узлов применять одно и то же правило.

Таким образом, правила Кирхгофа гласят:

1) сумма произведений алгебраических значений сил токов на сопротивление соответствующих участков каждого из замкнутых контуров равна сумме алгебраических значений сторонних э.д.с. в каждом замкнутом контуре:

$$\sum_k \pm I_k R_k = \sum_i (\pm) E_i; \quad (5.27)$$

2) сумма алгебраических значений сил токов в каждом узле, равна нулю;

$$\sum_k (\pm) I_k = 0. \quad (5.28)$$

Можно показать, что получающаяся при этом система уравнений для любой разветвленной цепи является полной и позволяет определить все токи.

Эти законы вывел Г. Кирхгоф (1824—1887). Он дал общее решение задачи о разветвленных цепях постоянного тока в 1847 г., хотя сами правила сформулировал в 1845 г.

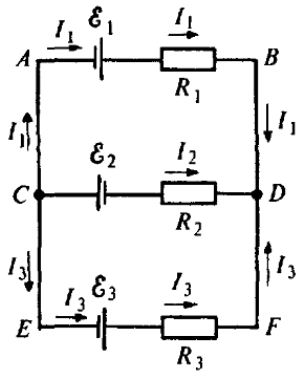


Рис. 5.5

Применим правила Кирхгофа к цепи, изображенной на рис. 6.1.

1. По первому правилу Кирхгофа:

(a) $I_1 r_1 + I_1 R_1 - I_2 R_2 - I_2 r_2 = E_1 + E_2$ (контур $ABDCA$).

(b) $I_2 R_2 + I_2 r_2 - I_3 R_3 - I_3 r_3 = -E_2 - E_3$ (контур $CDFEC$).

(c) $I_1 r_1 + I_1 R_1 - I_3 R_3 - I_3 r_3 = E_1 - E_3$ (контур $ABFEA$).

2. По второму правилу Кирхгофа:

(a) $-I_1 - I_2 - I_3 = 0$ (узел);

(b) $I_1 + I_2 + I_3 = 0$ (узел D).

Здесь r_1, r_2, r_3 — внутренние сопротивления источников сторонних э.д.с. Уравнения для узлов совпадают друг с другом, а из трех уравнений по контурам независимыми являются лишь два. Например, если сложить почленно первых два уравнения, то получается третье. Таким образом, имеется система трех уравнений для трех неизвестных сил тока $I_1 I_2 I_3$. Решив эту систему, найдем силы тока и их истинные направления. Но даже не решая ее, можно сказать: на рис. 6.1 мы наверняка ошиблись в выборе направлений тока, потому что в узлах при выбранных направлениях тока закон сохранения заряда заведомо не может выполняться — в узле должен накапливаться отрицательный заряд, а в узле D — положительный. Но это нас не должно беспокоить, потому что решение автоматически подскажет, какими должны быть направления токов.

Таким образом, пример показывает, что если выписать правила Кирхгофа для всех контуров и всех узлов, то получится больше уравнений, чем необходимо, поскольку не все уравнения независимы. Чтобы не усложнять работы, желательно не выписывать лишних уравнений. Для этого можно руководствоваться такими правилами. Выписывая очередное уравнение для замкнутых контуров, необходимо следить, чтобы оно содержало хотя бы одну величину, не вошедшую в предшествующие уравнения; если все величины уже встречались в предшествующих уравнениях, то это уравнение лишнее. Аналогично поступаем и при выписывании уравнений для узлов. Например, выше в уравнениях по первому правилу Кирхгофа не следовало выписывать уравнение в), поскольку все входящие в

него величины уже содержатся в уравнениях а) и б). В уравнениях по второму правилу Кирхгофа не следовало выписывать уравнение б), поскольку все входящие в него величины уже вошли в уравнение а). Дальнейший контроль правильности выписанной системы уравнений состоит в проверке ее полноты – число уравнений должно быть равным числу неизвестных.

Глава 6

Квазистационарные электрические цепи

6.1 Переходные процессы в цепи с конденсатором

О переходных процессах. Так называют процессы при переходе от одного установившегося в цепи режима к другому. Примером таких процессов является зарядка и разрядка конденсатора, на них мы и остановимся более подробно в этом параграфе.

До сих пор мы рассматривали только постоянные токи. Оказывается, однако, что полученные законы во многих случаях можно применять и к изменяющимся токам. Это касается всех тех случаев, когда изменение тока происходит не слишком быстро. В этих случаях мгновенное значение тока будет практически одно и то же во всех поперечных сечениях цепи. Такие токи и соответствующие им поля называют **квазистационарными** (более точный критерий квазистационарности будет дан при рассмотрении электрических колебаний).

Именно квазистационарные токи можно описывать законами постоянного тока, если только их применять к мгновенным значениям величин.

А теперь обратимся к процессам разрядки и зарядки конденсатора, предполагая токи в этих процессах квазистационарными.

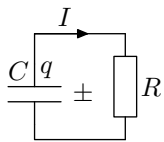


Рис. 6.1

Разрядка конденсатора. Если обкладки заряженного конденсатора емкости C замкнуть через сопротивление R , то через него потечет ток. Пусть I, q, U — мгновенные значения тока, заряда положительной обкладки и разности потенциалов между обкладками (напряжения). Считая ток I положительным, когда он течет от положительной обкладки к отрицательной (рис. 6.1), запишем $I = -dq/dt$. Согласно закону Ома для внешнего участка цепи, содержащего сопротивление R :

$$RI = U.$$

Учитывая, что $I = -dq/dt$ и $U = q/C$, преобразуем предыдущее уравнение к виду

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = 0. \quad (6.1)$$

В этом дифференциальном уравнении переменные разделяются, и после интегрирования мы получим

$$q = q_0 e^{-t/\tau}, \quad (6.2)$$

где q_0 — начальный заряд конденсатора, а τ — постоянная, имеющая размерность времени:

$$\tau = RC. \quad (6.3)$$

Эту постоянную называют временем релаксации. Из (6.2) видно, что τ есть время, за которое заряд конденсатора уменьшается в раз. Продифференцировав (6.2) по времени, найдем закон изменения тока:

$$I = -\frac{dq}{dt} = I_0 e^{-t/\tau} \quad (6.4)$$

где $I_0 = q_0/\tau$ — сила тока в момент $t = 0$.

На рис. 6.2 показан график зависимости $q(t)$ — заряда на конденсаторе от времени. График зависимости $I(t)$ имеет такой же вид.

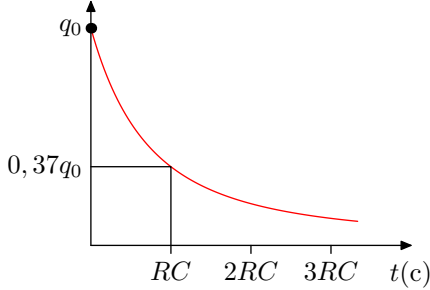


Рис. 6.2

Зарядка конденсатора. Рассмотрим цепь, содержащую последовательно соединенные конденсатор, сопротивление R и источник э.д.с. \mathcal{E} (рис. 6.2). Первоначально конденсатор не заряжен (ключ K разомкнут). В момент $t = 0$ ключ замкнули, и в цепи пошел ток, заряжающий конденсатор. Увеличивающиеся заряды на обкладках конденсатора будут все в большей степени препятствовать прохождению тока, постепенно уменьшая его.

Теперь ток в цепи будем считать положительным, когда он течет в направлении к положительно заряженной обкладке конденсатора: $I = dq/dt$. Применим закон Ома для неоднородного участка цепи к участку $1\mathcal{E}R2$:

$$RI = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E},$$

где под R понимается полное сопротивление этого участка, включая внутреннее сопротивление источника э.д.с. Учитывая, что $I = dq/dt$ и $\varphi_2 - \varphi_1 = U = q/C$, перепишем предыдущее уравнение в виде

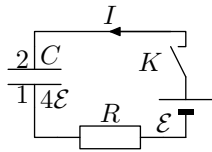


Рис. 6.3

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E} - q/C}{R}.$$

Разделение переменных дает

$$\frac{Rdq}{\mathcal{E} - q/C} = dt.$$

Проинтегрировав это уравнение с учетом начального условия ($q = 0$ при $t = 0$), получим

$$RC \ln \left(1 - \frac{q}{\mathcal{E}C} \right) = -t,$$

откуда

$$q = q_m (1 - e^{-t/\tau}). \quad (6.5)$$

Здесь $q_m = \mathcal{E}C$ — предельное значение заряда на конденсаторе (при $t \rightarrow \infty$), $\tau = RC$. Закон изменения тока со временем

$$I = \frac{dq}{dt} = I_0 e^{-t/\tau}, \quad (6.6)$$

где $I_0 = \mathcal{E}/R$.

Графики зависимостей $q(t)$ и $I(t)$ показаны на рис. 6.4.

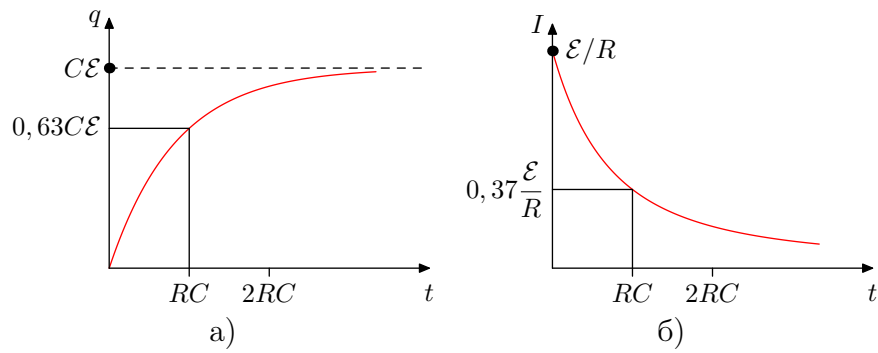


Рис. 6.4.

Глава 7

Электропроводность твердых тел

7.1 Электропроводность металлов

Описываются основные экспериментальные факты, связанные с электропроводимостью металлов, и их теоретическая интерпретация.

Доказательство отсутствия переноса вещества электрическим током в металлах. Еще задолго до открытия электронов было экспериментально показано, что прохождение тока в металлах не связано, в отличие от тока в жидких электролитах, с переносом вещества металла. Опыт состоял в том, что через контакт двух различных металлов, например золота и серебра, в течение времени, исчисляемого многими месяцами, пропускался постоянный электрический ток. После этого исследовался материал вблизи контактов. Было показано, что никакого переноса вещества через границу различных металлов не наблюдается и вещество по различные стороны границы раздела имеет тот же состав, что и до пропускания тока. Эти опыты доказали, что *атомы и молекулы металлов не принимают участия в переносе электрического тока*, но они не ответили на вопрос о природе носителей заряда в металлах.

Опыты Толмена и Стюарта. Прямым доказательством, что *электрический ток в металлах обуславливается движением электронов*, были опыты Толмена и Стюарта, проведенные в 1916 г. Идея этих опытов была высказана Мандельштамом и Папалекси в 1913 г.

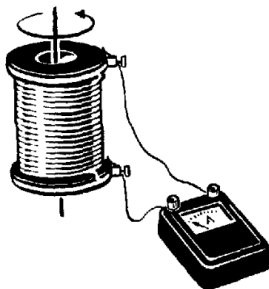


Рис. 7.1

Представим себе проводящую катушку, которая может вращаться вокруг своей оси. Концы катушки с помощью скользящих контактов замкнуты на гальванометр (рис. 7.1). Если находящуюся в быстром вращении катушку резко затормозить, то свободные электроны в проволоке продолжают движение по инерции, в результате чего гальванометр должен зарегистрировать импульс тока.

Обозначим \dot{v} — линейное ускорение катушки при торможении. Оно направлено по касательной к поверхности катушки. При достаточно плотной намотке и тонких проводах можно считать, что ускорение направлено вдоль проводов. При торможении катушки к каждому свободному электрону приложена сила инерции — $m_e \dot{v}$, направленная противоположно ускорению (m_e — масса электрона). Под ее действием электрон ведет себя в металле так, как если бы на него действовало некоторое эффективное электрическое поле:

$$E_{\text{эф}} = -m_e \dot{v} / e. \quad (7.1)$$

Поэтому эффективная электродвижущая сила в катушке, обусловленная инерцией сво-

бодных электронов, равна

$$E_{\text{эф}} = \int_L E_{\text{эф}} dl = - \frac{m_e}{e} \dot{v} \int_L dl = - \frac{m_e}{e} \dot{v} L, \quad (7.2)$$

где L — длина провода на катушке. Все точки провода тормозятся с одинаковым ускорением и поэтому \dot{v} в (7.2) вынесена за знак интеграла.

Обозначая: I — силу тока, протекающего по замкнутой цепи, R — сопротивление всей цепи, включая сопротивление проводов катушки и проводов внешней цепи и гальванометра, запишем закон Ома в виде

$$IR = m_e \dot{v} L / e. \quad (7.3)$$

Количество электричества, протекающее через поперечное сечение проводника в течение времени dt при силе тока I , равно

$$dQ = Idt = - \frac{m_e}{e} \frac{L}{R} \dot{v} dt = - \frac{m_e}{e} \frac{L}{R} dv \quad (7.4)$$

Поэтому в течение времени торможения катушки от начальной линейной скорости v_0 до полной остановки через гальванометр пройдет количество электричества

$$Q = \int dQ = - \frac{m_e}{e} \frac{L}{R} \int_{v_0}^0 dv = \frac{m_e}{e} \frac{L}{R} v_0. \quad (7.5)$$

Значение Q находится по показаниям гальванометра, а значения L , R , v_0 известны. Поэтому можно найти как знак, так и абсолютное значение e/m_e . Эксперименты показали, что e/m_e соответствует отношению заряда электрона к его массе. Тем самым доказано, что наблюдаемый с помощью гальванометра ток обусловлен движением электронов.

О зонной теории. В основе квантовой теории электропроводности твердых тел лежит зонная теория, базирующаяся на анализе энергетического спектра электронов (см. § 2). Электрический спектр разбивается на зоны, разделенные запрещенными промежутками. Если в верхней зоне, где еще имеются электроны, ими заполнены не все квантовые состояния, т. е. в пределах зоны имеется возможность для перераспределения энергии и импульсов электронов, то соответствующее вещество является проводником электрического тока. Зона при этом называется зоной проводимости, а соответствующее вещество является проводником электрического тока с электронным типом проводимости. Если в зоне проводимости много электронов и свободных квантовых состояний, то электропроводимость достаточно велика. Только электроны в зоне проводимости являются носителями зарядов, осуществляющими электрический ток. Их движение подчиняется квантовым законам. Число этих электронов составляет лишь небольшую часть от общего числа электронов. Благодаря этому устраняются трудности классической теории электропроводимости (см. § 27).

Зависимость сопротивления от температуры. Не только в металлах главный вклад в электропроводимость вносит движение электронов. Например, в полупроводниках с электронным типом электропроводимости основной вклад в перенос электрического заряда также вносится движением электронов. Одним из наиболее характерных различий электропроводимости в этих двух случаях является характер зависимости удельной проводимости от температуры.

Эксперимент показывает, что у металлических проводников удельное сопротивление растет с повышением температуры, т. е. удельная проводимость уменьшается. При

не слишком низкой температуре зависимость проводимости от температуры имеет вид $\gamma \sim \frac{1}{T}$.

Однако у некоторых веществ, например стекол, полупроводников, электролитов и т. д., проводимость увеличивается с температурой. Хотя механизмы возрастания проводимости различны, они сводятся в конечном счете к увеличению числа носителей электрических зарядов, благодаря движению которых осуществляется ток. В металлах число носителей, т. е. свободных электронов, практически не зависит от температуры и сопротивления току, определяется лишь их способностью образовывать упорядоченное движение под действием электрического поля, т. е. их подвижностью. А она с увеличением температуры уменьшается.

Эффект Холла. На заряды, движением которых обуславливается ток, действует сила Ампера. Плотность силы Ампера может быть записана в виде

$$\vec{f} = \vec{j} \times \vec{B} = ne\vec{v}_d \times \vec{B}, \quad (7.6)$$

где n , e — концентрация и заряд, движение которого обуславливает ток, \vec{v}_d — скорость дрейфа заряда.

Под действием силы с плотностью \vec{f} заряды в проводнике при наличии магнитного поля, индукция которого перпендикулярна плотности тока \vec{j} , стремятся сместиться в направлении силы (рис. 7.2, а). В результате на соответствующей части поверхности проводника образуется избыток зарядов того же знака, что и знак зарядов, осуществляющих ток. Поэтому если ток обуславливается движением положительных зарядов, то создается распределение поверхностной плотности зарядов, изображенное на рис. 7.2, б, а при движении отрицательных — на рис. 7.2, в. Между противоположными сторонами проводника появляется разность потенциалов и такое электрическое поле, напряженность E которого нейтрализует действие плотности силы (7.6). Направление напряженности зависит от знака зарядов, осуществляющих ток, а модуль определяется теми факторами, от которых зависит плотность силы (7.6). Возникновение разности потенциалов в проводнике с током в магнитном поле называется **эффектом Холла**. Он был открыт в 1879 г.

Индукция \vec{B} поля и скорость v_d зарядов взаимно перпендикулярны. Отношение плотности силы (7.6) к заряду аналогично (7.1) может рассматриваться как эффективная напряженность электрического поля, называемого **полем Холла**:

$$E_{\text{эф}} = v_d B \quad (7.7)$$

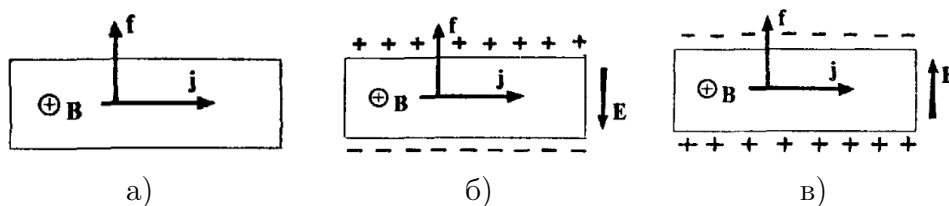


Рис. 7.2

Следовательно, между поверхностями проводника создается разность потенциалов (рис. 7.2,б)

$$U = \int_0^d v_d B dx = v_d B d, \quad (7.8)$$

где d — толщина проводника. Принимая во внимание, что $j = nev_d$, перепишем (7.8) в виде

$$U = \frac{djB}{(ne)} = RjBd, \quad (7.9)$$

где $R = 1/(ne)$ — **постоянная Холла**. Разность потенциалов может быть измерена. Остальные величины, за исключением концентрации зарядов и их знака, известны. По знаку разности потенциалов можно определить знак заряда носителей, движение которых осуществляет ток, а по разности потенциалов — их концентрацию.

Заметим, что формулы (7.9) и $R = 1/(ne)$ совпадают с соответствующими формулами более полной теории эффекта Холла, когда учитывается распределение электронов по скоростям, статистические характеристики их столкновений и т. д. Однако расчеты при этом оказываются очень громоздкими и здесь не приводятся.

Результаты измерений показали, что в металлах ток осуществляется движением отрицательных зарядов. Концентрация носителей примерно равна концентрации атомов, т. е. один заряд, участвующий в образовании тока, приходится примерно на один атом металла, хотя это число и изменяется в определенных пределах. Носителями зарядов, осуществляющих ток в металлах, являются электроны. Сказанное означает, что в металлах на один атом приходится в среднем около одного свободного электрона. Например, на один атом серебра приходится 0,7 электронов; меди — 0,8; золота — 0,9, а алюминия — около двух электронов. Напомним, что у металлов обычно концентрация атомов, а следовательно, и свободных электронов близка к $n \sim 10^{28} \text{ м}^{-3}$

Исследование эффекта Холла в других случаях показало, что он не всегда обусловлен движением отрицательных зарядов. Когда знак разности потенциалов в эффекте Холла соответствует движению положительных зарядов, то эффект называется аномальным.

Эффект Холла является одним из гальваномагнитных явлений. Под этим термином объединяются явления, возникающие в проводнике с током, находящимся в магнитном поле. Физическая сущность всех этих явлений состоит в том, что электропроводимость проводника во внешнем магнитном поле является не скаляром, а тензором. Напряженность поперечного электрического поля, называемого холловским, складывается с напряженностью электрического поля, которое обуславливает существование тока при отсутствии магнитного поля. В результате этого напряженность электрического поля образует с плотностью тока некоторый угол — **угол Холла**. Значит, направления плотности тока и напряженности электрического поля не совпадают. Эти величины связаны тензорной формулой

$$j_i = \sum_k \gamma_{ik} E_k$$

в которой γ_{ik} — тензор электропроводимости. В анизотропных веществах проводимость описывается тензором электропроводимости также и при отсутствии внешнего магнитного поля.

Магнетосопротивление. Другим важным гальваномагнитным явлением является изменение сопротивления проводника, помещенного в поперечное магнитное поле (*эффект магнетосопротивления*). Как показывает опыт, относительное изменение электропроводимости $\Delta\gamma/\gamma$ при не очень сильных полях выражается формулой

$$\Delta\gamma/\gamma = -\kappa_{\perp} B^2,$$

где κ_{\perp} — коэффициент поперечного магнетосопротивления, зависящий от свойств материала; B — индукция магнитного поля.

Это явление — следствие тензорного характера электропроводимости проводника, помещенного в магнитное поле. В результате возникает компонента напряженности электрического поля, коллинеарная току, что и вызывает изменение его силы, проявляющееся в изменении сопротивления.

Подвижность электронов. Закон Ома $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ может быть записан в виде

$$nev_d = \gamma E. \quad (7.10)$$

Подвижностью b электронов называется отношение скорости дрейфа к напряженности электрического поля:

$$b = v_d/E. \quad (7.11)$$

Принимая во внимание (7.10), получаем

$$b = \gamma/(ne). \quad (7.12)$$

Удельная проводимость металла известна, а ne может быть найдена из эффекта Холла, т. е. измерение эффекта Холла позволяет найти подвижность электронов в проводнике. В металлах подвижность электронов имеет порядок

$$b \sim 10^{-4} - 10^{-3} \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с}). \quad (7.13)$$

Таким образом, скорость дрейфа электронов в металлах очень мала по сравнению с обычными скоростями движения микрочастиц. Большая удельная проводимость металлов обусловлена главным образом большой концентрацией носителей заряда ($n \sim 10^{28} \text{ м}^{-3}$), а не их большой подвижностью [см. (31 13)]:

$$\gamma = enb \sim 10^{-19} \cdot 10^{28} \cdot 10^{-3} \text{ См/м} = 10^6 \text{ См/м}.$$

У диэлектриков большинство электронов жестко привязано к атомам и очень мало свободных носителей заряда. Поэтому, хотя подвижность этих носителей заряда не сильно отличается от подвижности свободных электронов в металлах, удельная проводимость диэлектриков очень мала. Концентрация носителей в полупроводниках изменяется в широких пределах от 10^{19} до 10^{25} м^{-3} , а подвижности заключены примерно от 10 до $10^{-4} \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$, т.е. велики. Благодаря таким широким пределам изменения концентрации носителей и их подвижностей удельная проводимость полупроводников изменяется в широких пределах, на много порядков величин. Однако не удается получить у полупроводников столь же большую проводимость, как у металлов, сохранив, конечно, при этом характерную для полупроводников зависимость проводимости от температуры (увеличение проводимости с температурой).

Сверхпроводимость. В 1911 г. К. Оннес обнаружил, что при $T = 4,2 \text{ К}$ ртуть, по видимому, полностью теряет сопротивление электрическому току. Уменьшение сопротивления происходит очень резко в интервале нескольких сотых градуса. В дальнейшем потеря сопротивления наблюдалась и у других чистых веществ и у многих сплавов. Само явление получило название сверхпроводимости. Температуры перехода в сверхпроводящее состояние различны, но всегда очень низки.

Критическая температура. Возбудив электрический ток в кольце из сверхпроводника с помощью электромагнитной индукции, можно наблюдать, что его сила в течение нескольких лет не уменьшается. Это позволяет найти верхний предел удельного сопротивления сверхпроводников (менее $10^{-25} \text{ Ом} \cdot \text{м}$). Это на много порядков меньше, чем, например, удельное сопротивление меди при низкой температуре ($10^{-12} \text{ Ом} \cdot \text{м}$). Поэтому принимается, что электрическое сопротивление сверхпроводников равно нулю. Сопротивление до перехода в сверхпроводящее состояние бывает самым различным. Многие из сверхпроводников при комнатной температуре имеют довольно высокое сопротивление. Переход в сверхпроводящее состояние совершается всегда очень резко. У чистых

монокристаллов он занимает интервал температур меньший, чем одна тысячная градуса. Сверхпроводимостью среди чистых веществ обладают алюминий, кадмий, цинк, индий, галлий. Свойство сверхпроводимости зависит от структуры кристаллической решетки. Например, белое олово является сверхпроводником, а серое — нет; ртуть обладает свойством сверхпроводимости только в α -фазе.

Глава 8

Электрический ток в вакууме

Обсуждаются основные закономерности термоэлектронной эмиссии и их проявление при прохождении тока между электродами в вакууме.

Термоэлектронная эмиссия. В вакууме не может существовать электрический ток, если в нем нет носителей электрических зарядов. Если же в нем имеются электроны, то их движение обуславливает возникновение тока, называемого током в вакууме.

В металле имеется электронный газ. В условиях термодинамического равновесия распределение электронов по энергетическим уровням определяется статистикой Ферми — Дирака и дается формулой

$$\frac{n_i}{g_i} = \frac{1}{\exp[\beta(E_i - \mu)] + 1}, \quad (8.1)$$

где $\beta = 1/(kT)$; n_i — число электронов, имеющих энергию E_i ; g_i — число квантовых состояний, соответствующих энергии E_i ; μ — энергия Ферми при температуре, которая при $T \rightarrow 0$ К стремится к энергии Ферми μ_0 при $T = 0$ в соответствии с формулой

$$\mu = \mu_0 \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\mu_0} \right)^2 + \dots \right] \quad (8.2)$$

Принимая во внимание, что во всех практически интересных случаях $\mu_0 \gg kT$, можно в (8.1) величину μ считать равной μ_0 .

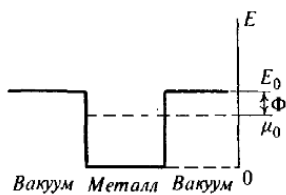


Рис. 8.1

Пусть E_0 — энергия покоящегося электрона вблизи поверхности вне металла (рис. 8.1). Формула (8.1) позволяет вычислить вероятность того, что электрон имеет энергию E_0 , если вместо E_i , подставить в нее E_0 . Эта вероятность не равна нулю и тем больше, чем выше температура (т. е. чем меньше β). Таким образом, *вблизи поверхности металла имеется электронное облако, которое находится в равновесии с электронным газом внутри металла.* Это равновесие динамическое: электроны внутри металла, обладающие достаточно большой кинетической энергией, преодолевают силы,

удерживающие их внутри металла, и выходят за его пределы; электроны вблизи металла при соответствующих направлениях их скоростей и местоположения захватываются силами, удерживающими электроны внутри металла. Таким образом, в условиях динамического равновесия сквозь поверхность металла протекают противоположно направленные токи, силы которых равны по модулю. Суммарная сила тока сквозь поверхность равна нулю. *Явление образования электронного облака вблизи поверхности металла из-за теплового движения свободных электронов называется термоэлектронной эмиссией.*

При 0 К никакой термоэлектронной эмиссии не наблюдается, т. е. электронное облако вблизи поверхности металла отсутствует.

Электроны с кинетической энергией W_k вблизи поверхности металла имеют полную энергию $E_i = W_k + E_0$ и формула (8.1) принимает для них следующий вид:

$$\frac{n}{g} \Big|_{W_k} = \frac{1}{\exp[\beta(W_k + \varphi)] + 1} \quad (8.3)$$

где $\varphi = E_0 - \mu$ — работа выхода электронов из металла. Из формулы (8.3) видно, что плотность электронного облака вблизи поверхности металла сильно зависит от работы выхода Φ и резко уменьшается с ее увеличением.

Если вблизи поверхности металла существует электрическое поле, то электроны облака приходят в движение и образуется электрический ток, называемый термоэлектронным. Таким образом, если в вакууме имеются две металлические пластины, между которыми приложена разность потенциалов, то между ними возникает термоэлектронный ток. Очевидно, что *сила тока должна расти с увеличением разности потенциалов. Существует максимальная сила тока, когда все электроны, попадающие через поверхность катода в электронное облако, увлекаются внешним электрическим полем к аноду и никакого обратного тока электронов через поверхность внутрь катода не существует.*

Эта максимальная сила тока называется **силой тока насыщения**: при дальнейшем увеличении разности потенциалов между анодом и катодом сила тока не изменяется, поскольку все электроны, поставляемые в результате термоэлектронной эмиссии из катода, задействованы для образования электрического тока и других носителей заряда для дальнейшего увеличения силы тока нет.

Для металлов φ составляет несколько электрон-вольт. Энергия кТ даже при температуре в тысячи кельвинов составляет доли электрон-вольта. Следовательно, $\beta\varphi \gg 1$ и $\exp[\beta(W_k + \varphi)] \gg 1$. Поэтому в (8.3) можно в знаменателе пренебречь единицей по сравнению с $\exp[\beta(W_k + \varphi)]$ и записать эту формулу в виде

$$\frac{n}{g} \Big|_{W_k} \approx e^{-\varphi/(kT)} e^{-W_k/(kT)} \quad (8.4)$$

Таким образом, сила тока насыщения очень сильно зависит от работы выхода и температуры, поскольку эти величины входят в экспоненту. Для чистых металлов значительный ток может быть получен лишь при температуре порядка 2000, т. е. *в качестве катодов необходимо использовать металлы с высокой температурой плавления. Одновременно желательно, чтобы их работа выхода была как можно меньше.* Например, чистый вольфрам, работа выхода которого 4,5 эВ, должен эксплуатироваться при температуре 2500. Для уменьшения рабочей температуры катода и понижения работы выхода используются оксидные катоды, когда на подложку (керн) с помощью соответствующих технологических процессов наносится слой окислов щелочноземельных металлов (например, BaO , SrO и др.). Затем катод активируется при пропускании через него термоионного тока при температуре катода около 1300. В результате образуется моноатомный слой щелочноземельных атомов, значительно понижающий работу выхода. Например, бариево-стронциевые оксидные катоды имеют работу выхода около 1,8 эВ, благодаря чему значительные токи удается получить уже при температуре около 1100. При этой температуре достигается плотность тока порядка $10^4 \text{ A} \cdot \text{м}^{-2}$. Слой бариево-стронциевого оксида наносится обычно на никелевую трубку, внутри которой в качестве нагревателя используется вольфрамовая нить. Такая конструкция имеет дополнительное преимущество по сравнению с использованием нагретой вольфрамовой нити в качестве катода, поскольку в последнем случае вдоль нити возникает значительное падение потенциала и ее поверхность не будет эквипотенциальной. В оксидном катоде слой окислов является эквипотенциальной поверхностью, что улучшает весьма существенно условия работы катода в целом.

Характеристики электронного облака. Облако электронов вблизи поверхности металла описывается формулой (8.4). Число квантовых состояний в элементе фазового объема $dx dy dz dp_x dp_y dp_z$

$$g = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} dx dy dz dp_x dp_y dp_z. \quad (8.5)$$

Поэтому число электронов, заключенных в элементе фазового объема $dx dy dz dp_x dp_y dp_z$, представляется в виде

$$dn = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} e^{-\varphi/(kT)} e^{-p^2/(2m_e kT)} dx dy dz dp_x dp_y dp_z, \quad (8.6)$$

где $W_k = p^2/(2m_e)$.

Интегрирование выражения (8.6) по $dx dy dz$ дает в качестве множителя объем V . Поэтому число электронов в объеме V , импульсы которых заключены в элементе объема $dp_x dp_y dp_z$, вблизи импульса $p_x p_y p_z$ равно

$$dn_p = [2V/(2\pi\hbar)^3] \exp[-\varphi/(kT)] \exp[-p^2/(2m_e kT)] dp_x dp_y dp_z, \quad (8.7)$$

где $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$. Отсюда для концентрации электронного облака вблизи поверхности металла получаем выражение

$$\begin{aligned} n'_0 &= \frac{1}{V} \int dn_p = \left[\frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \right] \exp\left(-\frac{\varphi}{kT}\right) \iiint_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{p^2}{2m_e kT}\right) dp_x dp_y dp_z = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{2\pi m_e kT}{\hbar^2} \right)^3 / 2 \exp\left(-\frac{\varphi}{kT}\right) \end{aligned} \quad (8.8)$$

Средняя кинетическая энергия электронов

$$\langle W_k \rangle = \left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle = \frac{\int [p^2/(2m_e)] dn_p}{\int dn_p} = \frac{3}{2} kT \quad (8.9)$$

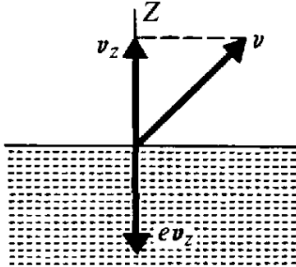


Рис. 8.2

Плотность тока насыщения. Направим ось Z прямоугольной декартовой системы координат нормально к поверхности металла (рис. 8.2). Электроны дают вклад в плотность тока насыщения компонентой v_z скорости по оси Z . Вклад в плотность тока от одного электрона равен $ev_z = ep_z/m_e$. Следовательно, **плотность тока насыщения** определяется формулой

$$\begin{aligned} j_{\text{нас}} &= \frac{e}{m_e} \int_{p_z > 0} p_z dn_p = \left[\frac{2e}{m_e (2\pi\hbar)^3} \right] \exp\left(-\frac{\varphi}{kT}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{p_x^2}{2m_e kT}\right) dp_x \cdot \\ &\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{p_y^2}{2m_e kT}\right) dp_y \times \int_0^{\infty} p_z \exp\left(-\frac{p_z^2}{2m_e kT}\right) dp_z = \\ &= \frac{em_e k^2}{2\pi^2 \hbar^3} T^2 \exp\left(-\frac{\varphi}{kT}\right) \end{aligned} \quad (8.10)$$

или

$$j_{\text{нас}} = AT^2 \exp[-\varphi/(kT)], \quad (8.11)$$

где постоянная

$$A = \frac{em_e k^2}{(2\pi^2 \hbar^3)} = 1,2 \cdot 10^6 \cdot \text{М}^{-2} \cdot \text{К}^{-2}. \quad (8.12)$$

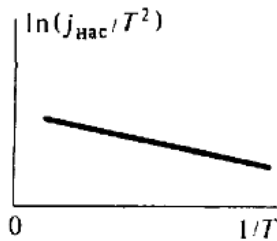


Рис. 8.3

На графике зависимость $\ln(j_{\text{нас}}/T^2)$ от $1/T$ по формуле (8.13) выражается прямой линией (рис. 8.3). Эксперимент подтверждает такую зависимость с учетом небольшого изменения φ , которое обусловлено уменьшением μ с температурой [см. (8.2)]. По углу наклона прямой в соответствии с формулой (8.13) определяется работа выхода φ . По пересечению прямой с осью ординат вычисляется $\ln A$. Величина A по формуле (8.12) должна быть универсальной постоянной, одинаковой для всех металлов. Это заключение не подтверждается экспериментом. Имеется некоторое различие в A для различных металлов. Например, для меди $A = 1,1 \cdot 10^6 \text{ A} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{K}^{-2}$, для никеля $A = 1,2 \cdot 10^6 \text{ A} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{K}^{-2}$, для платины $A = 0,3 \cdot 10^6 \text{ A} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{K}^{-2}$. Это изменение A обусловлено поверхностными эффектами. Кроме того, у кристалла плотность тока насыщения несколько различается для разных граней.

Равенство (8.11) называется **формулой Ричардсона — Дешмана**. Для экспериментальной проверки эту формулу удобно представить в виде

$$\ln(j_{\text{нас}}/T^2) = \ln A - \varphi/kT. \quad (8.13)$$

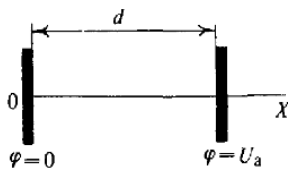


Рис. 8.4

Закон трех вторых. Рассмотрим зависимость силы тока, протекающего в вакууме между электродами, от приложенной разности потенциалов. Электроды будем считать плоскими, а ось X направим нормально поверхности электродов (рис. 8.4). Потенциал катода примем за нуль ($\varphi_k = 0$), а потенциал анода обозначим U .

Главным физическим фактором, влияющим на движение электронов между катодом и анодом, является объемный заряд: силы взаимодействия с ним затрудняют движение электронов от катода к аноду под действием приложенной разности потенциалов.

Допустим, что площади пластин катода и анода достаточно велики и при расчете плотности тока вблизи линии, соединяющей центры электродов, можно пренебречь изменением величин в направлениях, перпендикулярных этой линии, т. е. рассматривать одномерную задачу, когда все величины зависят только от координаты x . Уравнение Пуассона для потенциала имеет вид

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{\rho_e}{\varepsilon_0} = \frac{n|e|}{\varepsilon_0} \quad (8.14)$$

где n — концентрация электронов. Закон сохранения энергии для дрейфа электронов имеет вид

$$1/2 m_e v_d^2 = |e| \varphi, \quad (8.15)$$

где v_d — скорость дрейфа в точке с потенциалом φ . Объемная плотность тока в этой точке

$$|j| = n |e| v_d. \quad (8.16)$$

Все величины в правой части (8.16) являются положительными. Вычислив скорость v_d из (8.15) и подставив полученное уравнение в (8.16), находим

$$n |e| = |j| [m_e / (2|e|\varphi)]^{1/2}. \quad (8.17)$$

С учетом (8.17) уравнение (8.14) преобразуется к виду

$$d^2\varphi/dx^2 = \alpha\sqrt{\varphi}, \quad (8.18)$$

где $\alpha = (|j|/\varepsilon_0) \sqrt{m_e/(2|e|)}$. Умножая обе части (8.18) на $(d\varphi/dx) = \dot{\varphi}$, получаем

$$\ddot{\varphi}\dot{\varphi} = \alpha\dot{\varphi}/\sqrt{\varphi} \quad (8.19)$$

где точками обозначено дифференцирование по t . Учитывая, что

$$\ddot{\varphi}\dot{\varphi} = \frac{1}{2} \frac{d(\dot{\varphi}^2)}{dx}, \quad \dot{\varphi}/\sqrt{\varphi} = 2 \frac{d(\sqrt{\varphi})}{dx}, \quad (8.20)$$

запишем (8.19) так:

$$d(\dot{\varphi}^2) = 4\alpha d(\sqrt{\varphi}) \quad (8.21)$$

Теперь можно проинтегрировать обе части (8.21) по x в пределах от 0 до того значения x , при котором потенциал равен φ . Тогда

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 - \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_0^2 = 4\alpha\sqrt{\varphi}, \quad (8.22)$$

где учтено, что $\varphi(0) = 0$. Производная $(d\varphi/dx)_0$ характеризует напряженность электрического поля у катода, α — пропорциональна j . Поэтому объемная плотность тока j достигает максимума при $(d\varphi/dx)_0 = 0$ и тогда [см. (8.22)]

$$\frac{d\varphi}{dx} = 2\sqrt{\alpha}\varphi^{1/4}, \quad (8.23)$$

или

$$\frac{d\varphi}{\varphi^{1/4}} = 2\sqrt{\alpha}dx \quad (8.24)$$

Интегрируя обе части (8.24) в пределах от $x=0, \varphi=0$ до $x=d, \varphi=U$, получаем

$$U^{3/4} = \frac{3}{2}d\sqrt{\alpha}. \quad (8.25)$$

Возводя обе части (8.25) в квадрат и учитывая, что

$$\alpha = (|j|/\varepsilon_0) \sqrt{m_e/(2|e|)}, \quad (8.26)$$

получаем

$$|j| = \beta U^{3/2}, \quad (8.27)$$

где

$$\beta = \frac{4\varepsilon_0}{9d^2} \left(\frac{2|e|}{m_e}\right)^{1/2} \quad (8.28)$$

Расчет аналогичной задачи для коаксиальных цилиндрических электродов, для концентрических сферических электродов приводит к такому же виду зависимости объемной плотности тока от разности потенциалов в степени три вторых. Впрочем, такую зависимость можно было бы ожидать и без расчетов с помощью анализа размерностей. Коэффициент β во всех случаях имеет одинаковую размерность, как это следует из уравнения Пуассона, записанного в различных системах координат.

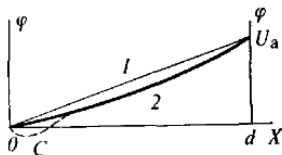


Рис. 8.5

При отсутствии объемного заряда между катодом и анодом изменение потенциала происходит по линейному закону (рис. 9.1; прямая 1). Объемный заряд изменяет этот ход. Ясно, что вблизи катода объемный заряд уменьшает силы, действующие на электроны при отсутствии объемного заряда, а вблизи анода увеличивает. Поэтому изменение потенциала между электродами с учетом объемного заряда характеризуется кривой 2).

Вывод формулы (8.27) приведен в предположении, что электроны покидают катод с нулевой скоростью. Однако они могут покидать катод с конечной скоростью эмиссии. В этом случае ток будет существовать даже в том случае, если вблизи катода имеется небольшое обратное поле. Следовательно, объемная плотность заряда может измениться до таких значений, при которых потенциал вблизи катода уменьшится до отрицательных значений. В результате этого ход потенциала вблизи катода будет характеризоваться пунктирной кривой C .

При достаточно большой разности потенциалов наблюдается отклонение от закона трех вторых. Оно наступает тогда, когда объемная плотность заряда уменьшается настолько, что поддержание нулевого электрического поля у поверхности катода оказывается невозможным и, следовательно, будет невыполнимым условие $(d\varphi/dx)_0 = 0$, при котором был введен закон трех вторых. При дальнейшем увеличении напряженности объемная плотность тока становится независимой от разности потенциалов (ток насыщения).

Закон трех вторых здесь рассмотрен в качестве примера нелинейного соотношения между силой тока и напряжением. Он не имеет универсального характера и даже в приведенном случае справедлив лишь в сравнительно узком интервале напряжений и токов. Нелинейность вольтамперной характеристики является наиболее важной особенностью многих элементов радио- и электротехнических схем, включая элементы твердотельной электроники.

Глава 9

Постоянное магнитное поле в вакууме

9.1 Магнитное поле в вакууме

Магнитные явления обнаружены и изучались издавна. Сначала люди обнаружили естественные магниты, и их взаимодействие между собой и с магнитным полем Земли. Уже несколько столетий магнитный компас применяется для навигации, помогая ориентироваться на местности и, особенно в океанических просторах. Для описания магнитных явлений было введено – по аналогии с электрическим полем – понятие магнитного поля. Прорыв в экспериментальном исследовании магнитных полей произошел в XIX веке. Было установлено, что движущиеся заряды создают магнитное поле, а магнитное поле действует на движущиеся заряды. Начало исследований электромагнитных явлений было положено опытом датского физика Х. Эрстеда (1820).

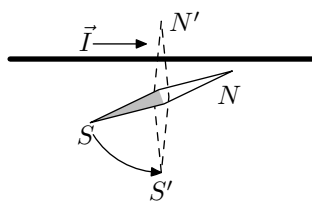


Рис. 9.1

При пропускании по прямолинейному горизонтальному проводнику постоянного тока I находящаяся под ним магнитная стрелка поворачивается вокруг своей вертикальной оси, стремясь расположиться перпендикулярно проводнику с током (рис. 9.1). Ось стрелки тем точнее совпадает с этим направлением, чем больше сила тока и чем слабее влияние магнитного поля Земли. Эрстед обнаружил, что направление поворота северного полюса стрелки под действием электрического тока изменяется

на противоположное при изменении направления тока в проводнике. Французский физик Андре Мари Ампер в опытах в 1820 г. детально изучил взаимодействие двух параллельных токов. Ампер догадался, что этот процесс аналогичен отклонению стрелки компаса, просто в компасе все определяется микротоками в атомном масштабе.

Происхождение магнитного поля Земли предположительно связывают с протеканием токов в жидком металлическом ядре планеты. Токи создают магнитные поля, магнитные поля создают токи, причем в условиях естественной случайной асимметрии движений этот процесс в соответствии с теорией гидромагнитного динамо может оказаться при высоких температурах ядра (порядка нескольких тысяч кельвинов) самоподдерживающимся на достаточно интенсивном уровне.

9.1.1 Сила Лоренца. Поле B

Сила Лоренца. Опыт показывает, что сила \mathbf{F} , действующая на точечный заряд q , зависит в общем случае не только от положения этого заряда, но и от его скорости \mathbf{v} . Соответственно этому силу \mathbf{F} разделяют на две составляющие — электрическую \vec{F}_e (она не зависит от движения заряда) и магнитную \vec{F}_m (она зависит от скорости заряда). В любой точке пространства направление и модуль магнитной силы зависят от скорости \mathbf{v} заряда, причем эта сила всегда перпендикулярна вектору \mathbf{v} ; кроме того, в любом месте

магнитная сила перпендикулярна определенному в данном месте направлению и, наконец, ее модуль пропорционален той составляющей скорости, которая перпендикулярна этому выделенному направлению.

Все эти свойства магнитной силы можно описать, если ввести понятие **магнитного поля**. Характеризуя это поле вектором \mathbf{B} , определяющим выделенное в каждой точке пространства направление, запишем выражение для магнитной силы в виде

$$\vec{F}_M = q [\vec{v}\vec{B}]. \quad (9.1)$$

Тогда полная электромагнитная сила, действующая на заряд q :

$$\vec{F} = q\vec{E} + q [\vec{v}\vec{B}]. \quad (9.2)$$

Ее называют *силой Лоренца*. Последнее выражение является *универсальным*: оно справедливо как для постоянных, так и для переменных электрических и магнитных полей. Заметим, что \mathbf{v} — это скорость заряда относительно интересующей нас системы отсчета. По действию силы Лоренца на заряд можно в принципе определить модули и направления векторов \mathbf{E} и \mathbf{B} . Поэтому выражение для силы Лоренца можно рассматривать как определение электрического и магнитного полей (в случае электрического поля мы так и поступили)¹. Следует подчеркнуть, что на *покоящийся электрический заряд магнитное поле не действует*. В этом существенное отличие магнитного поля от электрического. Магнитное поле действует только на движущийся заряд.

Вектор \mathbf{B} характеризует силовое действие магнитного поля на движущийся заряд и, следовательно, является в этом отношении аналогом вектора \mathbf{E} , характеризующего силовое действие электрического поля.

Важной особенностью магнитной силы является то, что она всегда перпендикулярна вектору скорости заряда, поэтому *работы над зарядом не совершает*. Это значит, что в постоянном магнитном поле энергия движущейся заряженной частицы всегда остается неизменной, как бы частица ни двигалась.

В нерелятивистском приближении сила Лоренца (9.2), как и любая другая сила, не зависит от выбора системы отсчета (инерциальной). Вместе с тем магнитная составляющая силы Лоренца меняется при переходе от одной системы отсчета к другой (из-за \mathbf{v}). Поэтому должна меняться и электрическая составляющая $q\mathbf{E}$. Отсюда следует, что разделение полной силы \mathbf{F} — силы Лоренца — на электрическую и магнитную зависит от выбора системы отсчета. Без указания системы отсчета такое разделение не имеет смысла.

Магнитное поле равномерно движущегося заряда. Опыт показывает, что само магнитное поле порождается движущимися зарядами (токами). В результате обобщения экспериментальных данных был получен элементарный закон, определяющий поле \mathbf{B} точечного заряда q , движущегося с постоянной нерелятивистской скоростью \mathbf{v} . Этот закон записывается в виде²

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q [\vec{v}\vec{r}]}{r^3}, \quad (9.3)$$

где μ_0 — *магнитная постоянная*; коэффициент $\mu_0/4\pi = 10^{-7}$ Гн/м; r — радиус-вектор, проведенный от заряда q к точке наблюдения.

Конец радиуса-вектора r неподвижен в данной системе отсчета, а его начало движется со скоростью \mathbf{v} (рис. 9.2), поэтому вектор \mathbf{B} в данной системе отсчета зависит не только от положения точки наблюдения, но и от времени.

¹Разработан ряд способов измерения поля B , но все они, в конечном счете, базируются на явлениях, в основе которых лежит уравнение (9.2).

²Формула (9.3) справедлива и в случае, когда заряд движется с ускорением, однако только на достаточно малых расстояниях r от заряда (малых настолько, что за время r/c скорость v заряда заметно не меняется).

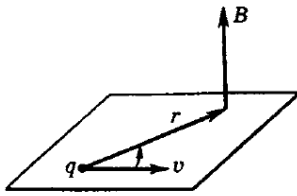


Рис. 9.2

В соответствии с формулой (9.3) вектор \mathbf{B} направлен перпендикулярно плоскости, в которой расположены векторы \mathbf{v} и \mathbf{r} , причем вращение вокруг вектора \mathbf{v} в направлении вектора \mathbf{B} образует с направлением \mathbf{v} правовинтовую систему (рис. 9.2). Отметим, что вектор \mathbf{B} является аксиальным (псевдовектором).

Величину B называют *магнитной индукцией*. Единицей магнитной индукции служит *тесла* (Тл).

Электрическое поле точечного заряда q , движущегося с нерелятивистской скоростью, описывается известным законом

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{e}_r. \quad (9.4)$$

Поэтому выражение (9.5) можно представить как

$$B = \epsilon_0\mu_0[vE] = [vE]/c^2, \quad (9.5)$$

где c — *электродинамическая постоянная* ($c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$), она равна скорости света в вакууме (совпадение, как потом выяснилось, не случайное).

Пример. Сравнение сил магнитного и электрического взаимодействий движущихся зарядов. Пусть два достаточно массивных точечных заряда q движутся параллельно друг другу с одинаковой нерелятивистской скоростью \mathbf{v} , как показано на рис. 9.3. Найти отношение магнитной F_M и электрической F_E сил, действующих, например, со стороны заряда 1 на заряд 2.

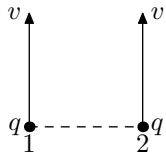


Рис. 9.3

Согласно (9.2) $F_M = qvB$ и $F_E = qE$, где v — скорость заряда 2, а B и E — индукция магнитного и напряженность электрического полей, создаваемых зарядом 1 в месте нахождения заряда 2.

Отношение $F_M/F_E = vB/E$. В нашем случае согласно (9.5) $= vE/c^2$, поэтому

$$F_M/F_E = (v/c)^2 \quad (9.6)$$

Даже для достаточно больших скоростей, например $v = 300$ км/с, это отношение равно 10^{-6} , т. е. магнитная часть силы в миллион раз меньше электрической и составляет ничтожную поправку к электрической силе.

Рассмотренный пример может вызвать естественный вопрос — стоит ли такие силы изучать? Оказывается, стоит, и на это есть две веские причины.

Во-первых, нам приходится встречаться с пучками частиц, движущихся почти со световыми скоростями, и там эта "поправка" к электрической силе становится сравнимой с последней (заметим, что отношение (9.6) справедливо и при релятивистских скоростях).

Во-вторых, при движении, например, электронов вдоль проводов их направленная скорость при обычных плотностях составляет несколько десятых миллиметра в секунду, и отношение $(v/c)^2 \approx 10^{-24}$. Ничтожная поправка к электрической силе!

Но дело в том, что в данном случае магнитная сила — это практически вся действующая сила, ибо электрические силы исчезли в результате почти идеального баланса отрицательных и положительных зарядов в проводах. Этот баланс намного точнее чем 10^{-24} , и "ничтожная" магнитная сила оказывается, по существу, единственной. А участие громадного числа зарядов в создании тока компенсирует малость этого члена.

Другими словами, избыточные заряды на проводах ничтожно малы по сравнению с суммарным зарядом носителей тока. Поэтому магнитные силы в данном случае намного превосходят электрические силы, действующие на избыточные заряды проводов.

9.2 Закон Био—Савара

Принцип суперпозиции. Опыт дает, что для магнитного поля, как и для электрического, справедлив принцип суперпозиции: магнитное поле, создаваемое несколькими движущимися зарядами или токами, равно векторной сумме магнитных полей, создаваемых каждым зарядом или током в отдельности:

$$\vec{B} = \sum \vec{B}_i \quad (9.7)$$

Закон Био-Савара. Рассмотрим вопрос о нахождении магнитного поля, создаваемого постоянными электрическими токами. Этот вопрос будем решать, исходя из закона (9.5), определяющего индукцию поля \mathbf{B} равномерно движущегося точечного заряда. Подставим в (9.5) вместо q заряд ρdV , где dV — элементарный объем, $\rho = en$ — объемная плотность заряда, являющегося носителем тока, и учтем, что $\rho v = j$ согласно (20.4). Тогда формула (9.5) приобретет следующий вид:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{j}\vec{r}]}{r^3} dV. \quad (9.8)$$

Если же ток I течет по **тонкому** проводу с площадью поперечного сечения ΔS , то $j dV = j \Delta S dl = I dl$, где dl — элемент длины провода. Введя вектор $d\vec{l}$ в направлении тока I , перепишем предыдущее равенство так:

$$\vec{j} dV = I d\vec{l}. \quad (9.9)$$

Векторы $\vec{j} dV$ и $I d\vec{l}$ называют соответственно объемным и линейным элементами тока. Произведя в формуле (9.8) замену объемного элемента тока на линейный, получим

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I [d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}. \quad (9.10)$$

Формулы (9.8) и (9.10) выражают **закон Био-Савара**.

Полное поле \mathbf{B} в соответствии с принципом суперпозиции определяется в результате интегрирования выражений (9.8) или (9.10) по всем элементам тока:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[\vec{j}\vec{r}]}{r^3} dV \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I [d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3} \quad (9.11)$$

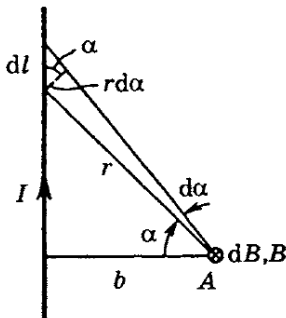


Рис. 9.4

Расчет по этим формулам индукции магнитного поля тока произвольной конфигурации, вообще говоря, сложен. Однако расчет значительно упрощается, если распределение тока имеет определенную симметрию. Приведем несколько простейших примеров нахождение индукции магнитного поля тока.

Пример 1. Магнитное поле прямого тока, т. е. тока, текущего по тонкому прямому проводу бесконечной длины (рис. 9.4). Согласно (9.10) в произвольной точке векторы $d\mathbf{B}$ от всех элементов тока имеют одинаковое направление — за плоскость рисунка. Поэтому сложение векторов $d\mathbf{B}$ можно заменить сложением их модулей dB , причем

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \cos \alpha}{r^2}.$$

Из рисунка видно, что $dl \cos \alpha = r d\alpha$ и $r = b / \cos \alpha$. Значит

$$dB = \frac{\mu_0 I \cos \alpha d\alpha}{4\pi b}.$$

Интегрируя последнее выражение по всем элементам тока, что эквивалентно интегрированию по α от $-\pi/2$ до $\pi/2$, находим

$$B = \frac{\mu_0 2I}{4\pi b}. \quad (9.12)$$

Пример 2. Магнитное поле на оси кругового тока. На рис. 9.5 показан вектор $d\mathbf{B}$ от элемента тока $I dl$, находящегося справа. От всех элементов тока будет образовываться конус векторов $d\mathbf{B}$, и легко сообразить, что результирующий вектор \mathbf{B} в точке будет направлен вверх по оси Z . Это значит, что для нахождения модуля вектора \mathbf{B} достаточно сложить проекции векторов $d\mathbf{B}$ на ось Z . Каждая такая проекция имеет вид

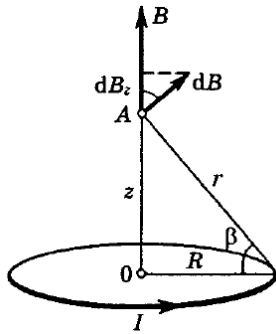


Рис. 9.5

$$dB_z = dB \cos \beta = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2} \cos \beta,$$

где учтено, что угол между элементом $d\vec{l}$ и радиусом-вектором \mathbf{r} равен $\pi/2$, поэтому синус равен единице. Интегрируя это выражение по всем dl (это дает $2\pi R$) и учитывая, что $\cos \beta = R/r$ и $r^2 = z^2 + R^2$, получаем

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{(z^2 + R^2)^{3/2}}. \quad (9.13)$$

Отсюда следует, что в центре витка с током ($z = 0$) и на расстоянии $z \gg R$ модуль вектора \mathbf{B} равен соответственно $B_{z=0} = \frac{\mu_0 2\pi I}{4\pi R}$,

$$B_{z \gg R} \approx \frac{\mu_0 2\pi R^2 I}{4\pi z^3}. \quad (9.14)$$

9.3 Основные законы магнитного поля

Магнитное поле обладает, как и электрическое поле, двумя важнейшими свойствами. Эти свойства, связанные также с потоком и циркуляцией векторного поля, и выражают основные законы магнитного поля.

Прежде чем перейти к их изучению, несколько слов о *графическом представлении* поля \mathbf{B} . Как и любое другое векторное поле, поле \mathbf{B} может быть представлено наглядно с помощью линий вектора \mathbf{B} . Их проводят обычным способом — так, чтобы касательная к этим линиям в каждой точке совпадала с направлением вектора \mathbf{B} , а густота линий была бы пропорциональна модулю вектора \mathbf{B} в данном месте.

Полученная таким образом геометрическая картина позволяет легко судить о конфигурации данного магнитного поля и сильно облегчает анализ некоторых ситуаций.

А теперь обратимся к основным законам магнитного поля — теореме Гаусса и теореме о циркуляции.

Теорема Гаусса для поля B . Поток вектора B сквозь любую замкнутую поверхность равен нулю:

$$\oint \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (9.15)$$

Эта теорема является, по существу, обобщением опыта. Она выражает собой в постулативной форме тот экспериментальный факт, что линии вектора \mathbf{B} не имеют ни начала, ни конца. Поэтому число линий вектора \mathbf{B} , выходящих из любого объема, ограниченного замкнутой поверхностью S , всегда равно числу линий, входящих в этот объем.

Отсюда вытекает *важное следствие*, которым мы будем пользоваться в дальнейшем неоднократно. А именно: *поток вектора \mathbf{B} сквозь поверхность S , ограниченную некоторым замкнутым контуром, не зависит от формы поверхности S* . Это легко понять с помощью представления о линиях вектора \mathbf{B} : так как они нигде не прерываются, их число сквозь поверхность S , ограниченную данным контуром (т. е. поток вектора \mathbf{B}), действительно не должно зависеть от формы поверхности S .

Закон (9.15) выражает также и тот факт, что в природе нет магнитных зарядов, на которых начинались бы или заканчивались линии вектора \mathbf{B} . Иначе говоря, *магнитное поле не имеет источников* в противоположность полю электрическому.

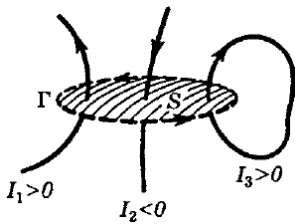


Рис. 9.6

Теорема о циркуляции вектора (для магнитного поля постоянных токов в вакууме). *Циркуляция вектора \mathbf{B} по произвольному контуру Γ равна произведению μ_0 на алгебраическую сумму токов, охватываемых контуром Γ :*

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I, \quad (9.16)$$

где $I = \sum I_k$, причем I_k — величины алгебраические. Ток считается положительным, если его направление связано с направлением обхода по контуру правилом правого винта. Ток противоположного направления считается отрицательным. Это правило иллюстрирует рис. 9.6: здесь токи I_1 и I_3 положительные, ибо их направления связаны с направлением обхода по контуру правилом правого винта, а ток I_2 — отрицательный.

Теорема о циркуляции (9.16) может быть доказана исходя из закона Био-Савара. В общем случае произвольных токов это доказательство достаточно кропотливо, и мы не будем приводить его здесь. Мы будем рассматривать утверждение (9.16) как постулат, подтвержденный экспериментально.

Еще одно замечание. Если ток I в (9.16) распределен по объему, где расположен контур Γ , то его можно представить как

$$I = \int \vec{j} d\vec{S}. \quad (9.17)$$

Интеграл здесь берется по произвольной поверхности S , натянутой на контур Γ . Плотность тока \vec{j} под интегралом соответствует точке, где расположена площадка $d\vec{S}$, причем вектор $d\vec{S}$ образует с направлением обхода по контуру правовинтовую систему.

Итак, в общем случае уравнение (9.16) можно записать так:

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int \vec{j} d\vec{S} = \mu_0 \int j_n dS. \quad (9.18)$$

Тот факт, что циркуляция вектора \mathbf{B} , вообще говоря, не равна нулю, означает, что поле \mathbf{B} не потенциально (в отличие от электростатического поля). Такое поле называют *вихревым* или *соленоидальным*.

Так как циркуляция вектора \mathbf{B} пропорциональна току I , охватываемому контуром, то магнитному полю, в общем случае, нельзя приписать скалярный потенциал, который был бы связан с вектором \mathbf{B} соотношением, аналогичным $\vec{E} = -\nabla\varphi$. Этот потенциал был бы неоднозначным: при каждом обходе по контуру и возвращении в исходную точку он получал бы приращение, равное $\mu_0 I$. Впрочем, в той области пространства, где токов нет, магнитный потенциал φ_m вводят и достаточно эффективно используют.

Роль теоремы о циркуляции вектора \mathbf{B} . Эта теорема играет примерно ту же роль, что и теорема Гаусса для векторов \mathbf{D} . Мы знаем, что поле \mathbf{B} определяется всеми токами, циркуляция же вектора \mathbf{B} только теми токами, которые охватывает данный контур. Несмотря на это, в некоторых случаях — при наличии специальной симметрии — теорема о циркуляции оказывается весьма эффективной, позволяя очень просто находить \mathbf{B} .

Это бывает в тех случаях, когда вычисление циркуляции вектора \mathbf{B} можно свести, выбрав разумно контур, к произведению B (или B_l) на длину контура или его часть. Если этого нет, расчет поля \mathbf{B} приходится проводить иными способами, например с помощью закона Био-Савара или путем решения соответствующих дифференциальных уравнений, и расчет становится значительно сложнее.

9.4 Применения теоремы о циркуляции вектора \mathbf{B}

Рассмотрим несколько практически важных примеров, иллюстрирующих эффективность использования теоремы о циркуляции при расчете поля \mathbf{B} , а затем обсудим, насколько универсален этот способ расчета.

Пример 1. Магнитное поле прямого тока. Пусть постоянный ток I течет вдоль бесконечно длинного прямого провода, имеющего круглое сечение радиусом a . Найдем индукцию \mathbf{B} поля снаружи и внутри провода.

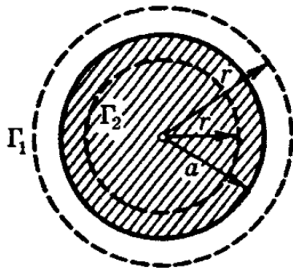


Рис. 9.7

Из симметрии задачи следует, что линии вектора \mathbf{B} в данном случае должны иметь вид окружностей с центром на оси провода. Причем модуль вектора \mathbf{B} должен быть одинаков во всех точках на расстоянии r от оси провода. Поэтому по теореме о циркуляции вектора \mathbf{B} для круглого контура Γ_1 (рис. 9.7) $B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$, откуда следует, что вне провода

$$B = (\mu_0/2\pi) I/r, \quad (r \geq a). \quad (9.19)$$

Заметим, что решение этого вопроса непосредственно (с помощью закона Био-Савара) оказывается гораздо более сложным.

Внутри провода из тех же соображений симметрии следует, что линии вектора \mathbf{B} являются тоже окружностями. По теореме о циркуляции вектора \mathbf{B} для круглого контура Γ_2 (см. рис. 9.7) $B \cdot 2\pi r = \mu_0 I_r$, где $I_r = I (r/a)^2$ — ток, охватываемый данным контуром. Отсюда мы находим, что внутри провода

$$B = (\mu_0/2\pi) I r/a^2 \quad (r \leq a). \quad (9.20)$$

Зависимость $B(r)$ показана графически на рис. 9.8.

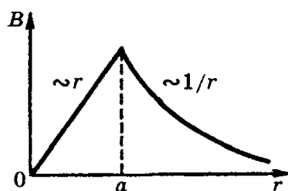


Рис. 9.8

Если провод имеет вид трубки круглого сечения, то снаружи индукция \mathbf{B} определяется формулой (9.19), а внутри — магнитное поле отсутствует. Это также легко показать с помощью теоремы о циркуляции вектора \mathbf{B} .

Пример 2. Магнитное поле соленоида. Пусть ток I течет по проводнику, намотанному по винтовой линии на поверхность цилиндра. Такой обтекаемый ток цилиндр называют *соленоидом*. Пусть на единицу длины соленоида приходится n витков проводника. Если шаг винтовой линии достаточно мал, то каждый виток соленоида можно приближенно заменить замкнутым витком. Будем также предполагать, что сечение проводника настолько мало, что ток в соленоиде можно считать текущим по его поверхности.

Опыт и расчет показывают, что чем длиннее соленоид, тем меньше индукция магнитного поля снаружи него. Для бесконечно длинного соленоида магнитное поле снаружи отсутствует вообще.

Из соображений симметрии ясно, что линии вектора \mathbf{B} внутри соленоида направлены вдоль его оси, причем вектор \mathbf{B} составляет с направлением тока в соленоиде праввинтовую систему.

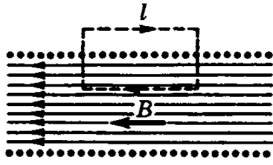


Рис. 9.9

Уже то, что мы выяснили относительно конфигурации магнитного поля соленоида, подсказывает выбрать прямоугольный контур так, как показано на рис. 9.9. Циркуляция вектора \mathbf{B} по данному контуру равна Bl , и контур охватывает ток nlI . Согласно теореме о циркуляции $Bl = \mu_0 nlI$ откуда следует, что внутри длинного соленоида

$$B = \mu_0 nl, \quad (9.21)$$

т. е. поле внутри длинного соленоида однородно (за исключением областей, прилегающих к торцам соленоида, но этим при расчетах зачастую пренебрегают). Произведение nl называют *числом ампервитков*. При $n = 2000$ витков/м и $I = 2$ А магнитное поле внутри соленоида $B = 5$ мТл.

Пример 3. Магнитное поле тороида. Тороид представляет собой провод, навитый на каркас, имеющий форму тора (рис. 9.10).

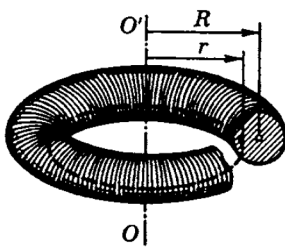


Рис. 9.10

Из соображений симметрии нетрудно понять, что линии вектора \mathbf{B} должны быть окружностями, центры которых расположены на оси OO' тороида. Поэтому ясно, что в качестве контура следует взять одну из таких окружностей.

Если контур расположен внутри тороида, он охватывает ток NI , где N — число витков в тороидальной катушке; I — ток в проводе. Пусть радиус контура r , тогда по теореме о циркуляции $B \cdot 2\pi r = \mu_0 NI$, откуда следует, что внутри тороида

$$B = (\mu_0/2\pi) NI/r. \quad (9.22)$$

Из сравнения (9.22) с (9.19) видно, что внутри тороида магнитное поле совпадает с полем прямого тока NI , текущего вдоль оси OO' . Устремив N и радиус тороида R к бесконечности (при неизменном сечении тороида), в пределе получим выражение (9.21) для магнитного поля бесконечно длинного соленоида.

Если выбранный нами круглый контур проходит вне тороида, то токов он не охватывает, поэтому для такого контура $B \cdot 2\pi r = 0$. Это значит, что вне тороида магнитное поле отсутствует.

В предыдущих рассуждениях предполагалось, что линии тока лежат в меридиональных плоскостях, т. е. в плоскостях, проходящих через ось OO' тороида. У реального тороида линии тока (витки) не лежат строго в этих плоскостях, поэтому имеется составляющая тока вокруг оси OO' . Эта составляющая создает дополнительное поле, аналогичное полю кругового тока.

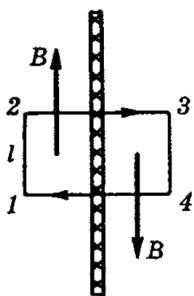


Рис. 9.11

Пример 4. Магнитное поле плоскости с током. Рассмотрим безграничную проводящую плоскость, по которой течет равномерно распределенный ток одного направления. На рис. 9.11 показан след такой плоскости с током, текущим за плоскость рисунка (что отмечено крестиками). Введем понятие *линейной плотности тока* как вектор i , направленный вдоль линий тока. Модуль этого вектора представляет собой ток, приходящийся на единицу длины, которая играет роль "поперечного сечения".

Модуль этого вектора представляет собой ток, приходящийся на единицу длины, которая играет роль "поперечного сечения".

Разбив мысленно плоскость с током на тонкие нити с током, нетрудно сообразить, что результирующее поле \mathbf{B} будет направлено параллельно плоскости, причем справа от плоскости — вниз, слева — вверх (см. рис. 9.11). Эти направления легко установить по правилу правого винта.

Для определения индукции поля \mathbf{B} воспользуемся теоремой о циркуляции вектора \mathbf{B} . Зная, как расположены в этом случае линии вектора \mathbf{B} , выберем контур в виде прямоугольника 1234. Тогда по теореме о циркуляции $2Bl = \mu_0 il$, где l — длина стороны контура, параллельной плоскости с током. Из последнего равенства находим:

$$B = \mu_0 i / 2. \quad (9.23)$$

Из полученной формулы видно, что магнитное поле как с одной стороны плоскости, так и с другой является однородным. Этот результат справедлив и для ограниченной пластины с током, но лишь для точек вблизи пластины и удаленных от ее краев.

Общие соображения. Результаты, полученные в рассмотренных примерах, можно было бы найти и непосредственно с помощью закона Био-Савара. Однако теорема о циркуляции позволяет получить эти результаты значительно проще и быстрее.

Вместе с тем легкость, с которой был проведен расчет поля в этих примерах, не должна создать у читателя ошибочного впечатления о силе метода, основанного на применении теоремы о циркуляции. Как и в случае теоремы Гаусса для электрического поля, число задач, легко решаемых с помощью теоремы о циркуляции вектора \mathbf{B} , к сожалению, тоже весьма ограничено. Достаточно сказать, что уже для такой симметричной конфигурации тока, как круговой виток, теорема о циркуляции оказывается беспомощной. Здесь конфигурация магнитного поля, несмотря на вроде бы хорошую симметрию, не позволяет, однако, найти необходимый для расчета простой контур, и задачу приходится решать другими способами, гораздо более громоздкими.

9.5 Дифференциальная форма основных законов магнитного поля

Дивергенция поля \mathbf{B} Теорема Гаусса (1.32) для поля \mathbf{B} в дифференциальной форме имеет вид

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (9.24)$$

т. е. *дивергенция поля \mathbf{B} всюду равна нулю*. Это означает, повторяем, что магнитное поле не имеет источников (магнитных зарядов). Магнитное поле порождают не магнитные заряды (которых в природе нет), а электрические токи.

Закон (9.24) является **фундаментальным**: он справедлив не только для постоянных, но и для переменных магнитных полей.

Ротор поля \mathbf{B} . Важное свойство магнитного поля, которое выражает теорема о циркуляции вектора \mathbf{B} , побуждает представить и эту теорему в дифференциальной форме, расширяющей ее возможности как инструмента исследования и расчета.

С этой целью рассмотрим отношение циркуляции вектора \mathbf{B} к площади S , ограниченной контуром. Оказывается, это отношение стремится к некоторому пределу при $S \rightarrow 0$, причем этот предел зависит от ориентации контура в данной точке пространства. Ориентация контура задается вектором \mathbf{n} нормали к плоскости контура, причем направление \mathbf{n} связано с направлением обхода по контуру правилом правого винта.

Предел, получаемый при указанной операции, представляет собой скалярную величину, которая ведет себя как проекция некоторого вектора на направление нормали \mathbf{n} к

плоскости контура, по которому берется циркуляция. Этот вектор называют *ротором поля* \mathbf{V} и обозначают символом $\text{rot } \mathbf{V}$. Таким образом,

$$\lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{B} d\vec{l}}{S} = (\text{rot } \vec{B})_n, \quad (9.25)$$

где справа стоит проекция вектора $\text{rot } \mathbf{V}$ на нормаль \mathbf{n} .

Итак, в каждой точке векторного поля \mathbf{V} имеется вектор $\text{rot } \mathbf{V}$, направление и модуль которого связаны со свойствами самого поля в данной точке. Направление вектора $\text{rot } \mathbf{V}$ определяется тем направлением нормали \mathbf{n} площадки S , при котором достигается максимальное значение величины (9.25), являющееся одновременно модулем вектора $\text{rot } \mathbf{V}$.

В математике получают выражение для $\text{rot } \mathbf{V}$ в координатном представлении. Для наших целей важно другое: оказывается, формально $\text{rot } \mathbf{V}$ можно рассматривать как векторное произведение обозначением: оно сразу же позволяет записать векторное произведение $\nabla \times \mathbf{V}$ с помощью определителя: где e_x, e_y, e_z — орты осей декартовых координат. Данное выражение справедливо для ротора не только поля \mathbf{V} , но и для любого другого векторного поля, в частности и для поля \mathbf{E} .

Обратимся теперь к теореме о циркуляции вектора \mathbf{V} . Согласно (9.25) уравнение (9.25) можно представить в виде

$$\lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{B} d\vec{l}}{S} = \mu_0 j_n$$

Или $(\nabla \times \mathbf{V})_n = \mu_0 j_n$. Отсюда

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}. \quad (9.26)$$

Это и есть дифференциальная форма теоремы о циркуляции вектора \mathbf{V} . Видно, что ротор поля \mathbf{V} совпадает по направлению с вектором \mathbf{j} — плотностью тока в данной точке, а модуль $\nabla \times \mathbf{V}$ равен $\mu_0 j$.

В электростатическом поле циркуляция вектора равна нулю, поэтому

$$\nabla \times \vec{E} = 0. \quad (9.27)$$

Векторное поле, ротор которого всюду равен нулю, является потенциальным, в противном случае поле является *соленоидальным*. Значит, *электростатическое поле есть поле потенциальное, магнитное же поле — соленоидальное*.

9.6 Сила Ампера

Закон Ампера. Каждый носитель тока испытывает действие магнитной силы. Действие этой силы передается проводнику, по которому заряды движутся. В результате магнитное поле действует с определенной силой на сам проводник с током. Найдем эту силу.

Пусть объемная плотность заряда, являющегося носителем тока (электроны в металле, например), равна ρ . Выделим мысленно элемент объема dV проводника. В нем находится заряд — носитель тока, равный ρdV . Тогда сила, действующая на элемент dV проводника, может быть записана по формуле (2.3) в виде

$$d\vec{F} = \rho [\vec{u}\vec{B}] dV,$$

где \vec{u} — скорость упорядоченного движения зарядов.

Так как $\mathbf{j} = \rho \mathbf{u}$, то

$$d\vec{F} = [\vec{j}\vec{B}] dV. \quad (9.28)$$

Если ток течет по тонкому проводнику, то согласно (2.9)

$$\vec{j}dV = Id\vec{l}$$

и

$$d\vec{F} = I[d\vec{l}, \vec{B}], \quad (9.29)$$

где $d\vec{l}$ — вектор, совпадающий по направлению с током и характеризующий элемент длины тонкого проводника.

Формулы (9.28) и (9.29) выражают **закон Ампера**. Интегрируя эти выражения по элементам тока (объемным или линейным), можно найти магнитную силу, действующую на тот или иной объем проводника или его линейный участок.

Силы, действующие на токи в магнитном поле, называют **амперовыми** или **силами Ампера**.

Пример. Сила взаимодействия параллельных токов. Найдём амперову силу, с которой взаимодействуют в вакууме два параллельных бесконечно длинных провода с токами I_1 и I_2 , если расстояние между проводами равно b . Расчет силы произведем на единицу длины этой системы.

Каждый элемент тока I_2 находится в магнитном поле тока I_1 а именно в поле $\vec{B}_1 = (\mu_0/4\pi) 2I_1/b$ согласно (9.19). Угол между элементом тока I_2 и вектором \vec{B}_1 прямой, поэтому, как следует из формулы (9.29), на единицу длины проводника с током I_2 действует сила $F = I_2 B_1$, или

$$F_{\text{ед}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{b} \quad (9.30)$$

Для силы, действующей на единицу длины проводника с током I_1 , получается, разумеется, то же выражение.

И последнее. Нетрудно убедиться в том, что токи, одинаково направленные, притягиваются, а противоположно направленные — отталкиваются. Здесь речь идет только о магнитной силе. Не следует, однако, забывать, что кроме магнитной имеется еще и электрическая сила — сила, обусловленная избыточными зарядами на поверхности проводников. Поэтому, если говорить о полной силе взаимодействия между проводами, то она может быть как силой притяжения, так и силой отталкивания — все зависит от соотношения магнитной и электрической составляющих полной силы (см. задачу 6.7).

Сила, действующая на контур с током. Результирующая амперова сила, которая действует на контур с током в магнитном поле, определяется в соответствии с (9.29) как

$$\vec{F} = I \oint [d\vec{l} \vec{B}], \quad (9.31)$$

где интегрирование проводится по данному контуру с током I . Если магнитное поле однородно, то вектор \vec{B} можно вынести из-под интеграла и задача сводится к вычислению векторного интеграла $\oint d\vec{l}$. Этот интеграл представляет собой замкнутую цепочку элементарных векторов $d\vec{l}$, поэтому он равен нулю. Значит, и $\vec{F} = 0$, т. е. результирующая амперова сила равна нулю в однородном магнитном поле.

Если же магнитное поле неоднородно, то результирующая сила (9.31), вообще говоря, отлична от нуля и в каждом конкретном случае она определяется с помощью выражения (9.31). Для дальнейшего особый интерес представляет случай, когда контур с током плоский и его размеры достаточно малы. Такой контур с током называют **элементарным**.

Поведение элементарного контура с током удобно описывать с помощью **магнитного момента** \vec{p}_m . По определению

$$\vec{p}_m = IS\vec{n}, \quad (9.32)$$

где I — ток; S — площадь, ограниченная контуром; n — нормаль к контуру, направление которой связано с направлением тока в контуре правилом правого винта (рис. 9.12). В магнитном отношении элементарный контур с током вполне характеризуется его магнитным моментом \vec{p}_m .

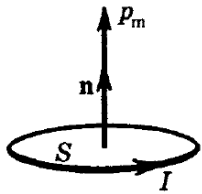


Рис. 9.12

Довольно кропотливый расчет по формуле (9.31) с учетом малости контура приводит к следующему выражению для силы, действующей на элементарный контур с током в неоднородном магнитном поле:

$$\vec{F} = p_m \frac{\partial \vec{B}}{\partial n}, \quad (9.33)$$

где p_m — *модуль* магнитного момента контура; $\partial \vec{B} / \partial n$ — производная вектора \mathbf{B} по направлению нормали \mathbf{n} или по направлению вектора \vec{p}_m . Последнее выражение аналогично (1.23) для силы, действующей на электрический диполь в электрическом поле.

Из формулы (9.33) видно, что, как и в случае электрического диполя:

1) в однородном магнитном поле $\mathbf{F} = 0$, ибо $\partial \mathbf{B} / \partial n = 0$;

2) направление вектора \mathbf{F} , вообще говоря, не совпадает ни с вектором \mathbf{B} , ни с вектором \vec{p}_m ; вектор \mathbf{F} совпадает лишь с направлением элементарного *приращения* вектора \mathbf{B} , взятого в *направлении вектора* \mathbf{p}_m в месте расположения контура. Сказанное иллюстрирует рис. 9.13, где показаны три расположения контура в магнитном поле прямого тока I_0 . Здесь же показан и вектор результирующей силы \mathbf{F} , которая действует на контур в каждом случае (полезно самостоятельно убедиться, что это действительно так).

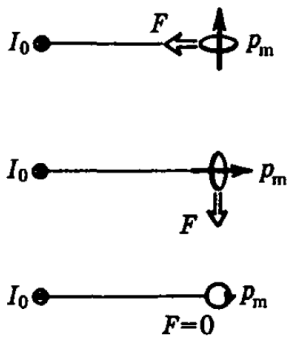


Рис. 9.13

Если нас интересует проекция силы \mathbf{F} на некоторое направление X , то достаточно записать выражение (9.33) в проекциях на это направление, и мы получим

$$F_x = p_m \frac{\partial B_x}{\partial n}, \quad (9.34)$$

где $\partial B_x / \partial n$ — производная соответствующей проекции вектора \mathbf{B} опять же по направлению нормали \mathbf{n} к контуру (или по \mathbf{p}_m).

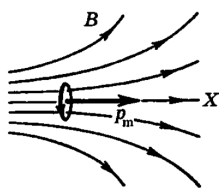


Рис. 9.14

Пример. Пусть элементарный контур с током, имеющий магнитный момент \mathbf{p}_m , расположен перпендикулярно оси симметрии неоднородного магнитного поля, причем вектор \mathbf{p}_m — в направлении вектора \mathbf{B} . Выберем положительное направление оси X , как показано на рис. 9.14.

Так как в направлении вектора \vec{p}_m приращение проекции B_x будет отрицательным, то $F_x < 0$. Значит, вектор \mathbf{F} направлен влево — в сторону, где B больше. Если же контур с током (и вектор \vec{p}_m) повернуть на 90° так, чтобы центр контура совпал с осью симметрии поля \mathbf{B} , то в этом положении $F_x = 0$, а вектор \mathbf{F} будет направлен перпендикулярно

оси X , причем в ту же сторону, что и \vec{p}_m .

9.7 Момент сил, действующих на контур с током

Рассмотрим плоский контур с током I в *однородном* магнитном поле \mathbf{B} . Выше (см. с.78) мы выяснили, что результирующая сила (9.31), которая действует на контур с током в однородном магнитном поле, равна нулю. А из механики известно, что если результирующая сил, действующих на любую систему, равна нулю, то суммарный момент этих сил

не зависит от точки O , относительно которой определяют моменты этих сил. Раз так, можно просто говорить о результирующем моменте амперовых сил в нашем случае. По определению, результирующий момент амперовых сил

$$\vec{M} = \oint [\vec{r}, d\vec{F}], \quad (9.35)$$

где $d\vec{F}$ дается формулой (9.29). Если провести расчет по формуле (9.35) — он довольно громоздок и мало интересен, поэтому мы не будем его приводить, — то оказывается, что для произвольной формы контура с током этот момент сил можно представить как

$$\vec{M} = [\vec{p}_m \vec{B}], \quad (9.36)$$

где \vec{p}_m — магнитный момент контура с током (для плоского контура $\vec{p}_m = IS\vec{n}$)³.

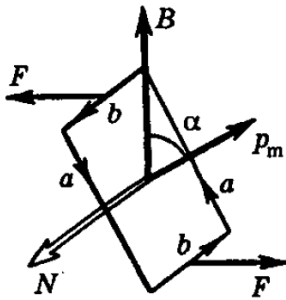


Рис. 9.15

Из (9.36) видно, что момент \vec{M} амперовых сил, действующих на контур с током в однородном магнитном поле, перпендикулярен как вектору \vec{p}_m , так и вектору \vec{B} . Модуль вектора \vec{M} равен $M = p_m B \sin \alpha$, где α — угол между векторами \vec{p}_m и \vec{B} . В тех случаях, когда $\vec{p}_m \uparrow \vec{B}$, момент сил $\vec{M} = 0$, и нетрудно убедиться в том, что положение контура будет устойчивым. Если $\vec{p}_m \updownarrow \vec{B}$, то тоже $\vec{M} = 0$, но такое положение контура является неустойчивым: малейшее отклонение от этого положения приведет к появлению момента сил, стремящегося отклонить контур еще больше от начального положения.

Пример. Убедимся в справедливости формулы (9.36) на простейшем случае прямоугольного контура с током (рис.9.15).

Как видно из данного рисунка, силы, действующие на стороны, перпендикулярны им и вектору \vec{B} , поэтому эти силы направлены горизонтально (на рисунке они не показаны) и стремятся только растянуть (или сжать) контур. Стороны b перпендикулярны \vec{B} , поэтому на каждую из них действует сила

$$F = IbB.$$

Эти силы стремятся повернуть контур так, чтобы его вектор \vec{p}_m оказался сонаправленным с вектором \vec{B} . Стало быть, на контур действует пара сил, момент которой равен произведению плеча пары $a \sin \alpha$ на F , т. е.

$$M = IbBa \sin \alpha.$$

Учитывая, что ab — это площадь, ограниченная контуром, и $Iba = \vec{p}_m$, получим

$$M = p_m B \sin \alpha,$$

что в векторной форме записывается как (9.36).

В заключение необходимо отметить, что выражение (9.36) справедливо и для неоднородных магнитных полей. Надо только, чтобы размеры контура с током были достаточно малы. Тогда влиянием неоднородности на вращающий момент \vec{M} можно пренебречь. Именно это относится к элементарному контуру с током.

Во внешнем неоднородном магнитном поле элементарный контур с током ведет себя аналогично тому, как и электрический диполь во внешнем неоднородном электрическом поле: он будет поворачиваться к положению устойчивого равновесия (при котором $\vec{p}_m \uparrow \vec{B}$) и, кроме того, под действием результирующей силы \vec{F} втягиваться туда, где индукция \vec{B} больше.

³ Если виток не плоский, то его магнитный момент $\vec{p}_m = I \int d\vec{S}$, где интеграл берется по поверхности S , натянутой на контур с током. Этот интеграл не зависит от выбора поверхности S , а зависит только от контура, на который она натянута.

9.8 Работа при перемещении контура с током

Когда контур с током находится во внешнем магнитном поле — мы будем предполагать, что оно постоянное, — на отдельные элементы контура действуют амперовы силы, а поэтому при перемещении контура эти силы будут совершать работу. В этом параграфе мы покажем, что работа, которую совершают амперовы силы при элементарном перемещении контура с током I , определяется как

$$\delta A = Id\Phi, \quad (9.37)$$

где $d\Phi$ — приращение магнитного потока сквозь контур при данном перемещении.

Доказательство этой формулы проведем в три этапа.

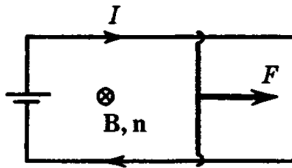


Рис. 9.16

1. Сначала рассмотрим частный случай: контур (рис.9.16) с подвижной перемычкой длины l находится в однородном магнитном поле, перпендикулярном плоскости контура и направленном за плоскость рисунка. На перемычку согласно (9.29) действует амперова сила $F = IlB$. При перемещении перемычки вправо на dx эта сила совершает положительную работу

$$\delta A = Fdx = IBldx = IBdS, \quad (9.38)$$

где dS — приращение площади, ограниченной контуром. Для определения знака магнитного потока Φ *условимся* всегда брать нормаль \mathbf{n} к поверхности, ограниченной контуром, так, чтобы она образовывала с направлением тока в контуре правовинтовую систему (см. рис. 9.16). При этом ток I будет всегда величиной положительной. Поток же Φ может быть как положительным, так и отрицательным. Но в нашем случае как Φ , так и $d\Phi = BdS$ являются величинами положительными (если бы поле \mathbf{B} было направлено на нас или перемычка перемещалась бы влево, то в обоих случаях $d\Phi < 0$). Как бы то ни было, в любом из этих случаев выражение (9.38) можно представить в виде (9.37).

2. Полученный результат справедлив и для произвольного направления поля \mathbf{B} . Чтобы убедиться в этом, разложим вектор \mathbf{B} на три составляющие: $\vec{B} = \vec{B}_n + \vec{B}_l + \vec{B}_x$. Составляющая \vec{B}_l — вдоль перемычки — параллельна току в ней и поэтому не оказывает на перемычку силового действия. Составляющая \vec{B}_x — вдоль перемещения — дает силу, перпендикулярную перемещению, работы она не совершает. Остается лишь составляющая \vec{B}_n — перпендикулярная плоскости, в которой перемещается перемычка. Поэтому в формуле (9.38) вместо B надо брать только B_n . Но $B_n dS = d\Phi$, и мы опять приходим к формуле (9.37).

3. Теперь перейдем к рассмотрению любого контура при произвольном перемещении его в постоянном неоднородном магнитном поле (контур может при этом и произвольным образом деформироваться). Разобьем мысленно данный контур на бесконечно малые элементы тока и рассмотрим бесконечно малые перемещения их. В этих условиях магнитное поле, в котором перемещается каждый элемент тока, можно считать однородным. Для такого перемещения к каждому элементу тока применимо выражение $\delta A = Id'\Phi$ для элементарной работы, где под $d'\Phi$ надо понимать вклад в приращение потока сквозь контур от данного элемента контура. Сложив такие элементарные работы для всех элементов контура, снова получим выражение (9.37), где $d\Phi$ есть приращение магнитного потока сквозь весь контур.

Чтобы найти работу амперовых сил при полном перемещении контура с током от начального положения 1 до конечного 2, достаточно проинтегрировать выражение (9.37):

$$A = \int_1^2 Id\Phi. \quad (9.39)$$

Если при этом перемещении поддерживать ток I постоянным, то

$$A = I(\Phi_2 - \Phi_1), \quad (9.40)$$

где Φ_1 и Φ_2 — магнитные потоки сквозь контур в начальном и конечном положениях. Таким образом, работа амперовых сил в этом случае равна произведению силы тока на приращение магнитного потока сквозь контур. Выражение (9.40) дает не только величину, но и знак совершаемой работы.

Пример. Плоский контур с током I поворачивают в магнитном поле B из положения, при котором нормаль к контуру $\vec{n} \downarrow \vec{B}$, в положение, при котором и $\vec{n} \uparrow \vec{B}$ (напомним, что направление нормали \mathbf{n} связано с направлением тока правилом правого винта). Площадь, ограниченная контуром, равна S . Найдём работу амперовых сил при указанном перемещении, считая, что ток I поддерживается постоянным.

Согласно (9.40) $A = I[BS - (-BS)] = 2IBS$. В данном случае работа $A > 0$, при обратном же повороте $A < 0$.

Следует отметить, что работа (9.40) совершается не за счёт энергии внешнего магнитного поля (оно не меняется), а за счёт источника э.д.с, поддерживающего ток в контуре. (Но об этом более подробно будет рассказано в гл. 9.)

Глава 10

Магнитное поле в магнетиках

10.1 Магнитное поле в веществе

10.1.1 Магнитный момент электронов и атомов. Намагниченность

При помещении во внешнее поле вещество может реагировать на это поле и само становится источником магнитного поля (намагничиваться). Такие вещества называют магнетиками (сравните с поведением диэлектриков в электрическом поле.) По магнитным свойствам магнетика разделяются на три основные группы: диамагнетики, парамагнетики и ферромагнетики. Магнитные свойства вещества определяются магнитными свойствами электронов и атомов. (В дальнейшем, говоря о магнитных свойствах, будем иметь в виду, в основном, диамагнетики и парамагнетики, а свойства небольшой группы ферромагнетиков иногда будем оговаривать особо.)

Рассмотрим сначала поведение электронов вещества в магнитном поле. Будем считать для простоты, что электрон вращается в атоме вокруг ядра со скоростью v по орбите радиуса r . Такое движение, которое характеризуется орбитальным моментом импульса, по сути является круговым током, который характеризуется соответственно орбитальным магнитным моментом $p_{\text{орб}}$. Исходя из периода обращения по окружности $T = \frac{2\pi r}{v}$, имеем, что произвольную точку орбиты электрон в единицу времени пересекает $\frac{v}{2\pi r}$ раз. Поэтому круговой ток, равный прошедшему через точку в единицу времени заряду, дается выражением:

$$I = \frac{ev}{2\pi r}. \quad (10.1)$$

Соответственно орбитальный магнитный момент электрона из (22.3) равен:

$$p_{\text{орб}} = IS = \frac{ev}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{evr}{2}. \quad (10.2)$$

Помимо орбитального момента импульса электрон имеет также собственный момент импульса, называемый *спином*. Спин описывается законами квантовой физики и является неотъемлемым свойством электрона – как масса и заряд. Собственному моменту импульса соответствует собственный (спиновый) магнитный момент электрона $p_{\text{сп}}$.

Магнитным моментом обладают и ядра атомов, однако эти моменты в тысячи раз меньше моментов электронов, и ими можно обычно пренебречь. В результате суммарный магнитный момент магнетика равен векторной сумме орбитальных и спиновых магнитных моментов электронов магнетика:

$$\vec{P}_m = \sum_i \vec{p}_{\text{орб}i} + \sum_i \vec{p}_{\text{сп}i}. \quad (10.3)$$

Внешнее магнитное поле действует на ориентацию частиц вещества, имеющих магнитные моменты (и микротоков), в результате чего вещество намагничивается. Характеристикой

этого процесса является вектор намагниченности \vec{J} , равный отношению суммарному магнитному моменту частиц магнетика к объему магнетика:

$$\vec{J} = \frac{\vec{P}_m}{\Delta V}. \quad (10.4)$$

Намагниченность измеряется в А/м.

Если магнетик поместить во внешнее магнитное поле \vec{B}_0 , то в результате намагничивания возникнет внутреннее поле микротоков \vec{B}_1 , так что результирующее поле будет равным:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1. \quad (10.5)$$

Рассмотрим магнетик в виде цилиндра с основанием площадью S и высотой l , помещенный в однородное внешнее магнитное поле с индукцией B_0 . Такое поле может быть создано, например, с помощью соленоида. Ориентация микротоков во внешнем поле становится упорядоченной. При этом поле микротоков диамагнетиков направлено противоположно внешнему полю, а поле микротоков парамагнетиков совпадает по направлению с внешним полем.

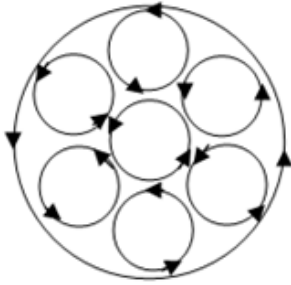


Рис. 10.1

В любом сечении цилиндра упорядоченность микротоков приводит к следующему эффекту (рис. 10.1). Упорядоченные микротоки внутри магнетика компенсируются соседними микротоками, а вдоль боковой поверхности текут нескомпенсированные поверхностные микротоки. Направление этих нескомпенсированных микротоков параллельно (или антипараллельно) току, текущему в соленоиде, создающем внешнее поле. В целом же они дают суммарный внутренний ток I_1 . Этот поверхностный ток создает внутреннее поле микротоков \vec{B}_1 , причем связь тока и поля может быть описана формулой (?22.22) для поля соленоида:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{l}. \quad (10.6)$$

Здесь магнитная проницаемость μ принята равной единице, поскольку роль среды учтена введением поверхностного тока; плотность намотки витков соленоида соответствует одному на всю длину соленоида l : $n = 1/l$. При этом магнитный момент поверхностного тока определяется намагниченностью всего магнетика:

$$P_m = I_1 S. \quad (10.7)$$

Из двух последних формул с учетом определения намагниченности (10.4) $\vec{J} = \frac{\vec{P}_m}{\Delta V}$ следует:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{l} = \mu_0 \frac{P_m}{lS} = \mu_0 J. \quad (10.8)$$

Или в векторном виде:

$$\vec{B}_1 = \mu_0 \vec{J}. \quad (10.9)$$

Тогда из (10.5) имеем:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{J} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{J}). \quad (10.10)$$

Опыт исследования зависимости намагниченности от напряженности внешнего поля показывает, что обычно поле можно считать несильным, и в разложении в ряд Тейлора достаточно ограничиться линейным членом:

$$\vec{J} = \chi \vec{H}, \quad (10.11)$$

где безразмерный коэффициент пропорциональности χ — *магнитная восприимчивость* вещества.

С учетом этого имеем:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{J}) = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H}. \quad (10.12)$$

Сравнивая последнюю формулу для магнитной индукции с известной формулой $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$, получим связь магнитной проницаемости и магнитной восприимчивости:

$$\mu = 1 + \chi. \quad (10.13)$$

Отметим, что значения магнитной восприимчивости для диамагнетиков и парамагнетиков малы и составляют обычно по модулю $10^{-7} - 10^{-6}$ (для диамагнетиков) и $10^{-7} - 10^{-4}$ (для парамагнетиков). При этом для диамагнетиков $\chi < 0$ и $\mu < 1$, для парамагнетиков $\chi > 0$ и $\mu > 1$.

10.1.2 Диамагнетики, парамагнетики, ферромагнетики

Разные вещества намагничиваются по-разному. Большая часть веществ намагничивается слабо — это *диамагнетики* и *парамагнетики*. Некоторые вещества в обычных условиях (при умеренных температурах) способны намагничиваться очень сильно — это *ферромагнетики*.

У некоторых атомов результирующий магнитный момент равен нулю. Вещества, состоящие из таких атомов, и являются диамагнетиками. К ним, например, относятся азот, вода, медь, серебро, поваренная соль $NaCl$, диоксид кремния $SiSiO_2$. Вещества же, у которых результирующий магнитный момент атома отличен от нуля, относятся к парамагнетикам. Примерами парамагнетиков являются: кислород, алюминий, платина.

Начнем с описания диамагнетиков, атомы которых не имеют собственных магнитных моментов и собственных магнитных полей. Однако эти моменты и поля возникают в диамагнетиках при наложении внешнего магнитного поля. Рассмотрим модель диамагнитного атома, в котором два электрона вращаются на одной орбите радиуса r в противоположных направлениях с угловой скоростью (в отсутствие поля) ω . Суммарный магнитный момент при этом равен нулю — в отличие от атома с одним электроном. Центробежная сила, определяемая притяжением электрона к ядру, выражается через массу электрона m и центробежное ускорение в отсутствие поля по формуле:

$$F = m\omega^2 r. \quad (10.14)$$

Пусть внешнее поле для простоты направлено перпендикулярно орбите (рис. 10.2).

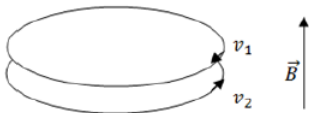


Рис. 10.2

Действующая на первый электрон при наложении внешнего поля сила Лоренца по правилу левой руки (с учетом отрицательного заряда электрона) уменьшает центробежную силу, что ведет к уменьшению угловой скорости электрона (и его магнитного момента). При этом появятся небольшие изменения угловой скорости $\Delta\omega$ и силы ΔF :

$$\Delta F = evB = e\omega r B. \quad (10.15)$$

Здесь в поправочной силе Лоренца учтена связь скорости электрона v с угловой скоростью ω . С учетом поправок уравнение (10.14) при наложении внешнего поля приобретает вид:

$$F - evB = m(\omega - \Delta\omega)^2 r. \quad (10.16)$$

Раскрыв скобки, воспользовавшись равенством (10.14) и пренебрегая квадратичным по $\Delta\omega$ членом, получим

$$e\omega r B = 2m\omega\Delta\omega r, \quad (10.17)$$

откуда изменение угловой скорости первого электрона равно:

$$\Delta\omega = \frac{eB}{2m}. \quad (10.18)$$

Второй электрон вращается в противоположном направлении. Поэтому действующая на него при наложении внешнего поля сила Лоренца по правилу левой руки увеличивает центростремительную силу, что ведет к увеличению угловой скорости электрона (и его магнитного момента). Несложно убедиться, повторив расчет, что изменение угловой скорости второго электрона равно изменению угловой скорости первого электрона.

Таким образом, в магнитном поле электрон приобретает дополнительную угловую скорость движения, характеризуемую частотой (10.18)

$$\omega_L = \frac{|e|B}{(2m)}, \quad (10.19)$$

которая называется ларморовой. Направление вектора угловой скорости определить нетрудно. Например, если индукция \mathbf{B} (см. рис. 10.3) направлена противоположно угловой скорости движения электрона вокруг ядра, то сила \mathbf{F} направлена против \mathbf{F}_c и, следовательно, скорость электрона и частота вращения должны уменьшиться. Это означает, что ω_L совпадает с направлением \mathbf{B} . Если направление \mathbf{B} противоположно первоначальному, то приходим к такому же заключению. Поэтому можно записать

$$\vec{\omega}_L = -\frac{e\vec{B}}{(2m)}, \quad (10.20)$$

где учтено, что заряд электрона e отрицателен. *Образование этой дополнительной угловой скорости вращения без изменения радиуса орбиты можно себе представить в виде дополнительного вращения атома как целого с частотой $\vec{\omega}_L$ в магнитном поле.*

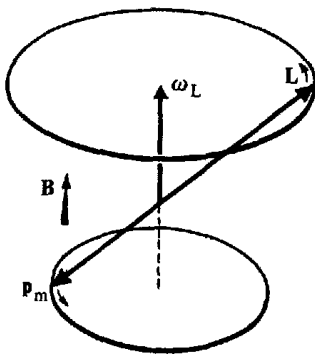


Рис. 10.4

Чтобы представить себе, каким будет движение атома при произвольной взаимной ориентации угловой скорости вращения электрона вокруг ядра и индукции внешнего поля, обобщим полученные результаты на произвольный случай. Атом с движущимся в нем по окружности электроном можно рассматривать как гироскоп, обладающий магнитным моментом. Момент импульса электрона равен $m\omega r^2$. Движущийся по орбите электрон эквивалентен круговому току силой $e/T = e\omega/(2\pi)$ и, следовательно, магнитный момент атома равен $\frac{\pi r^2 e\omega}{2\pi}$. С учетом направления механического и магнитного моментов атома, обусловленных движением электрона, запишем:

$$\vec{L} = mr^2\vec{\omega}, \quad \vec{p}_m = (er^2/2)\vec{\omega}. \quad (10.21)$$

Здесь учтено, что заряд e электрона отрицателен, а механический момент \mathbf{L} и магнитный момент \mathbf{p}_m имеют противоположные направления (рис. 10.4).

Уравнение движения атома, рассматриваемого как гироскоп, имеет вид

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \quad (10.22)$$

где $\mathbf{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}$ — момент сил. Из (10.21) следует, что

$$\vec{p}_m = \frac{e\vec{L}}{2m}. \quad (10.23)$$

и, следовательно, уравнение (10.22) принимает вид

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{e}{2m}\vec{L} \times \vec{B} = -\frac{e}{2m}\vec{B} \times \vec{L}. \quad (10.24)$$

Сравнение (10.24) с уравнением движения точек абсолютно твердого тела, вращающегося с угловой скоростью $\vec{\omega}$,

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (10.25)$$

показывает, что конец вектора \mathbf{L} движется вокруг направления вектора индукции с частотой

$$\vec{\omega}_L = -\frac{e\vec{B}}{2m}. \quad (10.26)$$

Следовательно, атом совершает в магнитном поле, подобно гироскопу, прецессионное движение (рис. 10.5). Оно называется ларморовой прецессией.

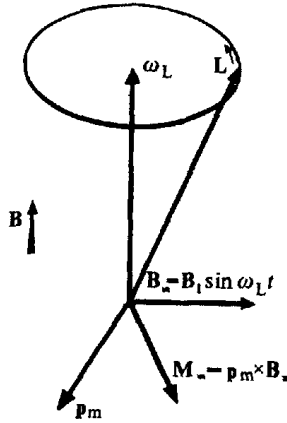


Рис. 10.5

Диамagnetная восприимчивость. Каждый электрон в атоме совершает ларморовское движение вокруг оси, совпадающей с направлением магнитного поля (рис. 10.6). Возникающий вследствие этого магнитный момент равен

$$p_{mi} = S_i I_i = \pi r_i^2 \frac{e}{T} = \frac{e r_i^2 \omega_L}{2}, \quad (10.27)$$

откуда

$$J = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} p_{mi} = -\frac{e^2}{4m} B n \langle \sum_i r_i^2 \rangle, \quad (10.28)$$

где n — концентрация атомов. В (10.28) использовано выражение для ларморовой частоты, а под знаком среднего стоит сумма квадратов расстояний электронов в атоме от оси ларморовой прецессии. На рис. 10.6 видно, что

$$R_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2, \quad (10.29)$$

где R_i — расстояние электрона от ядра. Принимая во внимание беспорядочную ориентировку атомов в пространстве, имеем

$$\langle x_i^2 \rangle = \langle y_i^2 \rangle = \langle z_i^2 \rangle = \frac{\langle R_i^2 \rangle}{3} \quad (10.30)$$

и, следовательно,

$$\langle r_i^2 \rangle = \langle x_i^2 + y_i^2 \rangle = \frac{2\langle R_i^2 \rangle}{3} = \frac{2\langle R^2 \rangle}{3}, \quad (10.31)$$

откуда

$$\left\langle \sum_i r_i^2 \right\rangle = \frac{2Z\langle R^2 \rangle}{3}, \quad (10.32)$$

где Z — число электронов в атоме. Поэтому окончательно для намагниченности получаем формулу

$$J = -\frac{e^2}{6m} nZ \langle R^2 \rangle \mu H. \quad (10.33)$$

Сравнивая (10.33) с формулой

$$J = \chi_d H, \quad (10.34)$$

получаем для диамагнитной восприимчивости выражение

$$\chi_d = -\frac{e^2}{6m} nZ \langle R^2 \rangle \mu_0, \quad (10.35)$$

где учтено, что $\mu \approx \mu_0$, поскольку у диамагнетиков проницаемость лишь незначительно отличается от проницаемости вакуума. Формула (10.35) хорошо согласуется с экспериментом, если под $\langle R^2 \rangle$ понимать средний квадрат расстояния электронов от ядра в атоме, вычисленный по квантовой теории. Для твердых тел и жидкостей диамагнитная восприимчивость имеет порядок $\sim 10^{-5}$, а для газов она значительно меньше из-за меньшей концентрации атомов [т.е. меньших значений n в формуле (10.35)].

Независимость диамагнитной восприимчивости от температуры. Формула (10.35) показывает, что χ_d не зависит от температуры, потому что ни одна из входящих в эту формулу величин не может зависеть от температуры. Это объясняется тем, что ларморовское движение электронов устанавливается очень быстро, за характерные для атомных процессов промежутки времени. Поэтому *тепловое движение и столкновения атомов не выводят их на сколько-нибудь заметное время из состояния ларморовой прецессии*. Это хорошо подтверждается экспериментом. Независимость диамагнитной восприимчивости от температуры была открыта экспериментально в 1895 г. П. Кюри (1859-1906).

10.1.3 Парамагнетики

Обсуждаются физическая природа парамагнитной восприимчивости и ее свойства. Описываются магнетизм, обусловленный свободными электронами, и парамагнитный резонанс.

Мезанизм намагничивания. Парамагнетиками являются вещества, молекулы которых обладают постоянными магнитными моментами. Энергия магнитного момента во внешнем магнитном поле равна

$$W = -\vec{p}_m \cdot \vec{B}. \quad (10.36)$$

Минимум энергии достигается при совпадении \vec{p}_m с направлением вектора индукции, благодаря чему при внесении парамагнетика в магнитное поле в соответствии с распределением Больцмана возникают преимущественная ориентация магнитных моментов его атомов в направлении индукции и соответствующее намагничивание. Индукция дополнительного магнитного поля за счет намагничивания совпадает по направлению с индукцией внешнего поля и усиливает ее. Однако угол между направлением магнитного момента атома и индукцией магнитного поля под действием поля не изменяется: магнитный момент испытывает лишь прецессионное движение вокруг направления вектора индукции без изменения угла между ними [см. (10.24)]. *Переориентировка магнитных моментов в соответствии с распределением Больцмана происходит в результате столкновений и взаимодействий атомов между собой.*

Зависимость парамагнитной восприимчивости от температуры. Механизм намагничивания парамагнетиков аналогичен механизму электризации полярных диэлектриков (см. 0.9.5?§ 22). Различие заключается лишь в использовании формулы (10.36) вместо формулы (4.31). Поэтому формулы для парамагнитной восприимчивости получаются

заменой величин $\vec{p} \rightarrow \vec{p}_m$, $\vec{E} \rightarrow \vec{B}$ в формулах 0.9.5§ 22 для диэлектрической восприимчивости.

Вместо (4.40) получаем формулу

$$\langle p_{mz} \rangle = p_m L(\beta), \quad (10.37)$$

где $L(\beta)$ — функция Ланжевена (см. 0.9.5§ 22) при $\beta = p_m B / (kT)$. При сравнительно высоких температурах и малых полях, когда $p_m B \ll kT$, т. е. $\beta \ll 1$, вместо (4.43) получаем формулу

$$\langle p_{mz} \rangle = \frac{p_m^2 B}{(3kT)} \approx \frac{p_m^2 \mu_0 H}{(3kT)}, \quad (10.38)$$

где $\mu \approx \mu_0$, поскольку отличие магнитной проницаемости парамагнетиков от μ_0 очень небольшое. Для намагниченности получаем формулу

$$J = n \langle p_{mz} \rangle = \left[\frac{p_m^2 n \mu_0}{(3kT)} \right] H, \quad (10.39)$$

сравнение которой с равенством

$$J = \chi_{\text{п}} H \quad (10.40)$$

приводит к следующему выражению для парамагнитной восприимчивости:

$$\chi_{\text{п}} = \frac{p_m^2 n \mu_0}{(3kT)} = \frac{C}{T}, \quad (10.41)$$

где C — постоянная Кюри.

Зависимость $\chi_{\text{п}} \sim 1/T$ называется **законом Кюри**, так как впервые была экспериментально обнаружена в 1896 г. П. Кюри.

Величина атомных магнитных моментов имеет порядок $p_m \sim 10^{-23}$, поэтому при комнатной температуре $\chi_{\text{п}} \sim 10^{-3}$, т. е. $\chi_{\text{п}}$ на два порядка больше диамагнитной восприимчивости. Это означает, что *у парамагнитных веществ диамагнитной восприимчивостью обычно можно пренебречь.*

Теория Ланжевена достаточно точно описывает лишь газы, у которых взаимодействие между молекулами пренебрежимо мало вследствие больших расстояний между ними. В жидкостях и твердых телах это взаимодействие может быть значительным. Учет этого взаимодействия во многих случаях модифицирует зависимость (10.41) восприимчивости от температуры. Эта зависимость принимает вид **закона Кюри - Вейсса**:

$$\chi_{\text{п}} = \frac{const}{(T - T_0)}, \quad (10.42)$$

где температура T_0 характерна для вещества и определяется его свойствами.

10.1.4 Ферромагнетики

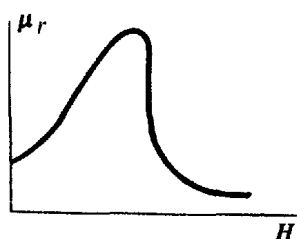


Рис. 10.7

Обсуждаются основные экспериментальные факты ферромагнетизма и дается их элементарная теоретическая трактовка. (Общее представление об антиферромагнетизме, ферримагнетизме и ферромагнитном резонансе изучить самостоятельно.)

Определение. Магнетики, магнитная проницаемость которых достигает больших значений и зависит от внешнего магнитного поля и предшествующей истории, называются ферромагнетиками. Они обладают остаточной намагниченностью, т. е. их намагниченность может быть отличной от нуля при отсутствии внешнего магнитного поля. В этом случае они являются постоянными магнитами.

Таким образом, по своим формальным проявлениям ферромагнетики аналогичны сегнетоэлектрикам (см. § 23). Следует заметить, что ферромагнетизм был открыт и изучен значительно раньше сегнетоэлектричества. Намагничивание ферромагнетиков было исследовано А.Г. Столетовым (1839 – 1896) в 1878 г. Им была построена кривая магнитной проницаемости (рис. 10.7), названная позже кривой Столетова. Гистерезис был открыт в 1880 г. Варбургом (1846 – 1931).

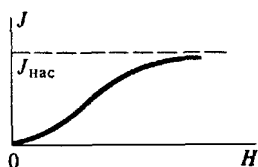


Рис. 10.8

Кривая намагничивания и петля гистерезиса. Магнитная восприимчивость ферромагнетиков является функцией напряженности внешнего поля, а зависимость $J(H)$ имеет вид, показанный на рис. 10.8. Намагниченность не увеличивается безгранично при увеличении напряженности, а имеет предел, называемый намагниченностью насыщения. Ее существование по аналогии с парамагнетиками указывает, что намагниченность ферромагнетиков обусловливается также переориентировкой некоторых элементарных магнитных моментов.

Поскольку

$$B = \mu_0 H + \mu_0 J, \quad (10.43)$$

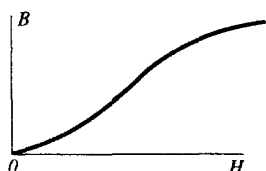


Рис. 10.9

кривая зависимости $B(H)$ не выходит на насыщение, хотя J испытывает насыщение. График этой зависимости называется кривой намагничивания (рис. 10.9).

Если производить перемагничивание образца в периодическом магнитном поле, то в полной аналогии с сегнетоэлектриками кривая зависимости $B(H)$ имеет вид петли, называемой петлей гистерезиса (рис. 10.10). Участок OA является кривой намагничивания, поскольку включение поля производится при нулевом значении индукции, т. е. при отсутствии постоянной намагниченности. Замкнутая кривая $ACDFGKA$ является петлей гистерезиса. Ее демонстрация производится по схеме, аналогичной схеме демонстрации петли гистерезиса сегнетоэлектриков с заменой конденсаторов на катушки (см. § 23).

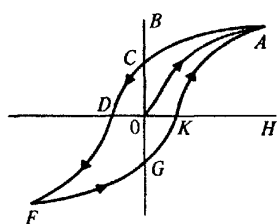


Рис. 10.10

При уменьшении напряженности H магнитного поля от некоторого значения (точка A) до нуля индукция B поля уменьшается лишь немного, до значения индукции, описываемой отрезком OC . Эта индукция называется **остаточной**. Ферромагнетик в этом состоянии называется постоянным магнитом.

Для того чтобы ликвидировать остаточное поле, необходимо приложить обратное поле, напряженность которого задается отрезком OD . Эта напряженность называется **задерживающей** или **коэрцитивной силой ферромагнетика**. Форма петли гистерезиса,

остаточная индукция и коэрцитивная сила зависят от материала ферромагнетика и изменяются для различных материалов в широких пределах.

Кривая магнитной проницаемости. Относительная магнитная проницаемость $\mu_r = \mu/\mu_0 = B(\mu_0 H)$ как функция от H может быть построена по данным кривой намагничивания (рис. 10.9) и имеет вид, показанный на рис. 10.7. При росте H значение μ_r достигает максимума и затем при достижении насыщения намагниченности быстро спадает. У ферромагнетиков μ_r порядка 10^4 в максимуме не являются редкостью.

Классификация ферромагнитных материалов. Ферромагнитные материалы можно разделить на две группы:

- 1) мягкие в магнитном отношении материалы с большой магнитной проницаемостью, легко намагничивающиеся и размагничивающиеся, с малой коэрцитивной силой;
- 2) жесткие в магнитном отношении материалы с относительно низкой магнитной проницаемостью, очень трудно намагничивающиеся и размагничивающиеся, с большой коэрцитивной силой.

Материалы первой группы используются главным образом в электротехнике переменных полей, в частности в трансформаторах, а второй группы — для создания постоянных магнитов.

Элементарная теория ферромагнетизма. *Основной вопрос теории ферромагнетизма состоит в объяснении стремления спинов электронов за счет особого квантового взаимодействия, называемого **обменным взаимодействием**, сорентрироваться в одном общем направлении.* Обменная энергия в теории ферромагнетизма выражается формулой

$$W_{об} = -2I_{об}S_1 \cdot S_2, \quad (10.44)$$

где S_1 и S_2 — спины взаимодействующих электронов, $I_{об}$ — интеграл обменного взаимодействия. Из (10.44) видно, что при $I_{об} > 0$ потенциальная энергия достигает минимума при параллельных спинах. Эта энергия обусловлена взаимодействием магнитного момента электрона с магнитным полем и выражается формулой вида (10.36), в которой, однако, под индукцией понимается индукция $\mathbf{B}_{об}$ обменного поля. Собственный магнитный момент $\vec{p}_m^{(0)}$ электрона связан с его собственным механическим моментом или спином \mathbf{S} соотношением вида (10.23), однако с коэффициентом пропорциональности, в два раза большим:

$$\vec{p}_m^{(0)} = \left(\frac{e}{m}\right) \mathbf{S}. \quad (10.45)$$

Поэтому, представляя энергию взаимодействия (10.44) как энергию магнитного момента вторую электрона, находящегося в магнитном поле, созданном за счет обменного взаимодействия первым электроном, имеем

$$W_{об} = -\frac{2I_{об}\vec{S}_1 m}{e} \cdot \frac{e}{m} \vec{S}_2 = -\vec{p}_{m2}^{(0)} \cdot \vec{B}_{об}, \quad (10.46)$$

где

$$\vec{B}_{об} = \left(\frac{2I_{об}m}{e}\right) \vec{S}_1. \quad (10.47)$$

Полная индукция магнитного поля складывается из индукции \mathbf{B} поля при отсутствии обменного взаимодействия и индукции $\mathbf{B}_{об}$ обменного поля. Соотношение (?38.21) с учетом (?38.23) может быть представлено в виде

$$\mu_0(1 + \chi) \vec{J} = \chi \vec{B} \quad \text{или} \quad \mu_0 \vec{J} = \left[\frac{\chi}{(1 + \chi)}\right] \vec{B}. \quad (10.48)$$

Это соотношение обобщается при наличии обменного взаимодействия формулой

$$\mu_0 \vec{J} = \left[\frac{\chi}{(1 + \chi)}\right] (\vec{B} + \vec{B}_{об}), \quad (10.49)$$

причем магнитная восприимчивость χ в этой формуле считается равной ее значению в (10.48) для парамагнетика при отсутствии обменного взаимодействия. Дальнейшее рассмотрение ведется в приближении среднего поля, основное предположение которого состоит в том, что индукция обменного поля пропорциональна намагниченности:

$$\vec{B}_{об} = \lambda \mu_0 \vec{J}, \quad (10.50)$$

где λ — постоянная обменного взаимодействия. Подставляя (10.50) в (10.49), находим соотношение

$$\mu_0 \vec{J} = \left[\frac{\chi}{(1 + \chi - \lambda \chi)} \right] \vec{B}, \quad (10.51)$$

которое целесообразно представить в виде, аналогичном (10.49):

$$\mu_0 \vec{J} = \left[\frac{\chi'}{(1 + \chi')} \right] \vec{B}, \quad (10.52)$$

где

$$\frac{\chi'}{(1 + \chi')} = \frac{\chi}{(1 + \chi - \lambda \chi)} \quad (10.53)$$

характеризует восприимчивость с учетом обменного взаимодействия.

Из (10.53) находим

$$\chi' = \frac{\chi}{1 - \lambda \chi} = \frac{C}{T - \lambda C}, \quad (10.54)$$

где $\chi = C/T$.

В области температур $T > \lambda C$ тело ведет себя как парамагнетик с характерным уменьшением магнитной восприимчивости с увеличением температуры. При приближении к $T = \lambda C$ восприимчивость $\chi' \rightarrow \infty$. Это означает, что сколь угодно малые поля вызывают конечную намагниченность. Другими словами, при $T = \lambda C$ *происходит возникновение спонтанной намагниченности, т. е. переход в ферромагнитное состояние*. Изложенная элементарная теория не позволяет количественно проанализировать изменение спонтанной намагниченности при дальнейшем уменьшении температуры в области $T < \lambda C$. Более точная теория показывает, что спонтанная намагниченность при $T = \lambda C$ возрастает скачком до конечного значения, а затем при уменьшении T продолжает возрастать, но скорость роста постепенно уменьшается. Таким образом, при $T < \lambda C$ магнетик находится в ферромагнитной фазе.

Закон Кюри — Вейсса. Для всякого ферромагнетика существует температура, при переходе через которую он испытывает фазовый переход (второго рода) и превращается в парамагнетик. Магнитная восприимчивость в парамагнитной области вблизи температуры перехода, называемой температурой Кюри, описывается соотношением вида (10.54), называемым **законом Кюри - Вейсса**. Величина $\lambda C = \Theta$ называется **температурой Кюри - Вейсса**. Теория показывает, что фазовый переход совершается не при температуре Кюри - Вейсса, а при температуре, близкой к ней.

Поэтому иногда допустимо не делать различия между температурой Кюри, при которой происходит фазовый переход, и температурой Кюри - Вейсса.

10.1.5 Условия на границе раздела двух магнетиков

Рассмотрим связь векторов магнитной индукции и напряженности магнитного поля на границе раздела двух магнетиков при отсутствии на границе макротокков. Воспользуемся методиками, использованными в задаче о преломлении линий электрического смещения и напряженности электрического поля на границе раздела двух диэлектриков. Как мы уже видели, на границе магнетика (а в общем случае — на границе раздела двух магнетиков) в поле возникает поверхностный микроток, который может приводить к разрыву полей.

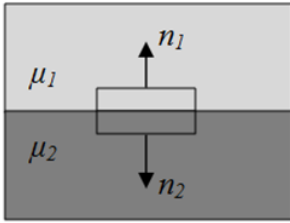


Рис. 10.11

Рассмотрим сначала соотношение между нормальными к поверхности раздела компонентами вектора магнитной индукции B_n . Воспользуемся теоремой Гаусса, выбрав в качестве гауссовой поверхности поверхность цилиндра (рис. 10.11). При этом основания цилиндра должны быть малы (чтобы считать поле константой), параллельны границе раздела и находиться в разных магнетиках, а высота цилиндра должна быть бесконечно малой – в том числе и по сравнению с основаниями. Такой выбор позволяет пренебречь потоком вектора магнитной индукции через боковую поверхность цилиндра по сравнению с потоком через основания.

Тогда из теоремы Гаусса следует, что потоки вектора магнитной индукции через основания равны и противоположны, то есть один направлен наружу цилиндра, другой внутрь. Геометрически это означает, что потоки направлены в одну сторону: $B_{n1}S = B_{n2}S$. Поскольку площади оснований цилиндра S равны, то получаем, что *нормальная компонента вектора магнитной индукции на границе раздела магнетиков остается непрерывной*:

$$B_{n1} = B_{n2}. \quad (10.55)$$

Выразив полученное соотношение через напряженность поля, получим, что нормальная компонента вектора напряженности на границе раздела магнетиков претерпевает разрыв:

$$\frac{H_{n1}}{H_{n2}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}. \quad (10.56)$$

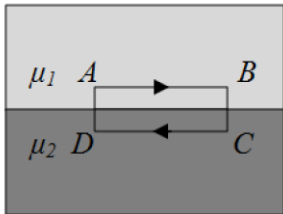


Рис. 10.12

Перейдем теперь к тангенциальным составляющим, соотношение которых удобно найти для вектора напряженности с помощью теоремы о циркуляции. Выделим вблизи границы раздела небольшой прямоугольный контур $ABCD$ (рис. 10.12 23.5). Выберем стороны $AB = CD = \ell$ так, что они параллельны границе раздела и находятся в разных магнетиках, а стороны BC и DA бесконечно малы по сравнению со сторонами AB и DC . Тогда, пренебрегая в теореме о циркуляции интегралами по бесконечно малым сторонам, получим: $H_{t2}\ell - H_{t1}\ell = 0$, откуда следует, что *тангенциальная компонента вектора напряженности на границе раздела магнетиков остается непрерывной*:

$$H_{\tau 2} = H_{\tau 1}. \quad (10.57)$$

Выразив это соотношение через магнитную индукцию, получим, что тангенциальная компонента вектора магнитной индукции на границе раздела магнетиков претерпевает разрыв:

$$\frac{B_{\tau 1}}{B_{\tau 2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (10.58)$$

Таким образом, мы получили, что вектора напряженности и магнитной индукции претерпевают преломление при переходе из одной среды в другую. По аналогии с преломлением электрического поля в диэлектриках имеем *закон преломления векторов напряженности магнитного поля и магнитной индукции*:

$$\frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}. \quad (10.59)$$

Здесь α_1 — угол падения, α_2 — угол преломления.

Формула показывает, что при переходе в магнетик с большей магнитной проницаемостью силовые линии напряженности и магнитной индукции удаляются от нормали.

Глава 11

Электромагнитное поле

До сих пор мы рассматривали электрическое и магнитное поля *раздельно*, не обнаруживая никакой видимой связи между ними. Это возможно было сделать лишь потому, что оба поля являлись статическими, в других же случаях так поступать нельзя.

Мы увидим, что электрическое и магнитное поля всегда должны рассматриваться как одно полное электромагнитное поле. Другими словами, оказывается, что электрическое и магнитное поля являются в некотором смысле различными компонентами единого физического объекта, который мы называем *электромагнитным полем*.

Деление же электромагнитного поля на электрическое и магнитное имеет относительный характер: такое деление в решающей степени зависит от системы отсчета, в которой рассматриваются явления. При этом поле, постоянное в одной системе отсчета, в общем случае оказывается переменным в другой системе.

11.1 Законы преобразования полей \mathbf{E} и \mathbf{B}

При переходе от одной системы отсчета к другой поля \mathbf{E} и \mathbf{B} определенным образом преобразуются. Законы этого преобразования устанавливаются в специальной теории относительности, причем довольно сложным образом. По этой причине мы не будем воспроизводить здесь соответствующие выводы, а сосредоточим внимание на содержании этих законов, на вытекающих из них следствиях, а также на том, как следует пользоваться этими законами при решении некоторых конкретных вопросов.

Постановка вопроса. Пусть имеются две инерциальные системы отсчета: K -система и движущаяся относительно нее со скоростью \mathbf{v}_0 система K' . В некоторой пространственно-временной точке K -системы отсчета известны значения полей \mathbf{E} и \mathbf{B} . Какими будут значения полей \mathbf{E}' и \mathbf{B}' в той же самой пространственно-временной точке в K' -системе отсчета? Напомним, что одной и той же пространственно-временной точкой называют такую, координаты и время которой в обеих системах отсчета связаны между собой преобразованиями Лоренца:

$$x' = \frac{x - v_0 t}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{xv_0}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}}.$$

Ответ на этот вопрос, как уже было сказано, дает теория относительности, которая показывает, что **законы преобразования полей** выражаются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \vec{E}'_{\parallel} &= \vec{E}_{\parallel}, & \vec{B}'_{\parallel} &= \vec{B}_{\parallel}, \\ \vec{E}'_{\perp} &= \frac{\vec{E}_{\perp} + [\vec{v}_0 \vec{B}]}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & \vec{B}'_{\perp} &= \frac{\vec{B}_{\perp} + \frac{[\vec{v}_0 \vec{E}]}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned} \quad (11.1)$$

Здесь символами \parallel и \perp отмечены *продольные* и *поперечные* (по отношению к вектору \vec{v}_0) составляющие электрического и магнитного полей, $\beta = v_0/c$, c — скорость света в вакууме ($c^2 = 1/\varepsilon_0\mu_0$).

Эти же формулы, записанные в проекциях, имеют вид:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x, & B'_x &= B_x, \\ E'_y &= \frac{E_y - v_0 B_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & B'_y &= \frac{B_y + \frac{v_0 E_z}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ E'_z &= \frac{E_z + v_0 B_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & B'_z &= \frac{B_z - \frac{v_0 E_y}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned} \quad (11.2)$$

где предполагается, что оси координат X и X' направлены вдоль вектора v_0 , ось Y' параллельна оси Y , ось Z' — оси Z .

Из уравнений (11.1) и (11.2) видно, что каждый из векторов \mathbf{E}' и \mathbf{B}' выражается как через \mathbf{E} , так и через \mathbf{B} . Это свидетельствует о единой природе электрического и магнитного полей. Каждое из них в отдельности не имеет абсолютного смысла: об электрическом и магнитном полях можно говорить лишь с обязательным указанием системы отсчета, в которой эти поля рассматриваются.

Подчеркнем, что свойства электромагнитного поля, выраженные в законах его преобразования, являются *локальными*: значения \mathbf{E}' и \mathbf{B}' в некоторой пространственно-временной точке K' -системы отсчета однозначно определяются только через значения \mathbf{E} и \mathbf{B} в той же пространственно-временной точке K -системы отсчета.

Необходимо обратить внимание еще на следующие особенности законов преобразования полей:

1. В отличие от поперечных составляющих \mathbf{E} и \mathbf{B} , которые изменяются при переходе к другой системе отсчета, *продольные составляющие не изменяются* — во всех системах отсчета они оказываются одинаковыми.
2. Векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} связаны друг с другом в разных системах отсчета в высшей степени симметричным образом. Это особенно полно обнаруживается в форме записи законов преобразования через проекции полей [см. (11.2)].
3. Если надо получить формулы обратного преобразования (от K' к K), то достаточно в формулах (11.1) и (11.2) заменить все штрихованные величины на нештрихованные (и наоборот), а также — знак перед v_0 .

Частный случай преобразования полей ($v_0 \ll c$). Если K' -система движется относительно K -системы со скоростью $v_0 \ll c$, то корень в знаменателе формул (11.1) можно заменить на единицу, и мы будем иметь

$$\begin{aligned} \vec{E}'_{\parallel} &= \vec{E}_{\parallel}, & \vec{B}'_{\parallel} &= \vec{B}_{\parallel}, \\ \vec{E}'_{\perp} &= \vec{E}_{\perp} + [\vec{v}_0 \vec{B}], & \vec{B}'_{\perp} &= \vec{B}_{\perp} - \frac{[\vec{v}_0 \vec{E}]}{c^2}. \end{aligned} \quad (11.3)$$

Отсюда следует, что

$$\vec{E}' = \vec{E} + [\vec{v}_0 \vec{B}], \quad \vec{B}' = \vec{B} - \frac{[\vec{v}_0 \vec{E}]}{c^2}. \quad (11.4)$$

Заметим, что первую из формул (11.4) можно получить непосредственно и очень просто. Пусть в K -системе в некоторый момент t заряд q имеет скорость \vec{v}_0 . Действующая на

него сила Лоренца $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q[\mathbf{v}_0\mathbf{B}]$. Перейдем в инерциальную K' -систему, движущуюся относительно K -системы с той же скоростью, что и заряд q в момент t , т. е. со скоростью \mathbf{v}_0 . В этот момент заряд q неподвижен в K' -системе, и сила, действующая на покоящийся заряд, является чисто электрической: $\mathbf{F}' = q\mathbf{E}'$. При $v_0 \ll c$, как в нашем случае, сила инвариантна ($\mathbf{F}' = \mathbf{F}$), откуда и следует первая из формул (11.4).

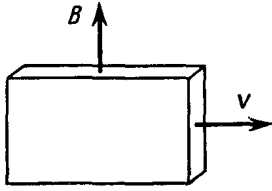


Рис. 11.1

Формулу же для преобразования магнитного поля можно получить только с помощью теории относительности в результате довольно громоздких выкладок.

Рассмотрим простой пример на применение формул (11.4).

Пример. Большая металлическая пластинка движется с постоянной нерелятивистской скоростью \mathbf{v} в однородном магнитном поле (рис. 11.1). Найдем поверхностную плотность зарядов, возникающих на плоскостях пластинки из-за ее движения.

Перейдем в систему отсчета, связанную с пластинкой. Согласно первой из формул (11.4) в этой системе отсчета будет наблюдаться постоянное однородное электрическое поле

$$\mathbf{E}' = [\mathbf{v}\mathbf{B}].$$

Оно будет направлено к нам. Под действием этого внешнего поля произойдет смещение зарядов так, что на обращенной к нам поверхности пластинки выступят положительные заряды, а на противоположной поверхности — отрицательные.

Поверхностная плотность σ этих зарядов будет такой, чтобы создаваемое ими поле внутри пластинки полностью компенсировало внешнее поле \mathbf{E}' ибо при равновесии результирующее электрическое поле внутри пластинки должно быть равно нулю. Имея в виду соотношение (1.38), получим

$$\sigma = \varepsilon_0 \mathbf{E}' = \varepsilon_0 v B.$$

Заметим, что при решении этого вопроса можно было рассуждать и иначе — с точки зрения системы отсчета, где пластинка движется со скоростью \mathbf{v} . В *этой* системе отсчета внутри пластинки *будет* электрическое поле. Оно возникает вследствие действия магнитной части силы Лоренца, вызывающей смещение всех электронов в пластинке за плоскость рис. 11.1. В результате передняя поверхность пластинки оказывается заряженной положительно, задняя — отрицательно, и внутри пластинки появляется электрическое поле, причем такое, что электрическая сила $q\mathbf{E}$ компенсирует магнитную часть силы Лоренца $q[\mathbf{v}\mathbf{B}]$, откуда $\mathbf{E} = -[\mathbf{v}\mathbf{B}]$. Это поле связано с поверхностной плотностью заряда той же формулой $\sigma = \varepsilon_0 v B$.

Оба подхода к решению данного вопроса одинаково законны.

Релятивистская природа магнетизма. Из формул преобразования полей (11.1) и (11.2) вытекает весьма замечательный вывод: возникновение магнитного поля является чисто релятивистским эффектом, следствием наличия в природе предельной скорости с равной скорости свете в вакууме.

Если бы эта скорость была бесконечной (соответственно и скорость распространения взаимодействий), никакого магнетизма вообще не существовало бы. В самом деле, рассмотрим свободный электрический заряд. В системе отсчета K , где он покоится, существует только электрическое поле. А это значит согласно (11.1), что в любой другой K' -системе отсчета, *если бы* $c \rightarrow \infty$, никакого магнитного поля \mathbf{B}' не возникало бы. Оно возникает только из-за конечности c , т. е. в конечном счете вследствие релятивистского эффекта.

Релятивистская природа магнетизма является универсальным физическим фактом, и его происхождение обусловлено отсутствием магнитных зарядов.

Почти полная компенсация электрических зарядов и позволила физикам изучить релятивистские эффекты (т.е. магнетизм) и открыть *правильные* законы. По этой причине

после создания теории относительности законы электромагнетизма в отличие от законов Ньютона не пришлось уточнять.

11.2 Следствия из законов преобразования полей

Некоторые простые следствия. Из формул преобразования (11.1) вытекают в ряде случаев простые и вместе с тем полезные соотношения.

1. Если в K -системе имеется только *электрическое* поле \mathbf{E} (а магнитное $\mathbf{B} = 0$), то между полями \mathbf{E}' и \mathbf{B}' в K' -системе существует такая связь

$$\mathbf{B}' = -\frac{[\vec{v}_0 \mathbf{E}']}{c^2}. \quad (11.5)$$

Действительно, если $\mathbf{B} = 0$, то $\vec{E}'_{\perp} = \frac{\vec{E}_{\perp}}{\sqrt{1-\beta^2}}$ и $\vec{B}'_{\parallel} = 0$,
 $\vec{B}'_{\perp} = -\frac{[\vec{v}_0 \vec{E}']}{c^2 \sqrt{1-\beta^2}} = -\frac{[\vec{v}_0 \vec{E}']}{c^2}$, где учтено, что в векторном произведении можно писать как \vec{E} , так и \vec{E}_{\perp} (это же относится и к штрихованным величинам). Приняв во внимание, что $\vec{B}' = \vec{B}'_{\parallel} + \vec{B}'_{\perp} = \vec{B}'_{\perp}$, приходим к формуле (11.5).

2. Если в K -системе имеется *только магнитное* поле \mathbf{B} (а электрическое $\mathbf{E} = 0$), то в K' -системе

$$\mathbf{E}' = [\vec{v}_0 \mathbf{B}']. \quad (11.6)$$

В самом деле, если $\mathbf{E} = 0$, то $\vec{B}'_{\perp} = \frac{\vec{B}_{\perp}}{\sqrt{1-\beta^2}}$ и $\vec{E}'_{\parallel} = 0$, $\vec{E}'_{\perp} = \frac{[\vec{v}_0 \mathbf{B}']}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Заменяя в последнем векторном произведении \mathbf{B} на \mathbf{B}_{\perp} и затем \mathbf{B}'_{\perp} на \mathbf{B}' приходим к формуле (11.6).

Из формул (11.5) и (11.6) вытекает следующий важный вывод:

если в K -системе имеется лишь одно из полей (\mathbf{E} или \mathbf{B}), то в K' -системе электрическое и магнитное поля взаимно перпендикулярны ($\mathbf{E}' \perp \mathbf{B}'$). Заметим, что обратное утверждение справедливо не всегда, а лишь при определенных дополнительных ограничениях, накладываемых на модули векторов \mathbf{E} и \mathbf{B} .

И последнее замечание. Ввиду того что в уравнения (11.5) и (11.6) входят только величины, относящиеся к одной и той же системе отсчета, эти уравнения легко применять к полям, изменяющимся в пространстве и времени. Хорошим примером может служить поле равномерно движущегося точечного заряда.

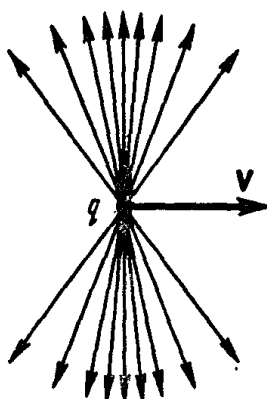


Рис. 11.2

Поле свободно движущегося релятивистского заряда.

Формулы преобразования полей представляют большой интерес прежде всего в том отношении, что выражают собой удивительные свойства электромагнитного поля. Но, кроме того, они важны и в чисто практическом отношении, позволяя иногда проще решать некоторые вопросы. Например, задача о нахождении поля равномерно движущегося точечного заряда может быть решена путем преобразования чисто кулоновского поля, которое наблюдается в системе отсчета, связанной с самим зарядом. Расчет показывает (см. задачу 8.10), что линии \mathbf{E} поля *свободно* движущегося точечного заряда q имеют вид, показанный на рис. 11.2, где \mathbf{v} — скорость заряда. Изображенная здесь картина соответствует мгновенной “фотографии” конфигурации электрического поля. Вектор \mathbf{E} в произвольной точке P системы отсчета направлен *вдоль* радиуса-вектора \mathbf{r} , проведенного из точки, где находится заряд в данный момент, в точку P .

Модуль вектора \mathbf{E} определяется формулой

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta)^{\frac{3}{2}}}, \quad (11.7)$$

где $\beta = \frac{v}{c}$; ϑ — угол между радиусом-вектором \mathbf{r} и вектором \mathbf{v} — скоростью заряда.

Электрическое поле “сплющивается” в направлении движения заряда (см. рис. 11.2), причем в тем большей степени, чем ближе скорость заряда v к скорости c . Следует также иметь в виду, что поле, показанное на этом рисунке, “перемещается” вместе с зарядом, вследствие чего поле \mathbf{E} в системе отсчета, относительно которой заряд движется, изменяется со временем.

Зная поле \mathbf{E} , можно найти и поле \mathbf{B} в этой же системе отсчета:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} [\vec{v}\vec{E}] = \frac{\mu_0 q}{4\pi r^3} \frac{[\vec{v}\vec{r}]}{(1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta)^{\frac{3}{2}}}. \quad (11.8)$$

Эта формула является следствием соотношения (11.5), в котором произведена замена штрихованных величин на нештрихованные и одновременно \mathbf{v} на $-\mathbf{v}$.

При $v \ll c$ ($\beta \ll 1$) выражения (11.6) и (11.9) переходят соответственно в (?1.2) и (?6.3).

11.3 Инварианты электромагнитного поля

Поскольку векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} , характеризующие электромагнитное поле, зависят от системы отсчета (в той же самой пространственно-временной точке), возникает естественный вопрос об инвариантах, т.е. не зависящих от системы отсчета количественных характеристиках электромагнитного поля.

Можно показать, что существуют два таких инварианта, представляющие собой комбинации векторов \mathbf{E} и \mathbf{B} , это

$$\mathbf{E}\mathbf{B} = \text{inv}, \quad E^2 - c^2 B^2 = \text{inv}. \quad (11.9)$$

Инвариантность этих величин (относительно преобразований Лоренца) является следствием формул преобразования полей (11.1) или (11.2). Более подробно этот вопрос рассмотрен в задаче 8.9.

Использование данных инвариантов позволяет в ряде случаев быстро и просто находить решение и делать соответствующие выводы и предсказания.

Глава 12

Электромагнитная индукция

12.1 Электромагнитная индукция

12.1.1 Индукция токов в движущихся проводниках

Дается количественная формулировка индукции токов в движущихся проводниках. Описываются физические процессы в генераторах переменного тока.

Возникновение э. д. с. в движущемся проводнике. При движении проводника в магнитном поле его свободные электроны под действием силы Лоренца приводятся в движение относительно проводника, т. е. в проводнике возникает электрический ток. Это явление называется индукцией токов в движущихся проводниках.

Рассмотрим прямолинейный участок DG проводника (рис. 12.1), который, двигаясь со скоростью \mathbf{v} , скользит по проводникам CK и AL как направляющим, постоянно сохраняя контур $AGDCA$ замкнутым. Индукция внешнего однородного магнитного поля перпендикулярна плоскости, в которой лежит контур. На заряды в движущемся проводнике действует сила Лоренца

$$\vec{F} = e\vec{v} \times \vec{B}, \quad (12.1)$$

коллинеарная DG . Силы, действующие на положительные и отрицательные заряды проводника, показаны соответственно векторами $F_{(+)}$ и $F_{(-)}$. Свободные электроны приходят в движение и образуют электрический ток. Его направление принимается за положительный обход контура и, следовательно, положительной нормалью к поверхности, в которой лежит контур, является вектор \mathbf{n} на этом рисунке.

Наличие силы \mathbf{F} [см. (12.1)] эквивалентно тому, что в проводнике действует на заряды эффективное электрическое поле

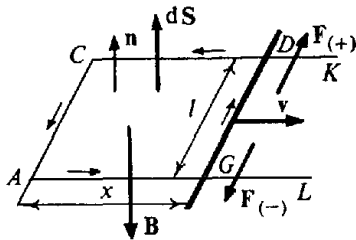


Рис. 12.1

$$\vec{E}_{\text{эф}} = \frac{\vec{F}}{e} = \vec{v} \times \vec{B} \quad (12.2)$$

и поэтому э. д. с. индукции между некоторыми точками 1 и 2 проводника равна

$$(\Delta\mathcal{E}_i)_{21} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{E}_{\text{эф}} \cdot d\vec{l} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l}. \quad (12.3)$$

В рассматриваемом случае эта э. д. с. возникает между точками D и G :

$$(\Delta\mathcal{E}_i)_{DG} = \int_{(G)}^{(D)} vBdl = vBl. \quad (12.4)$$

На неподвижных участках замкнутого контура электродвижущая сила не образуется. Поэтому электродвижущая сила индукции в замкнутом контуре $AGDCA$, вызванная движением его части DG во внешнем поле, равна

$$\mathcal{E}_i = \int_{AGDCA} \vec{E}_{\text{эф}} \cdot d\vec{\ell} = vBl. \quad (12.5)$$

Выразив скорость проводника DG в виде

$$v = \frac{dx}{dt}, \quad (12.6)$$

где x — координата его контактов в точках D и G с направляющими проводниками, запишем (12.5) в виде

$$\mathcal{E}_i = \frac{dx\ell B}{dt}. \quad (12.7)$$

Примем во внимание, что

$$\Phi = -x\ell B. \quad (12.8)$$

— поток магнитной индукции сквозь поверхность, ограниченную контуром $AGDCA$. Знак минус в (12.8) показывает, что направления \mathbf{B} и $d\mathbf{S}$ противоположны. Поэтому окончательно (12.5) можно записать в форме

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (12.9)$$

т. е. при движении замкнутого проводника во внешнем магнитном поле в его контуре возникает электродвижущая сила индукции, равная скорости изменения потока индукции внешнего магнитного поля сквозь поверхность, натянутую на замкнутый контур.

Формула (12.9) выведена для частного случая, когда движется лишь часть проводника в плоскости, перпендикулярной индукции магнитного поля. Если движется несколько участков проводника, то электродвижущая сила индукции в замкнутом контуре равна алгебраической сумме э. д. с. индукции, возникших на участках. Поэтому формула (12.9) без всяких дальнейших вычислений обобщается на случай произвольного движения проводника в плоскости, перпендикулярной направлению вектора индукции магнитного поля. При этом движении контур проводника может, конечно, произвольно деформироваться.

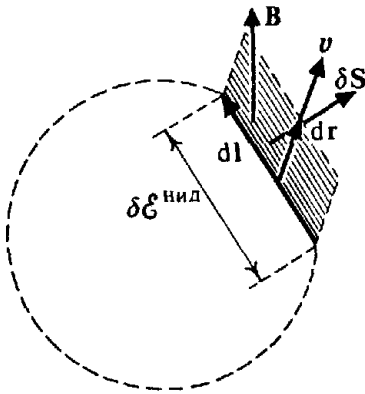


Рис. 12.2

Обобщение на произвольный случай. Рассмотрим элемент длины проводника $d\vec{\ell}$, движущийся со скоростью $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ (рис.12.2). На этой длине в соответствии с формулой (12.3) создается электродвижущая сила

$$d\mathcal{E}_i = \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \frac{d}{dt} (d\vec{r} \times \vec{B} \cdot d\vec{\ell}). \quad (12.10)$$

Смешанное произведение в (12.10) преобразуется следующим образом:

$$d\vec{r} \times \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = d\vec{\ell} \times d\vec{r} \cdot \vec{B} = -d\vec{r} \times d\vec{\ell} \cdot \vec{B} = -d\vec{S} \cdot \vec{B} = -\delta\Phi, \quad (12.11)$$

где $\delta\Phi$ — поток магнитной индукции сквозь элемент поверхности $d\mathbf{S} = d\mathbf{r} \times d\mathbf{\ell}$, образованный элементом длины $d\ell$ при его движении. Положительное направление нормали к

этому элементу поверхности выбирается совпадающим с положительным направлением нормали к поверхности, ограничиваемой замкнутым контуром.

Подставляя (12.11) в (12.10), получаем

$$d\mathcal{E}_i = -\frac{d}{dt}\delta\Phi. \quad (12.12)$$

Для нахождения полной электродвижущей силы индукции в замкнутом контуре надо просуммировать э. д. с. индукции от всех элементов $d\ell$ этого контура:

$$\mathcal{E}_i = \oint d\mathcal{E}_i = -\frac{d}{dt} \oint \delta\Phi = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (12.13)$$

где

$$\oint \delta\Phi = \Phi \quad (12.14)$$

— изменение потока индукции сквозь поверхность, ограниченную замкнутым контуром.

Формула (12.13) совпадает с (12.9). Тем самым доказано, что (12.9) справедлива при произвольных движениях и деформациях замкнутого контура.

Генераторы переменного тока. Если замкнутый проводник движется в магнитном поле так, что охватываемый им поток магнитной индукции непрерывно изменяется, то в нем непрерывно генерируются электродвижущая сила индукции и соответствующий переменный ток, т. е. такой замкнутый контур является **генератором переменного тока**.

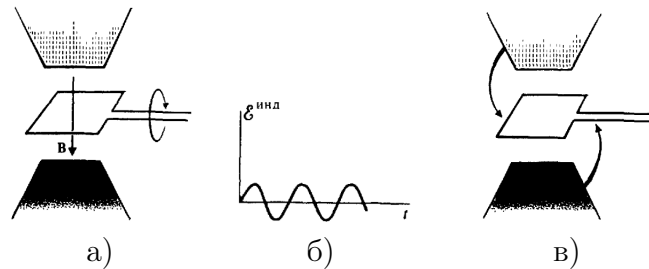


Рис. 12.3. Схема генератора переменного тока.

Простейшая схема генератора переменного тока изображена на рис. 12.3,а. Если магнитное поле однородно, а рамка вращается в нем с постоянной угловой скоростью, то возникающая в рамке \mathcal{E}_i является гармонической электродвижущей силой, частота которой равна частоте вращения рамки в магнитном поле. В замкнутом контуре возникает переменный ток соответствующей частоты (рис. 12.3,б).

Если вместо одного витка в магнитном поле движутся два параллельных последовательно соединенных витка, то электродвижущая сила индукции возрастает в два раза. Поэтому при практическом осуществлении генераторов используются намотки из многих витков. Вопросы о наиболее целесообразном осуществлении намоток, о создании магнитного поля, о снятии тока с движущихся обмоток и т. д. подробно рассматриваются в электротехнике. Отметим лишь, что снятие тока с движущихся проводников при большой силе тока является не простой задачей. Поэтому часто вместо движения проводников с током осуществляют движение источников магнитного поля при неподвижных проводниках. В простейшей схеме (рис. 12.3,в) это означает движение постоянных магнитов вокруг неподвижной рамки с током. В неподвижной рамке при этом возбуждается электродвижущая сила индукции. Количественно эта э. д. с. индукции при одинаковых относительных скоростях магнитов и рамки одна и та же. Однако физическая сущность происходящих при этом явлений в этих двух случаях различна (см. § 45).

Первыми генераторами были машины с постоянными магнитами, но уже в 1866 г. был сконструирован генератор, в котором магнитное поле создавалось электромагнитом. После этого конструкция генераторов быстро совершенствовалась.

Закон сохранения энергии. При прохождении тока по цепи с омическим сопротивлением выделяется джоулева теплота. Энергия, выделяемая в форме теплоты, получается в результате работы механических сил в генераторе электрического тока. При переходе энергии из одной формы в другую соблюдается, конечно, закон сохранения энергии. Проследим за этим на простейшем примере (рис. 12.1).

Пусть R – сопротивление в контуре $AGDCA$, а I – сила тока в цепи. Следовательно, в цепи током в форме теплоты выделяется энергия с мощностью

$$P_1 = I^2 R. \quad (12.15)$$

С другой стороны, при движении участка проводника DG с током силой I необходимо преодолеть силу Ампера

$$F = I\ell B. \quad (12.16)$$

Следовательно, силы, осуществляющие движение проводника, должны развивать мощность

$$P_2 = Fv = I\ell B dx/dt = -I\mathcal{E}_i = -I^2 R, \quad (12.17)$$

где учтена формула (12.9) и принято во внимание, что $\mathcal{E}_i = IR$. Знак минус в (12.17) показывает, что работа производится над системой.

Сравнение (12.15) и (12.17) показывает, что $P_1 + P_2 = 0$. Это означает, что энергия, выделяемая в форме теплоты, в контуре равна работе сил, приводящих проводник в движение, т. е. сторонними электродвижущими силами в данном случае в конечном счете являются механические силы, осуществляющие движение проводника.

12.2 Закон электромагнитной индукции Фарадея

Обсуждаются физическая сущность и математическая формулировка закона электромагнитной индукции Фарадея. Анализируется соотношение между электромагнитной индукцией Фарадея и индукцией тока в движущихся проводниках.

Определение. В 1831 г. Фарадей экспериментально открыл явление электромагнитной индукции, состоящее в возникновении электрического тока в замкнутом проводнике при изменении потока магнитной индукции, охватываемого контуром. Фарадей обнаружил, что индукционный ток можно вызвать двумя различными способами. Дальнейшее поясняет рис. 12.4, где изображены катушка K с током I (она создает магнитное поле) и рамка P с гальванометром Γ — индикатором индукционного тока.

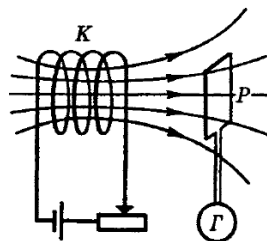


Рис. 12.4

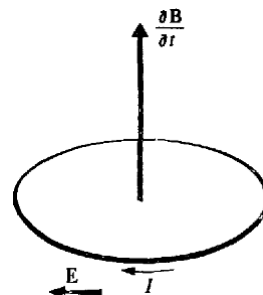


Рис. 12.5

1-й способ — перемещение рамки P (или отдельных ее частей) в поле неподвижной катушки K .

2-й способ — рамка P неподвижна, но изменяется магнитное поле — или за счет движения катушки K , или вследствие изменения силы тока I в ней, или в результате того

и другого вместе. Во всех этих случаях гальванометр Γ будет показывать наличие индукционного тока в рамке P . Правило, определяющее направление э. д. с. индукции, было сформулировано в 1833 г. Э.Х. Ленцем (1804–1865): *индукционный ток направлен так, что создаваемое им поле препятствует изменению магнитного потока*. Иначе говоря, направление возникающего в контуре тока составляет с направлением изменения потока магнитной индукции левовинтовую систему (рис. 12.5). В 1845 г. Ф.Э. Нейман (1798–1895) дал математическое определение **закона электромагнитной индукции** в современной форме:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (12.18)$$

причем контур считается неподвижным.

Физическая сущность явления. По внешнему виду формула (12.18) полностью совпадает с (12.9), но физическое содержание ее совершенно иное. *Возникновение э. д. с., учитываемое формулой (12.9), связано с действием силы Лоренца на движущиеся заряды. В возникновении э. д. с., учитываемой формулой (12.18), никакая сила Лоренца не участвует, поскольку проводники неподвижны.* Однако в проводнике возникает электрический ток, поэтому можно заключить, что в нем имеется электрическое поле. Следовательно, *закон Фарадея (12.18) выражает новое физическое явление: изменяющееся магнитное поле порождает электрическое поле. Таким образом, электрическое поле порождается не только электрическими зарядами, но и изменяющимся магнитным полем.*

Строго говоря, наличие тока в замкнутом проводнике показывает, что электрическое поле имеется лишь внутри проводника. Однако проводник в данном случае играет роль устройства для обнаружения электрического поля. При отсутствии проводника изменяющееся магнитное поле также порождает электрическое поле. Это можно показать, например, тем, что на заряд в изменяющемся магнитном поле действует электрическая сила (см. § 56). Это доказывает, что электромагнитная индукция является всеобщим фундаментальным законом природы, устанавливающим связь между электрическими и магнитными полями. Различное физическое содержание описываемых формулами (12.9) и (12.18) явлений очевидно из такого примера. Предположим, что проводник DG на рис. 12.1 движется со скоростью \mathbf{v} , но одновременно магнитная индукция \mathbf{B} уменьшается. Вследствие движения проводника в замкнутом контуре появляется э. д. с. индукции, которая вызывает ток (рис. 12.1). Изменение \mathbf{B} по закону электромагнитной индукции Фарадея вызывает в контуре также э. д. с. индукции, которая в данном случае направлена противоположно той, которая возникает в результате движения участка проводника DG . Можно подобрать такую скорость изменения $\mathbf{B}(\partial\vec{B}/\partial t)$, что эти две э. д. с. будут взаимно компенсироваться. В результате в замкнутом контуре не будет тока, потому что полная э. д. с. индукции равна нулю. Однако эта взаимная компенсация э. д. с. индукции происходит в замкнутом контуре в целом, а не в каждой точке контура. Э. д. с. индукции за счет движения проводника возникает только на участке DG , а э. д. с. индукции Фарадея возникает как на участке DG , так и на остальных участках проводника DC , CA и AG . В результате движения на элементе проводника $d\vec{\ell}$ возникает э. д. с. индукции, зависящая только от \mathbf{B} и скорости \mathbf{v} движения этого элемента, но не зависящая от $\partial\vec{B}/\partial t$. В результате изменения индукции на элементе проводника $d\vec{\ell}$ появляется э. д. с. индукции Фарадея, которая не зависит от индукции \mathbf{B} и скорости \mathbf{v} движения этого элемента, а зависит только от $\partial\vec{B}/\partial t$. Это и доказывает, что физическая природа э. д. с. индукции в этих двух случаях различна.

12.2.1 Движущийся проводник в переменном магнитном поле

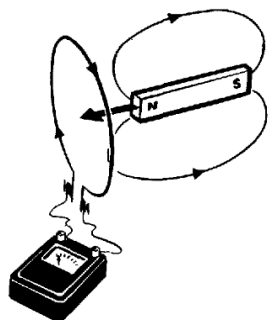


Рис. 12.6

Если замкнутый проводник движется в переменном магнитном поле, испытывая при этом произвольные деформации формы, то э. д. с. индукции в нем возникает как за счет движения и деформации, учитываемой формулой (12.9), так и в результате изменения индукции магнитного поля, учитываемого аналогичной формулой (12.18). Поэтому можно сказать, что э. д. с. индукции в проводнике определяется формулой (12.18), причем под $d\Phi/dt$ понимается полная скорость изменения потока индукции, охватываемого проводником, как за счет его движения и деформации, так и в результате изменения магнитного поля. В связи с этим закон (12.18) можно представить в таком виде:

$$\mathcal{E}_i = \oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \oint [\vec{v}\vec{B}] d\vec{l}. \quad (12.19)$$

Применение электромагнитной индукции к генераторам переменного тока. Теперь ясно, почему электрический ток можно генерировать не только движением проводников в магнитном поле, но и движением магнитов при неподвижных проводниках. На рис. 12.6 изображена схема демонстрации электромагнитной индукции.

12.3 Дифференциальная формулировка закона электромагнитной индукции

Дается дифференциальная формулировка закона электромагнитной индукции.

Формулировка. Запишем закон электромагнитной индукции Фарадея [см. (12.18)] в виде

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}, \quad (12.20)$$

где L — контур, S — поверхность, натянутая на контур L . В (12.20) учтены определения:

$$\mathcal{E}_i = \int_L \vec{E} \cdot d\vec{l}, \quad \Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}. \quad (12.21)$$

Заметим, что между направлением обхода контура L вектором $d\vec{S}$ соблюдается правовинтовое соотношение. Необходимо также обратить внимание на то, что в определении потока индукции Φ [см. (12.21)] поверхность S , сквозь которую вычисляется поток, является произвольной, натянутой на контур L поверхностью. Такое, определение предполагает, что этот интеграл не зависит от формы поверхности, важно лишь, чтобы поверхность была ограничена контуром L или, как говорят, натянута на контур L . Докажем это. Выберем две какие либо поверхности S_1 и S_2 , натянутые на контур L . Их совокупность составляет замкнутую поверхность $S = S_1 + S_2$, ограничивающую некоторый объем V между ними. Поток вектора \vec{B} сквозь замкнутую поверхность S равен нулю, поскольку по теореме Гаусса – Остроградского он равен интегралу по объему V , ограниченному поверхностью S , от $\text{div}\vec{B} = 0$. Из этого следует утверждение о равенстве потоков через S_1 и S_2 (знаки потоков одинаковы при одинаковой относительно направления обхода контура ориентировке положительных нормалей к этим поверхностям).

Преобразуем левую часть (12.20) по формуле Стокса:

$$\int_L \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S}. \quad (12.22)$$

В результате получаем

$$\int_L \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}, \quad (12.23)$$

причем производная по t внесена под знак интеграла на том основании, что площадь интегрирования не зависит от времени. Так как S произвольна, то из (12.23) следует, что

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (12.24)$$

Уравнение (12.24) является **дифференциальной записью закона электромагнитной индукции Фарадея**. Оно описывает закон порождения электрического поля в некоторой точке за счет изменения индукции магнитного поля в той же точке. Поле \mathbf{E} часто называют индукционным.

12.3.1 Непотенциальность индукционного электрического поля

В переменном магнитном поле $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq 0$ и, следовательно, в соответствии с (12.24)

$$\text{rot } \vec{E} \neq 0. \quad (12.25)$$

Это означает, что *индукционное электрическое поле в отличие от электростатического, порождаемого неподвижными зарядами, не является потенциальным*. Работа перемещения заряда q в нем по замкнутому контуру, вообще говоря, не равна нулю:

$$A = q\mathcal{E}_i = q \int_L \vec{E} \cdot d\vec{\ell}. \quad (12.26)$$

Отсюда, в частности, следует, что это поле не может быть представлено в виде градиента от некоторой функции, т. е. не может быть представлено в виде (14.27). Необходимо использовать отличное от [(14.27), т.е. $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$] представление.

12.4 Самоиндукция. Индуктивность соленоида

Рассмотрим еще несколько примеров проявления электромагнитной индукции. Электрический ток в замкнутом контуре, создает вокруг себя магнитное поле. Магнитная индукция этого поля по закону Био-Савара-Лапласа пропорциональна силе тока. Следовательно, создаваемый контуром и проходящий через контур магнитный поток, пропорциональный магнитной индукции, также пропорционален силе тока:

$$\Phi = LI, \quad (12.27)$$

где L – коэффициент пропорциональности, называемый *индуктивностью контура* или *коэффициентом самоиндукции*.

При изменении силы тока в контуре будет изменяться и магнитный поток, поэтому в контуре будет индуцироваться ЭДС *самоиндукции*, обусловленная изменением собственного магнитного поля:

$$\mathcal{E}_s = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(LI). \quad (12.28)$$

Если при изменении тока индуктивность L остается постоянной (не меняется конфигурация контура и нет ферромагнетиков), то

$$\mathcal{E}_s = -L\frac{dI}{dt} \quad (L = const). \quad (12.29)$$

Знак “минус” в соответствии с правилом Ленца показывает, что *наличие индуктивности в контуре приводит к замедлению изменения тока в нем*. Если ток в контуре возрастает, то ток самоиндукции тормозит это возрастание. Если ток в контуре убывает, то ток самоиндукции замедляет это убывание. Таким образом, индуктивность придает электрической цепи *электрическую инертность* – по аналогии с тем, что масса придает телу механическую инертность.

Единица индуктивности в системе СИ – *генри* (Гн). $1 \text{ Гн} = 1 \text{ Вб/А} = 1 \text{ В} \cdot \text{с/А}$.

В случаях, когда нужна катушка с весьма малой индуктивностью, применяют *бифилярные обмотки*. Чтобы получить бифилярную обмотку, проволоку складывают вдвое и наматывают на каркас катушки. При такой намотке ток в двух соседних витках имеет противоположные направления, и суммарный магнитный поток в катушке близок к нулю.

Рассмотрим катушку из N последовательных витков. Если в одном витке катушки наводится ЭДС самоиндукции \mathcal{E}_s , то наводимая во всей катушке ЭДС самоиндукции определяется правилом сложения ЭДС при последовательном соединении и будет в N раз больше:

$$\mathcal{E}_N = N\mathcal{E}_s = -N\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(\Phi N)}{dt} = -\frac{d\psi}{dt}. \quad (12.30)$$

Здесь введено понятие *потокосцепления*

$$\psi = \Phi N. \quad (12.31)$$

Сопоставляя выражения (12.28) и (12.30), получим:

$$\psi = LI. \quad (12.32)$$

Рассчитаем для примера индуктивность соленоида с числом витков на единицу длины $n = N/\ell$. Потокосцепление соленоида с учетом формулы (22.22) для магнитной индукции внутри соленоида $B = \mu_0\mu nI$ равно:

$$\psi = \Phi N = \mu_0\mu n^2 IS\ell = \mu_0\mu n^2 VI = LI. \quad (12.33)$$

Из последнего равенства получаем *индуктивность соленоида*:

$$L = \mu_0\mu n^2 V. \quad (12.34)$$

Здесь $V = S\ell$ – объем соленоида.

Семь записанных выше уравнений составляют основу электродинамики.

Глава 13

Электромагнитные волны

13.1 Уравнения Максвелла

13.1.1 Электромагнитное поле. Ток смещения. Уравнения Максвелла в интегральной форме

Из опыта и частных законов видно, что магнитное поле связано с электрическим, электрическое поле — с магнитным, и оба они определяются расположением и перемещением зарядов. В результате вместо отдельных электрического и магнитного полей в электродинамике принято говорить о едином электромагнитном поле. Наиболее полно и в обобщенном виде эти связи представлены в четырех *уравнениях Максвелла*, сформулированных в 1861–1865 годах. Теория Максвелла — макроскопическая теория, в которой рассматриваются макроскопические поля макроскопических зарядов и токов, пространственная протяженность которых много больше размеров молекул.

Выпишем сначала уравнения Максвелла в интегральной форме. Отметим, что порядок нумерации уравнений может быть произвольным.

Первое уравнение Максвелла — это теорема Гаусса (1.32) для электрического поля:

$$\oint D_n dS = \sum_i q_i.$$

Второе уравнение Максвелла — это теорема Гаусса (9.15) для магнитного поля, опирающаяся на отсутствие магнитных зарядов:

$$\oint B_n dS = 0.$$

Третье уравнение следует из основного закона электромагнитной индукции (24.4):

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Максвелл предположил, что любое переменное магнитное поле возбуждает в пространстве электрическое поле, проявляющееся в индукционном токе в проводниках. При этом ЭДС индукции \mathcal{E}_i определяется циркуляцией вектора напряженности вихревого электрического поля $\oint E_\ell dl$. Таким образом, окончательно с учетом определения магнитного потока *третье уравнение Максвелла* имеет вид:

$$\oint E_\ell dl = -\frac{d}{dt} \int B_n dS. \quad (13.1)$$

Четвертое уравнение Максвелла – это обобщение теоремы о циркуляции (9.16) вектора напряженности магнитного поля: $\oint H_\ell d\ell = \sum_i I_i$. Максвелл предположил, что если переменное магнитное поле возбуждает в пространстве вихревое электрическое поле, то должен существовать и аналогичный эффект для электрического поля: изменение электрического поля должно вызывать вихревое магнитное поле. Для этого он ввел понятие *тока смещения*. В интеграле теоремы о циркуляции справа необходимо учесть помимо токов проводимости иные токи, приводящие к изменению напряженности магнитного поля.

Для примера применим теорему о циркуляции к магнитному полю, созданному переменным электрическим током, перезаряжающим конденсатор. По Максвеллу в непроводящем промежутке конденсатора протекает ток смещения. При этом переменное электрическое поле создает соответствующее току смещения магнитное поле. Найдем этот ток:

$$I_{\text{см}} = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int \sigma dS = \int \frac{d\sigma}{dt} dS = \int \frac{dD}{dt} dS. \quad (13.2)$$

Здесь использовано, что вблизи проводника вектор электрического смещения в соответствии с (18.2) равен: $D = \sigma$. Сравнивая (13.2) со связью плотности тока и силы тока $I_{\text{см}} = \int j_{\text{см}} dS$, получим для плотности тока смещения:

$$j_{\text{см}} = \frac{dD}{dt}. \quad (13.3)$$

В общем случае, когда площадка не перпендикулярна вектору электрического смещения, ток смещения определяется нормальной составляющей вектора электрического смещения, и из (13.2) имеем:

$$I_{\text{см}} = \int \frac{dD_n}{dt} dS. \quad (13.4)$$

Добавив в обобщение теоремы о циркуляции к току проводимости $\int j dS$ ток смещения $\frac{d}{dt} \int D_n dS$, получим *четвертое уравнение Максвелла*:

$$\oint H_\ell d\ell = \int j dS + \frac{d}{dt} \int D_n dS. \quad (13.5)$$

Следовательно, в векторном виде окончательно *система уравнений Максвелла в интегральной форме* может быть записана таким образом:

$$\left. \begin{aligned} \oint_S \vec{D} d\vec{S} &= \sum_i q_i = \int_V \rho dV; \\ \oint_S \vec{B} d\vec{S} &= 0; \\ \oint_L \vec{E} d\vec{\ell} &= -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S}; \\ \oint_L \vec{H} d\vec{\ell} &= \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}. \end{aligned} \right\} \quad (13.6)$$

Полученная система представляет собой основные уравнения электродинамики и позволяет решать самые разные и сложные задачи. Электрические и магнитные свойства среды в ней характеризуются тремя параметрами: диэлектрической проницаемостью ε , магнитной проницаемостью μ и проводимостью γ . Эти параметры среды учитывают реакцию среды на электромагнитное поле. Предполагается, что они известны из опыта. Диэлектрическая и магнитная проницаемости входят в уравнения связи электрического смещения с напряженностью электрического поля и магнитной индукции. Для изотропной (не сегнетоэлектрической и не ферромагнитной) среды эти уравнения связи имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu_0 \mu \vec{H} \end{aligned} \right\} \quad (13.7)$$

В свою очередь проводимость дает связь плотности тока с напряженностью поля с помощью закона Ома в дифференциальной форме (5.11):

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}. \quad (13.8)$$

Семь записанных выше уравнений составляют основу электродинамики.

13.1.2 Уравнения Максвелла в дифференциальной форме

Перейдем теперь к уравнениям Максвелла в дифференциальной форме, которые могут быть получены из уравнений Максвелла в интегральной форме с помощью двух известных математических теорем. *Теорема Остроградского – Гаусса*

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{E} dV, \quad (13.9)$$

позволяет преобразовать интеграл по замкнутой поверхности S в интеграл по объему V , ограниченному этой поверхностью.

А *теорема Стокса*

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \int_S \operatorname{rot} \vec{E} d\vec{S} \quad (13.10)$$

дает возможность преобразовать интеграл по замкнутому контуру L в интеграл по поверхности S , натянутой на этот контур. Сформулированные теоремы можно применять не только для вектора, но и для любого другого вектора.

Преобразуем с помощью (13.9) первые два уравнения системы (25.6), а с помощью (13.10) два вторых. Поскольку интегралы равны для произвольных объемов и поверхностей, то равны и подынтегральные выражения. Таким образом, получим *систему уравнений Максвелла в дифференциальной форме*:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= \rho; \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0; \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (13.11)$$

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \int \vec{j} d\vec{S} + \frac{d}{dt} \int \vec{D} d\vec{S} \quad (13.12)$$

$$\left. \begin{aligned} D &= \epsilon_0 \epsilon E; \\ B &= \mu_0 \mu H. \end{aligned} \right\} \quad (13.13)$$

Для решения конкретных задач к этим уравнениям по-прежнему надо добавить уравнения связи (13.12) – (13.13). Но теперь этого недостаточно. При переходе от интегрального вида к дифференциальному в уравнениях Максвелла потерялись граничные условия – примерно так же, как при дифференцировании уравнения теряются константы. На границе раздела сред производные, входящие в уравнения Максвелла, вообще говоря, не определены. Поэтому необходимо дополнительно пользоваться *граничными условиями для электромагнитного поля*, вытекающими из уравнений Максвелла в интегральной форме (4.12), (4.14), (4.13), (4.14):

$$\left. \begin{aligned} D_{n1} &= D_{n2} \\ E_{\tau 2} &= E_{\tau 1} \\ B_{n1} &= B_{n2} \\ H_{\tau 2} &= H_{\tau 1} \end{aligned} \right\} \quad (13.14)$$

Напомним, что эти граничные условия получены для случая, если на границе раздела отсутствуют свободные заряды и токи проводимости.

Если электрическое и магнитное поля стационарны ($\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$), то, как следует из системы (13.11), эти поля существуют независимо друг от друга. В этом случае электрическое поле описывается *двумя основными уравнениями электростатики*:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= \rho; \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13.15)$$

Соответственно магнитное поле описывается *двумя основными уравнениями магнитостатики*:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} &= 0; \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j}. \end{aligned} \right\} \quad (13.16)$$

Рассмотрим теперь *следствия из уравнений Максвелла*. К этим следствиям, в первую очередь, можно отнести закон сохранения электрического заряда, закон сохранения электромагнитной энергии (теорема Пойнтинга) и волновое уравнение.

13.1.3 Закон сохранения заряда. Теорема Пойнтинга. Энергия электромагнитного поля. Вектор Умова-Пойнтинга

В системе уравнений Максвелла в неявном виде содержится *закон сохранения электрического заряда*. Действительно, найдем дивергенцию от правой и левой частей четвертого уравнения Максвелла :

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{div} \vec{j} + \operatorname{div} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (13.17)$$

Воспользуемся известным математическим тождеством (его можно проверить непосредственным вычислением), справедливым для любого вектора:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} = 0. \quad (13.18)$$

Поскольку операция вычисления дивергенции сводится к дифференцированию по пространственным координатам, то порядок вычисления производной по времени и вычисления дивергенции в (13.17) можно поменять местами:

$$0 = \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial (\operatorname{div} \vec{D})}{\partial t}. \quad (13.19)$$

Далее воспользуемся уравнением Максвелла $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$ и получим *закон сохранения электрического заряда в дифференциальной форме*:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{j}. \quad (13.20)$$

Смысл полученного уравнения в том, что увеличение плотности заряда в точке обеспечивается притоком заряда из соседних точек пространства (по физическому смыслу дивергенции как потока вектора из точки). При этом закон сохранения электрического заряда не содержит источников заряда. Отсюда следует, что электрический заряд не может возникнуть и не может исчезнуть.

Возьмем теперь интеграл от (13.20) по объему, воспользовавшись при этом для плотности тока \vec{j} теоремой Остроградского-Гаусса (13.9) $\oint \vec{j} d\vec{S} = \int \operatorname{div} \vec{j} dV$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = - \oint \vec{j} d\vec{S}. \quad (13.21)$$

Переписав это уравнение в более привычной форме, получим уравнение непрерывности:

$$\oint \vec{j} d\vec{S} = -\frac{\partial q}{\partial t}. \quad (13.22)$$

Физический смысл полученного интегрального выражения прост: ток, вытекающий из объема V через замкнутую поверхность S , равен убыли заряда в единицу времени внутри этого объема V .

Выведем теперь теорему Пойнтинга, определяющую баланс энергии электромагнитного поля в пространстве и времени. Если уравнение Максвелла $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ скалярно умножить на вектор \vec{H} , а уравнение Максвелла $\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ скалярно умножить на вектор \vec{E} и из первого уравнения вычесть второе, получим:

$$\vec{H} \text{rot } \vec{E} - \vec{E} \text{rot } \vec{H} = -\vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{j} \vec{E}. \quad (13.23)$$

Непосредственным вычислением можно проверить, что левую часть уравнения можно выразить через дивергенцию от векторного произведения:

$$\vec{H} \text{rot } \vec{E} - \vec{E} \text{rot } \vec{H} = \text{div} [\vec{E} \vec{H}]. \quad (13.24)$$

Кроме того, удобно сгруппировать два первых члена правой части с помощью очевидного соотношения:

$$\vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{E} \vec{D}}{2} + \frac{\vec{H} \vec{B}}{2} \right). \quad (13.25)$$

Заметим, что в скобках представлена сумма объемных плотностей энергии электрического поля $\frac{\vec{E} \vec{D}}{2}$ и магнитного поля $\frac{\vec{H} \vec{B}}{2}$. Эта сумма дает *объемную плотность энергии электромагнитного поля*:

$$w = \frac{\vec{E} \vec{D}}{2} + \frac{\vec{H} \vec{B}}{2}. \quad (13.26)$$

После таких преобразований получим из (13.23) теорему Пойнтинга:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\text{div} [\vec{E} \vec{H}] - \vec{j} \vec{E}. \quad (13.27)$$

Суть ее сводится к закону сохранения энергии для электромагнитного поля. Первый член в правой части теоремы (по физическому смыслу дивергенции как потока вектора из точки) определяет приток энергии поля в точку извне. При этом *вектор потока электромагнитной энергии*

$$\vec{P} = [\vec{E} \vec{H}] \quad (13.28)$$

называют *вектором Умова-Пойнтинга*. Если проинтегрировать (13.27) по некоему объему, воспользовавшись для преобразования дивергенции теоремой Остроградского-Гаусса (13.9) $\int \text{div} \vec{P} dV = \oint \vec{P} d\vec{S}$, то получим еще одно наглядное интегральное соотношение:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\oint \vec{P} d\vec{S} - \int \vec{j} \vec{E} dV. \quad (13.29)$$

Изменение энергии электромагнитного поля в объеме определяется балансом притока энергии извне и диссипации энергии внутри объема.

13.1.4 Волновое уравнение. Решения волнового уравнения. Интенсивность электромагнитной волны

Запишем систему уравнений Максвелла в дифференциальной форме (13.11) в отсутствие электрических зарядов и токов:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= 0; \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0; \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (13.30)$$

Эта система допускает существование электромагнитного поля в виде электромагнитной волны. Покажем это. Сначала вычислим, например, ротор от обеих частей третьего уравнения Максвелла:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_0 \mu \frac{\partial (\operatorname{rot} \vec{H})}{\partial t}. \quad (13.31)$$

Из математики известно, что

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \nabla^2 \vec{E}, \quad (13.32)$$

где оператор Лапласа ∇^2 дается выражением

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2}. \quad (13.33)$$

Из первого уравнения Максвелла следует:

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} = 0. \quad (13.34)$$

Подставив все это в (13.31) с учетом четвертого уравнения Максвелла, получим:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (13.35)$$

Такое уравнение называется волновым, и может описывать плоскую бегущую волну, распространяющуюся в произвольном направлении в трехмерном пространстве и похожую на упругую волну в упругой среде:

$$\nabla^2 s = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}. \quad (13.36)$$

Здесь v – фазовая скорость волны.

Сравнение последних уравнений позволяет сразу определить фазовую скорость волны:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon}}. \quad (13.37)$$

Можно показать, что решение волнового уравнения для плоской волны в трехмерном пространстве имеет вид:

$$\vec{E}(r, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \vec{r} + \alpha), \quad (13.38)$$

причем

$$v = \frac{\omega}{k}. \quad (13.39)$$

Заметим, что фазовая скорость определяет лишь скорость перемещения косинусоиды (13.38). Можно показать, что скорость переноса энергии и информации волной определяется групповой скоростью, которая равна:

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk}. \quad (13.40)$$

Подчеркнем, что каждая из компонент вектора \vec{E} описывается волновым уравнением (13.35). В одномерном случае волновое уравнение (13.35) сводится к виду:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (13.41)$$

Несложно убедиться, что решением его является выражение

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx + \alpha), \quad (13.42)$$

Это решение представляет собой волну, бегущую вдоль оси x . Заметим, что фазовая скорость электромагнитной волны в вакууме равна скорости света c . Поэтому из формулы для фазовой скорости (13.37) следует связь трех физических констант:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}. \quad (13.43)$$

Система уравнений Максвелла в дифференциальной форме (13.30) в отсутствие электрических зарядов и токов симметрична относительно электрического и магнитного полей. Поэтому, очевидно, что вычисление ротора от обеих частей четвертого уравнения Максвелла и последующие преобразования дадут для магнитного поля уравнение, аналогичное (13.35):

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}. \quad (13.44)$$

Оно имеет решением по аналогии с (13.38)

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha), \quad (13.45)$$

Оказывается, что и магнитное поле волны имеет волновой характер, причем фазовая скорость волны магнитного поля совпадает с фазовой скоростью волны электрического поля. Если исследовать решения уравнений непосредственно, то оказывается, что плоские волны электрического и магнитного полей специальным образом ориентированы друг относительно друга, имеют одинаковую начальную фазу колебаний и согласованные между собой амплитуды. Частоты и волновые векторы у этих волн тоже одинаковы. *Электромагнитные волны поперечны*: вектора \vec{E} и \vec{H} лежат в плоскости, перпендикулярной вектору скорости распространения волны. При этом и вектора \vec{E} и \vec{H} взаимно перпендикулярны. Из уравнений Максвелла следует, что электрическое и магнитное поле в любой момент времени в любой точке связаны соотношением:

$$\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E = \sqrt{\mu_0 \mu} H. \quad (13.46)$$

Вычислим теперь *интенсивность электромагнитной волны* $I_{\text{в}}$ — усредненную за период энергию, переносимую волной в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны. Эта важная энергетическая характеристика волны, которую можно получить с учетом (13.28) и (13.42) усреднением модуля вектора Умова-Пойнтинга:

$$I_{\text{в}} = \langle E_0 H_0 \cos^2(\omega t - kx + \alpha) \rangle = E_0 H_0 \langle \cos^2(\omega t - kx + \alpha) \rangle = \frac{E_0 H_0}{2}. \quad (13.47)$$

Здесь используется, что среднее значение квадрата косинуса по периоду равно 1/2.