

Ярославский государственный педагогический университет
им. К. Д. Ушинского

050100.62 "Педагогическое образование"
профили "Физическое образование", "Информатика и информационные технологии в
образовании"

Общая физика

раздел

"Оптика"

составитель П.Г. Штерн

Ярославль
2013

0.1 Электромагнитные волны

0.1.1 Волновое уравнение электромагнитной волны

Из уравнений Максвелла следует важный вывод о существовании принципиально нового физического явления: электромагнитное поле способно существовать *самостоятельно* – без электрических зарядов и токов. При этом изменение его состояния (возмущение поля) обязательно имеет волновой характер. Поля такого рода называют *электромагнитными волнами*. В вакууме эти волны распространяются со скоростью, равной скорости света c .

Рассмотрим однородную нейтральную непроводящую среду с проницаемостями ε и μ , где

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}, \quad \vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}. \quad (0.1.1)$$

Поскольку в данном случае плотности зарядов и токов равны нулю ($\rho = 0$ и $j = 0$), уравнения Максвелла будут иметь вид:

$$\nabla \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}, \quad \nabla \times \vec{H} = \dot{\vec{D}}, \quad (0.1.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{D} = 0, \quad (0.1.3)$$

где уравнения (0.1.2) выражают роторы \vec{E} и \vec{H} , а уравнения (0.1.3) – дивергенции \vec{B} и \vec{D} . Точка над векторами $\dot{\vec{B}}$ и $\dot{\vec{D}}$ означает частную производную этих величин по времени.

Поскольку любые волновые процессы должны подчиняться волновому уравнению, связывающему вторые производные по времени и координатам, попытаемся получить его с помощью уравнений Максвелла. Для этого продифференцируем второе уравнение из (0.1.2) по времени и затем используем первое уравнение:

$$\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu\mu_0} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}). \quad (0.1.4)$$

Двойное векторное произведение в правой части, согласно правилу $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$, – "бац минус цаб", можно записать так:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E}, \quad (0.1.5)$$

так как $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. Подставив (0.1.5) в (0.1.4), мы приходим к волновому уравнению для \mathbf{E} . Аналогично можно получить волновое уравнение и для вектора \mathbf{H} .

Таким образом, мы приходим в результате к идентичным волновым уравнениям для векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} :

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{E} = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\ddot{\mathbf{E}}.} \quad (0.1.6)$$
$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{H} = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\ddot{\mathbf{H}}.}$$

Здесь коэффициент перед второй производной по времени есть величина, обратная квадрату скорости v распространения волны,

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \quad (0.1.7)$$

где c – скорость распространения электромагнитной волны в вакууме:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}. \quad (0.1.8)$$

Оказалось, что $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, т. е. совпадает со скоростью света в вакууме. Это и дало основание Максвеллу предположить задолго до экспериментального подтверждения, что свет представляет собой электромагнитные волны.

0.1.2 Плоская электромагнитная волна

Перепишем уравнения Максвелла (0.1.2) и (0.1.3) в форме более удобной для дальнейшего анализа, имея в виду, что роторы \mathbf{E} и \mathbf{H} можно представить в виде определителей (как векторное произведение двух векторов):

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\mu\mu_0 \dot{\mathbf{H}}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = -\varepsilon\varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}} \quad (0.1.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} E_x + \frac{\partial}{\partial y} E_y + \frac{\partial}{\partial z} E_z = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} H_x + \frac{\partial}{\partial y} H_y + \frac{\partial}{\partial z} H_z = 0, \quad (0.1.10)$$

где $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ - орты осей X, Y, Z.

Установим основные свойства электромагнитной волны на примере плоской волны. Направим ось X перпендикулярно волновым поверхностям. При этом \mathbf{E} и \mathbf{H} , а значит и их проекции на оси Y и Z, не будут зависеть от координат y и z , т. е. соответствующие производные по y и z , будут равны нулю. Поэтому уравнения (0.1.9) и (0.1.10) упрощаются (останутся только производные по x) и принимают вид:

$$\begin{aligned} 0 &= \mu\mu_0 \dot{H}_x, & 0 &= \varepsilon\varepsilon_0 \dot{E}_x, \\ -\partial E_z/\partial x &= -\mu\mu_0 \dot{H}_y, & -\partial H_z/\partial x &= \varepsilon\varepsilon_0 \dot{E}_y, \\ \partial E_y/\partial x &= -\mu\mu_0 \dot{H}_z, & \partial H_y/\partial x &= \varepsilon\varepsilon_0 \dot{E}_z, \\ \partial E_x/\partial x &= 0, & \partial H_x/\partial x &= 0. \end{aligned} \quad (0.1.11)$$

Из условий $\partial E_x/\partial x = 0$, и $\dot{E}_x = 0$ следует, что E_x не зависит ни от x , ни от t (аналогично и для H_x). Это значит, что отличные от нуля E_x и H_x могут быть обусловлены лишь постоянными однородными полями, накладывающимися на поле волны. А для переменного поля плоской волны $E_x = 0$ и $H_x = 0$, т. е. векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} перпендикулярны направлению распространения волны-оси X. Значит, электромагнитная волна является *поперечной*.

Кроме того, оказывается, векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} в электромагнитной волне взаимно ортогональны. Чтобы убедиться в этом, объединим средние уравнения (0.1.11), содержащие, например, E_y и H_z , в пару:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\mu_0 \dot{H}_z \quad \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\varepsilon\varepsilon_0 \dot{E}_y \quad (0.1.12)$$

(можно было бы взять и другую пару, содержащую производные E_z и H_y). Из этих уравнений видно, что изменение во времени, скажем, магнитного поля, направленного вдоль оси Z, порождает электрическое поле E_y вдоль оси Y. Изменение во времени поля E_y в свою очередь порождает поле H_z и т. д. Ни поля E_z , ни поля H_y при этом не возникает. А это и значит, что $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$.

Связь мгновенных значений \mathbf{E} и \mathbf{H} . В нашем случае, когда плоская волна распространяется вдоль оси X, например, в ее положительном направлении,

$$E_y = E_y(t - x/v), \quad H_z = H_z(t - x/v), \quad (0.1.13)$$

где E_y и H_z - некоторые функции, характеризующие форму волны. Введя обозначение $\varphi = t - x/v$, найдем производные E_y по x и H_z по t - в соответствии с (0.1.12):

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial \varphi} \left(-\frac{1}{v} \right); \quad \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \cdot 1.$$

Подставив эти выражения в первое уравнение (0.1.12), получим:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial E_y}{\partial \varphi} = \mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial \varphi},$$

или с учетом того, что $v = 1/\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}$,

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{\partial E_y}{\partial \varphi} = \sqrt{\mu\mu_0} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \varphi}.$$

Отсюда следует, что $\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} \cdot E_y = \sqrt{\mu\mu_0} \cdot H_z + const$, где произвольная константа обусловлена наличием постоянного электрического и магнитного полей. Нас интересует только переменное поле, поэтому $const = 0$, в результате мы получим:

$$\boxed{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} \cdot E_y = \sqrt{\mu\mu_0} \cdot H_z.} \quad (0.1.14)$$

Это выражение означает, что \mathbf{E} и \mathbf{H} не только взаимно ортогональны, но и составляют правовинтовую систему с направлением распространения: мы ведь рассмотрели случай, когда волна распространяется в положительном направлении оси X (рис. 1).

Кроме того, \mathbf{E} и \mathbf{H} , согласно (0.1.14), изменяются при этом синфазно: E_y и H_z одинаковы в каждый момент по знаку, одновременно обращаются в нуль и одновременно достигают максимума, что и показано на рис. 2 – мгновенная картина в некоторый момент.

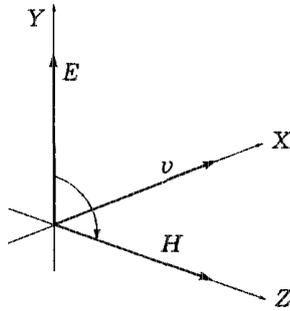


Рис. 1

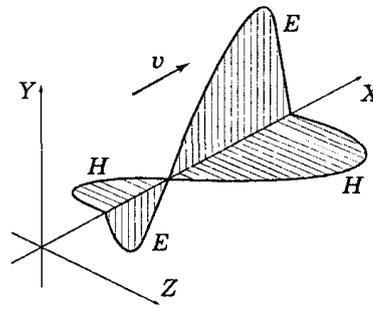


Рис. 2

Заметим, что если бы мы рассмотрели волну, распространяющуюся в отрицательном направлении оси X , то E_y и H_z изменялись бы в противофазе ($\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} \cdot E_y = -\sqrt{\mu\mu_0} \cdot H_z$). Однако по-прежнему оба вектора, \mathbf{E} и \mathbf{H} , составляли бы правовинтовую систему с направлением распространения. Это же относится и к случаю, когда \mathbf{E} направлен вдоль оси Z , а \mathbf{H} – вдоль оси Y , т. е. их проекции E_z и H_y .

Выяснив эти детали, индексы y и z у проекций векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} можно не писать (как это обычно и делают). Поэтому уравнение, например, плоской бегущей гармонической волны – она представляет особый интерес – записывают так:

$$E = E_m \cos(\omega t - kx), \quad H = H_m \cos(\omega t - kx), \quad (0.1.15)$$

где знак минус в скобках означает, что волна распространяется в положительном направлении оси X . В этих выражениях ω – круговая (циклическая) частота колебаний, k – волновое число ($k = 2\pi/\lambda$, λ – длина волны).

Заметим, что когда говорят, что плоская волна распространяется, например, в положительном направлении оси X , то это означает, что с этим направлением совпадает ее волновой вектор \mathbf{k} или, другими словами, ее волновые поверхности ортогональны оси X . Но при этом колебания распространяются очевидно и в других направлениях.

Пример 1. Плоская гармоническая электромагнитная волна распространяется в вакууме так, что ее волновой вектор \mathbf{k} перпендикулярен оси Z и составляет угол $\alpha = 60^\circ$ с ортом оси X . Найдём скорость распространения колебаний вдоль оси X .

Изобразив рисунок, аналогичный рис. 1, найдём, что искомая скорость $v = c/\cos \alpha = 2c$! Полученный результат не противоречит теории относительности: фазовая скорость может быть любой, в отличие от скорости сигнала, которая не может быть больше c – скорости света в вакууме.

Теперь рассмотрим пример, относящийся к формуле (0.1.14) – тоже на связь амплитуд электрической и магнитной составляющих волны, но не в скалярном, а в векторном виде.

Пример 2. В вакууме распространяется гармоническая плоская электромагнитная волна, электрическая составляющая которой имеет вид

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_z E_m \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}).$$

Найдем вектор – амплитуду магнитной составляющей этой волны \mathbf{H}_m . Видно, что данная волна распространяется в направлении вектора \mathbf{k} . Значит, три вектора, \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{k} должны составлять правовинтовую систему (см. рис. 1). Отсюда следует, что вектор \mathbf{H} должен быть сонаправлен с вектором $[\mathbf{k}\mathbf{E}]$, направление которого совпадает с ортом $[\mathbf{n}_k \mathbf{e}_z]$, где орт $\mathbf{n}_k = \mathbf{k}/k$. Остается найти модуль вектора \mathbf{H} , т. е. воспользоваться формулой (0.1.14):

$$H_m = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cdot E_m.$$

В результате получим:

$$\mathbf{H} = [\mathbf{n}_k \mathbf{e}_z] \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cdot E_m.$$

0.1.3 Стоячая электромагнитная волна

В механике (см. [3] ч.1, гл.7, п.7.6) было показано, что стоячую упругую волну можно представить как результат суперпозиции двух одинаковых волн, бегущих навстречу друг другу. Это относится и к электромагнитным волнам. Однако надо учесть, что электромагнитная волна характеризуется не одним вектором, а двумя взаимно ортогональными векторами \mathbf{E} и \mathbf{H} .

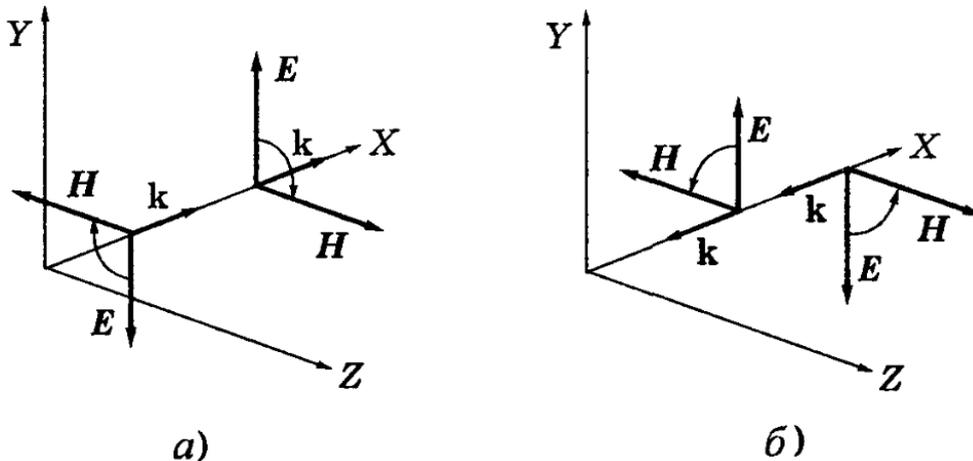


Рис. 3

Пусть волна распространяется в положительном направлении оси X и описывается уравнениями

$$E_y = E_m \cos(\omega t - kx), \quad H_z = H_m \cos(\omega t - kx) \quad (0.1.16)$$

Уравнения волны, распространяющейся в обратном направлении, можно получить из (0.1.16), если заменить в скобках минусы на плюсы и учесть, что векторы \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{k} должны составлять правую тройку. Это поясняет рис. 3, где слева (а) \mathbf{E} и \mathbf{H} меняются в фазе – волна (0.1.16), а справа \mathbf{E} и \mathbf{H} – в противофазе (во встречной волне). Последнее означает, что перед E_m или H_m должен появиться знак минус. Итак, уравнения встречной волны будут иметь вид:

$$E_y = E_m \cos(\omega t + kx), \quad H_z = -H_m \cos(\omega t + kx). \quad (0.1.17)$$

В результате суперпозиции этих двух встречных волн, (0.1.16 и (0.1.17), получим

$$E_y = 2E_m \cos kx \cdot \cos \omega t, \quad H_z = 2H_m \sin kx \cdot \sin \omega t. \quad (0.1.18)$$

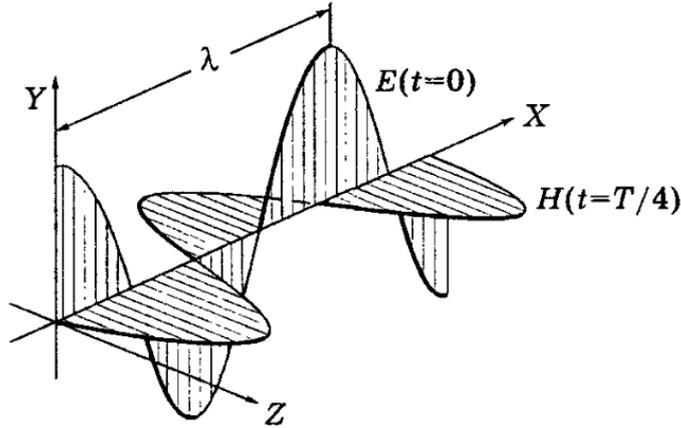


Рис. 4

Это и есть уравнения *стоячей электромагнитной волны*. Они состоят из двух стоячих волн – электрической и магнитной. Видно, что в этой волне колебания векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} сдвинуты по фазе на $\pi/2$ как в пространстве, так и во времени. Если в некоторый момент E_y во всех точках имело максимальное значение и при этом $H_z = 0$, то через четверть периода картина будет обратной: H_z достигнет всюду максимальных значений со сдвигом в пространстве на $\lambda/4$, а E_y обратится в нуль. Таким образом, в процессе колебаний электрическое поле постепенно переходит в магнитное, магнитное – в электрическое и т. д. (рис. 4). Поскольку колебания векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} происходят не в фазе, соотношение (0.1.14) оказывается справедливым только для амплитудных значений E_m и H_m стоячей волны:

$$E_m \sqrt{\epsilon \epsilon_0} = H_m \sqrt{\mu \mu_0}. \quad (0.1.19)$$

0.1.4 Энергия электромагнитной волны

С электромагнитной волной связан перенос энергии. Плотность потока энергии j можно найти с помощью формулы $j = wv$, как произведение плотности энергии w на скорость волны v (см. [2], гл.1 §1.4).

В обычной изотропной среде с проницаемостями ϵ и μ плотность энергии электромагнитного поля равна сумме плотностей энергии электрического и магнитного полей:

$$w = \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu \mu_0 H^2}{2}. \quad (0.1.20)$$

В данной среде справедливо соотношение (0.1.14) между E и H , а это означает, что плотность электрической энергии в бегущей волне равна плотности магнитной энергии. Поэтому (0.1.20) можно записать так:

$$w = \epsilon \epsilon_0 E^2 = \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \cdot EH = \frac{EH}{v}, \quad (0.1.21)$$

где v – скорость волны (0.1.7).

Умножив w на v , получим плотность потока энергии:

$$S = wv = EH. \quad (0.1.22)$$

Векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} взаимно ортогональны и образуют с направлением распространения волны правовинтовую систему. Значит, направление вектора $[\mathbf{EH}]$ совпадает с направлением переноса энергии, а модуль этого вектора равен EH . Поэтому вектор плотности потока электромагнитной энергии \mathbf{S} можно представить как

$$\mathbf{S} = [\mathbf{EH}]. \quad (0.1.23)$$

Вектор \mathbf{S} называют *вектором Пойнтинга*.

В случае бегущей гармонической электромагнитной волны (0.1.16) плотность энергии, согласно (0.1.21), равна

$$w = \varepsilon\varepsilon_0 E_m^2 \cos^2(\omega t - kx).$$

Плотность же потока энергии, как следует из (0.1.22),

$$S = wv = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} \cdot E_m^2 \cos^2(\omega t - kx), \quad (0.1.24)$$

где учтено, что скорость v определяется формулой (0.1.7).

Интенсивность I такой волны равна, по определению, среднему значению плотности потока энергии: $I = \langle S \rangle$. Принимая во внимание, что при усреднении (0.1.24) среднее значение квадрата косинуса равно $\frac{1}{2}$, получим

$$I = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} \cdot \frac{E_m^2}{2}. \quad (0.1.25)$$

Обратим внимание, что I пропорционально квадрату амплитуды, $I \sim E_m^2$.

Пример. В вакууме распространяется плоская гармоническая линейно поляризованная электромагнитная волна частоты ω . Интенсивность волны равна I . Найдем амплитудное значение плотности тока смещения в этой волне. По определению, плотность тока смещения $j_{\text{см}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$, где $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$. Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{E}_m \cos(\omega t - kx)$, тогда амплитудное значение плотности тока смещения $j_{\text{см макс}} = \varepsilon_0 \omega E$. Остается найти E_m . Это делается с помощью формулы (0.1.25):

$$E_m = \sqrt{2I \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}},$$

и мы получим из предыдущих двух формул, что

$$j_{\text{см макс}} = \omega \sqrt{\frac{2\varepsilon_0 I}{c}},$$

где $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$.

В стоячей электромагнитной волне энергия переходит из чисто электрической, имеющей максимумы в пучностях \mathbf{E} , в магнитную с максимумами в пучностях вектора \mathbf{H} , т. е. смещенным в пространстве на $\lambda/4$. Это аналогично поведению гармонического осциллятора, например математического маятника, где энергия переходит из чисто потенциальной (в крайнем положении) в кинетическую (в положении равновесия), и наоборот.

Отметим, что если волна представляет собой наложение двух бегущих волн со взаимно перпендикулярными плоскостями поляризации (направлением колебаний вектора \mathbf{E}), то ее интенсивность независимо от особенностей этих волн будет равна сумме интенсивностей складываемых волн. Действительно, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$, а интенсивность $I \sim \langle E^2 \rangle = \langle E_1^2 + 2\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 + E_2^2 \rangle$. Поскольку $\mathbf{E}_1 \perp \mathbf{E}_2$, скалярное произведение $\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 = 0$, и мы имеем $I = I_1 + I_2$.

0.1.5 Импульс электромагнитной волны

Перенос энергии электромагнитной волной сопровождается и переносом импульса. Согласно теории относительности, импульс объекта с нулевой массой покоя, движущегося со скоростью света, $p = W/c$, где W – его энергия (это по – существу верно и для электромагнитной волны как потоку фотонов). Поскольку в случае электромагнитной волны масса покоя "объекта" равна нулю, связь между энергией и импульсом будет такой же:

$$p = \frac{w}{c} \quad (0.1.26)$$

где p и w – *плотности* импульса и энергии т. е. величины, отнесенные к единице объема. Умножив числитель и знаменатель правой части равенства (0.1.26) на c , получим в числителе, согласно (0.1.22), плотность потока энергии (wc), которая в свою очередь равна модулю вектора Пойнтинга. Таким образом, в векторном виде

$$\mathbf{p} = \frac{[\mathbf{E}\mathbf{H}]}{c^2}. \quad (0.1.27)$$

Если падающая нормально на поверхность некоторого тела электромагнитная волна полностью поглощается этим телом, то единице площади поверхности тела сообщается за промежуток времени dt импульс, заключенный в цилиндре с площадью сечения, равной единице, и высотой $c dt$, т. е. $dp = (w/c)c dt$. Но импульс, сообщаемый единице поверхности в единицу времени, dp/dt , равен давлению p^* на поверхность тела. Поэтому для поглощающей поверхности давление $p^* = w$, Н/м². В случае гармонической волны эта величина пульсирует с достаточно большой частотой, и практически представляет интерес лишь ее среднее значение по времени:

$$p^* = \langle w \rangle. \quad (0.1.28)$$

Для идеально отражающей поверхности давление будет в два раза больше.

Рассмотрим более детально механизм передачи импульса телу, т. е. как возникает давление. Электрическое поле волны возбуждает в теле ток плотности $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$, а магнитное поле волны будет действовать на \mathbf{j} в соответствии с законом Ампера – с силой, объемная плотность которой равна

$$\mathbf{F}_{\text{ед}} = [\mathbf{j}\mathbf{B}] = \sigma[\mathbf{E}\mathbf{B}], \quad (0.1.29)$$

откуда следует, что сила направлена в сторону распространения волны.

Надо иметь в виду, что электромагнитная волна оказывает давление не только внутри вещества (при условии, что удельная проводимость $\sigma \neq 0$), но и при отражении от поверхности так что

$$p^* = \langle w \rangle (1 + R), \quad (0.1.30)$$

где R – коэффициент отражения, т. е. отношение интенсивности отраженной волны к интенсивности падающей.

Давление, вычисленное по формуле (0.1.28), оказывается в обычных условиях очень малым. Например, солнечный свет оказывает давление порядка 10^{-5} Па (атмосферное давление $\approx 10^5$ Па). Измерить такое давление экспериментально очень трудно. Впервые это удалось П. Н. Лебедеву (в 1900 г.). Его измерения дали значение, согласующееся с теорией с точностью до 20%. Позднее эти измерения повторил Герлах (в 1923 г.), достигнув точности до 2%.

Тот факт, что электромагнитное поле обладает импульсом, предписывает при составлении баланса импульсов частиц учитывать и импульс электромагнитного поля. Только при этом с законом сохранения импульса будет все в порядке.

0.1.6 Эффект Доплера для электромагнитных волн

Рассмотренное в механике (см. [2], §1.6) изменение частоты звуковых сигналов, обусловленное эффектом Доплера, определяется скоростями движения источника и приемника *относительно среды*, являющейся носителем звуковых волн. Для электромагнитных же волн особой среды, которая служила бы их носителем, нет. Поэтому доплеровское смещение частоты электромагнитных волн (сигналов) определяется только скоростью источника *относительно приемника*.

Пусть в K -системе отсчета находится неподвижный приемник P (рис. 5). К нему с релятивистской скоростью v приближается S – источник периодических электромагнитных (или световых) сигналов. В K' -системе отсчета, связанной с источником, сигналы испускаются с частотой ν_0 (собственная частота). Найдем частоту ν , с которой воспринимаются эти сигналы приемником.

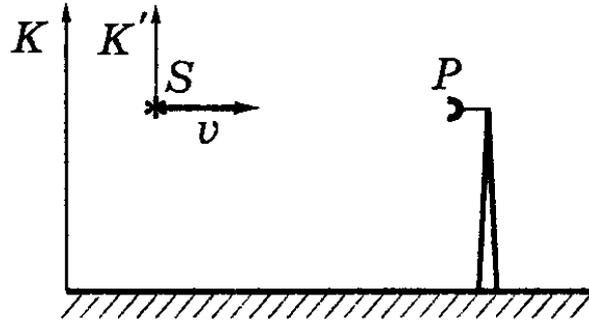


Рис. 5

Промежуток времени между двумя последовательными сигналами (импульсами) в K' -системе, связанной с источником, равен $T_0 = \frac{1}{\nu_0}$. Поскольку источник движется со скоростью v , то соответствующий промежуток времени в K -системе, согласно "эффекту замедления хода движущихся часов", будет больше, а именно

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}. \quad (0.1.31)$$

Расстояние между соседними импульсами в K -системе

$$\lambda = cT - vT = \frac{(c - v)T_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (0.1.32)$$

Поэтому воспринимаемая приемником частота $\nu = \frac{c}{\lambda}$, или

$$\nu = \nu_0 \cdot \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{v}{c}} \quad (0.1.33)$$

Если источник приближается (как в нашем случае), то $\nu > \nu_0$, если же удаляется, то $\nu < \nu_0$ (в этом случае знак перед v меняется на противоположный). Полученная формула (0.1.33) соответствует *продольному эффекту Доплера*.

Как видно из приведенного вывода, эффект Доплера для электромагнитных волн является следствием двух явлений: замедления хода движущихся часов (корень в числителе последней формулы) и "уплотнения" (или разряжения) импульсов, связанного с изменением расстояния между источником и приемником – это учтено в первом равенстве формулы (0.1.32).

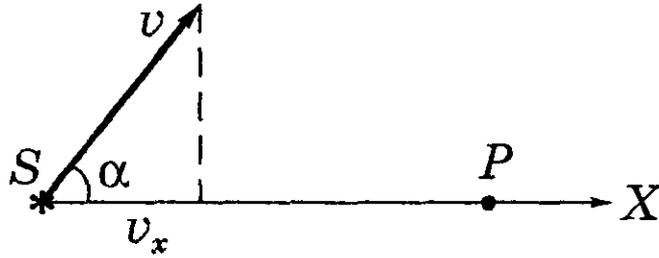


Рис. 6

Рассмотрим и более общий случай: в K – системе источник S движется со скоростью \mathbf{v} , составляющей угол α с линией наблюдения (рис. 6). В этом случае в формуле (0.1.33) следует заменить v на $v_x = v \cos \alpha$, где v_x – проекция вектора \mathbf{v} на ось X , положительное направление которой взято от S к P . Тогда

$$\nu = \nu_0 \cdot \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{v_x}{c}}. \quad (0.1.34)$$

В процессе движения источника S проекция скорости v_x , вообще говоря, меняется, поэтому необходимо учесть *эффект запаздывания*. Воспринимаемая приемником P частота ν в момент t будет обусловлена сигналами, испущенными источником S в предшествующий момент $t' = t - \ell/c$, где ℓ – расстояние от источника S до P в момент t' . Поэтому значение v_x надо брать в момент t' . Итак, частоте $\nu(t)$ соответствует $v_x(t')$.

В отличие от акустического эффекта Доплера, при $\alpha = 90^\circ$ ($v_x = 0$) наблюдается *поперечный эффект Доплера*:

$$\nu = \nu_0 \sqrt{1 - \beta^2}, \quad (0.1.35)$$

при котором воспринимаемая приемником частота оказывается всегда меньше собственной частоты источника: $\nu < \nu_0$. Поперечный эффект является прямым следствием замедления хода движущихся часов. Этот эффект значительно слабее продольного: он зависит от v/c не в первой степени, а во второй, т. е. является квадратичным относительно v/c . Поэтому экспериментально его можно наблюдать, проводя измерения перпендикулярно, например, пучку излучающих атомов, имеющему очень малый угол расходимости (чтобы практически исключить продольный эффект).

В нерелятивистском случае, когда $v \ll c$, вместо (0.1.31) можно считать, что $T = T_0$, поэтому формула (0.1.34) не будет содержать корня $\sqrt{1 - \beta^2}$, и тогда воспринимаемая частота

$$\nu = \frac{\nu_0}{(1 - \frac{v_x}{c})} \approx \nu_0 \left(1 + \frac{v_x}{c}\right). \quad (0.1.36)$$

Отсюда относительное изменение частоты $(\nu - \nu_0)/\nu_0$ равно

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{v_x}{c}. \quad (0.1.37)$$

При $v_x > 0$ (источник приближается) $\Delta\nu/\nu > 0$, если же $v_x < 0$ (источник удаляется), то $\Delta\nu/\nu < 0$. При $v_x = 0$ и $\Delta\nu/\nu = 0$.

Эффект Доплера нашел многочисленные практические применения. С его помощью определяют, например, скорость излучающих атомов в пучке, угловую скорость вращения Солнца. На эффекте Доплера основаны радиолокационные методы измерения: скорости самолетов, ракет, автомашин и др. Именно этот эффект позволил открыть двойные звезды: (системы, состоящие из двух звезд, движущихся вокруг общего центра масс) – объекты, которые невозможно разрешить даже самыми мощными телескопами. С помощью эффекта Доплера Хаббл (1929 г.) обнаружил явление, названное космологическим

красным смещением: линии в спектре излучения внегалактических объектов смещены в сторону больших длин волн, т.е. в красноволновую часть спектра. Оно свидетельствует о том, что внегалактические объекты удаляются от нашей Галактики со скоростями, пропорциональными расстоянию до них.

Рассмотрим в заключение два примера, на применение эффекта Доплера. Но предварительно преобразуем формулу (0.1.37) от частот к длинам волн. Частота $\nu = c/\lambda$, отсюда малое приращение частоты: $\Delta\nu = -(c/\lambda^2)\Delta\lambda$. Подставив обе эти формулы в (0.1.37), получим

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = -\frac{v_x}{c} = -\frac{v}{c} \cos \alpha, \quad (0.1.38)$$

где α – угол между скоростью v и направлением наблюдения.

Пример 1. Одна из спектральных линий, испускаемых, возбужденными ионами He^+ в состоянии покоя, имеет длину волны λ . Если эту линию наблюдать под углом α к пучку данных ионов, то обнаруживается ее доплеровское смещение $\Delta\lambda < 0$, причем $|\Delta\lambda| \ll \lambda$. Определим скорость ионов в пучке. Так как $|\Delta\lambda| \ll \lambda$, то это значит, что ионы движутся с нерелятивистской скоростью и справедливо соотношение (0.1.38). Условие же $\Delta\lambda < 0$ означает согласно (0.1.38), что $\cos \alpha > 0$, т. е. угол: $\alpha < \pi/2$. Искомая скорость

$$v = \frac{c|\Delta\lambda|}{\lambda \cos \alpha}.$$

Пример 2. При наблюдении спектральной линии $\alpha = 0,51$ мкм в направлениях на противоположные края солнечного диска на его экваторе обнаружили различие в длинах волн на $\delta\lambda = 8,0$ пм. Найдем период вращения Солнца вокруг собственной оси. Так как данные края диска движутся при вращении Солнца в противоположных направлениях с одинаковой скоростью v , то доплеровское смещение этой линии будет одинаково по модулю, но противоположно по знаку. Поэтому суммарная разность, смещенных длин волн равна удвоенному доплеровскому смещению:

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = 2\frac{v}{c} = 2\frac{\omega R}{c} = \frac{2}{c} \cdot \frac{2\pi R}{T},$$

где ω – угловая скорость Солнца, R – его радиус ($\pm 7 \cdot 10^8$ м). Отсюда следует, что период вращения Солнца

$$T = \frac{4\pi R\lambda}{c\delta\lambda} = 25 \text{ суток}.$$

0.1.7 Излучение диполя

Возбуждение электромагнитных волн какой-либо системой называют излучением этих волн, а саму систему – излучающей системой. Поле электромагнитной волны называют полем излучения.

Согласно представлениям классической электродинамики электромагнитные волны в вакууме возбуждаются электрическими зарядами, движущимися с ускорением. Простейшей излучающей системой является осциллирующий электрический диполь, момент p которого изменяется с течением времени, – *элементарный вибратор*.

Если излучающая система электронейтральна, а ее размеры малы по сравнению с длиной λ излучаемых волн, то в точках, отстоящих от системы на расстояниях $r \gg \lambda$ – в так называемой *волновой зоне*, – поле излучения близко к полю излучения осциллятора, имеющего такой же электрический момент, как и вся излучающая система.

Рассмотрим некоторые закономерности излучения линейного гармонического осциллятора – электрического диполя, размер которого $\ell \ll \lambda$, а момент p изменяется во времени по закону

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_m \cos \omega t, \quad (0.1.39)$$

где \mathbf{p}_m – амплитудное значение \mathbf{p} . Все дальнейшее относится к вакууму, где длина волны λ излучения связана с частотой ω соотношением $\lambda = 2\pi c/\omega$.

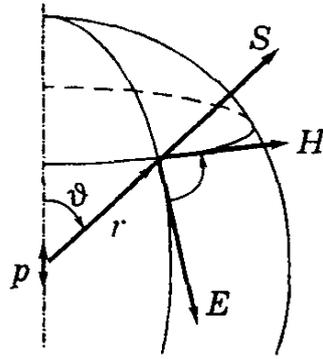


Рис. 7

Напомним, электрическое поле постоянного диполя спадает при удалении от него по закону $E \sim 1/r^3$. В случае же осциллирующего диполя дело обстоит иначе. В непосредственной близости от диполя картина электромагнитного поля очень сложна. Она сильно упрощается в волновой зоне: быстро спадающее статическое поле практически исчезает и остается только поле излучения от осциллирующих зарядов – расходящаяся сферическая волна с той же частотой, что и у осциллятора. Амплитуда волны (это доказывается в электродинамике) уменьшается с ростом расстояния r от диполя как

$$E_m \sim H_m \sim \frac{1}{r} \sin \vartheta \quad (0.1.40)$$

где ϑ – угол между осью диполя и радиус-вектором \mathbf{r} точки, где наблюдается поле (рис. 7). Из этого рисунка видно, что вектор \mathbf{E} в каждой точке волновой зоны направлен по касательной к меридиану, а вектор \mathbf{H} по касательной к параллели, причем так, что в каждый момент векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} составляют правую тройку с вектором Пойнтинга $\mathbf{S} = [\mathbf{E}\mathbf{H}]$.

Факт существования электромагнитного поля, амплитуда которого убывает с расстоянием как $1/r$, – поля излучения – весьма важен. Наличие именно такого поля позволяет осуществлять передачи на большие расстояния, видеть звезды.

Интенсивность электромагнитной волны, т.е. среднее значение плотности потока энергии $\langle S \rangle$, пропорционально произведению $\mathbf{E}_m \mathbf{H}_m$, значит, согласно (0.1.40),

$$I = \langle S \rangle \sim \frac{1}{r^2} \sin^2 \vartheta. \quad (0.1.41)$$

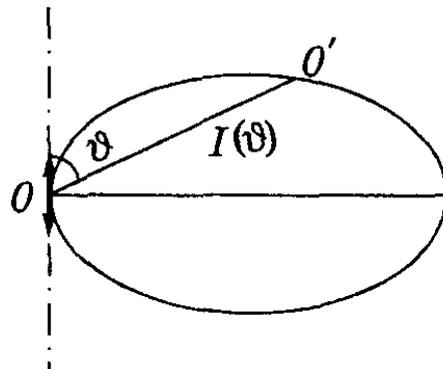


Рис. 8

Зависимость $I(\vartheta)$ наглядно изображают с помощью *диаграммы направленности* излучения диполя (рис. 8). Здесь длина отрезка OO' , отсекаемого на луче под углом ϑ , дает

интенсивность излучения под этим углом. Видно, что максимум излучения происходит в экваториальной плоскости ($\vartheta = \frac{\pi}{2}$), а вдоль оси ($\vartheta = 0$) диполь не излучает совсем – это важный вывод.

Как показывает теория, мощность излучения P диполя, т.е. энергия, излучаемая в единицу времени по всем направлениям, пропорциональна квадрату второй производной дипольного момента по времени и определяется формулой

$$P = \alpha \ddot{\mathbf{p}}^2, \quad (0.1.42)$$

где $\alpha = \frac{\mu_0}{6\pi c}$ (СИ) или $\frac{2}{3c^3}$ (СГС). Зная зависимость \mathbf{p} от t , формула (0.1.39), получим:

$$P = \alpha \omega^4 p_m^2 \cos^2 \omega t. \quad (0.1.43)$$

Следовательно, средняя по времени мощность излучения диполя

$$\langle P \rangle = (\alpha/2) \omega^4 p_m^2. \quad (0.1.44)$$

Это важный результат: средняя мощность излучения осциллирующего диполя зависит от квадрата его амплитуды и очень сильно от частоты (как ω^4). Отсюда следует, что, например, радиостанции должны использовать высокие частоты, а излучение линий передач переменного тока промышленной частоты оказывается незначительным. Формула (0.1.42) справедлива также для излучения заряда q , движущегося ускоренно. В самом деле, дипольный момент можно представить так: $\mathbf{p} = q\mathbf{l} = q(\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-)$, где \mathbf{r}_+ и \mathbf{r}_- – радиусы-векторы зарядов q и $-q$. Отсюда

$$p = q(r_+ - r_-) = q(a + -a_-), \quad (0.1.45)$$

и если заряд, например q , покоится, а движется только заряд $-q$, то

$$p = -qa_-. \quad (0.1.46)$$

После подстановки этого выражения в формулу (0.1.42) найдем:

$$\boxed{P_t = \alpha H a_t^2}. \quad (0.1.47)$$

где α – тот же коэффициент, что и в формуле (0.1.42).

Это знаменитая формула для мощности излучения заряда, движущегося с ускорением. Индексы t и t' показывают, что мощность P в момент t определяется ускорением заряда, которое он имеет в более ранний момент $t' = t - l/c$ (эффект запаздывания). И еще, формула (0.1.47), как следует из теории, справедлива лишь для зарядов, движущихся с малыми скоростями ($v \ll c$).

В качестве примера можно привести заряженные частицы, движущиеся в циклических ускорителях (бетатроне, циклотроне и др.). Здесь обнаруживается естественный предел для энергии ускоряемой частицы, когда энергия, сообщаемая частице за период, становится равной энергии излучения.

Другой пример – излучение электрона в атоме. По классическим представлениям электрон в атоме совершает колебания, т.е. движется с ускорением и, значит, излучает. Расчет показывает, что время τ , за которое амплитуда колебаний электрона уменьшается в e раз, порядка 10^{-8} с. Это время называют средним временем жизни возбужденного атома, или временем излучения. Точный (квантовый) расчет приводит практически к тому же значению этого времени.

Следует обратить внимание на то, что заряд, колеблющийся с частотой ω , излучает монохроматическую электромагнитную волну с той же частотой ω . Если же заряд движется с произвольным ускорением, то его излучение представляет собой спектр различных частот.

И последнее, заряд, движущийся в вакууме с постоянной скоростью, не излучает. В этом легко убедиться и непосредственно. Достаточно перейти в систему отсчета, где заряд покоится (а такой заряд не излучает) и затем воспользоваться принципом относительности: если этого явления (излучения) нет в одной системе отсчета, его нет и в других, по отношению к которым заряд движется¹.

0.1.8 Свойства плоских электромагнитных волн

Запишем первое волновое уравнение системы (0.1.6) для волны распространяющейся в вакууме при ($\mathbf{j} = 0$) и ($\rho = 0$) в виде

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (0.1.48)$$

где c – скорость света в вакууме, определяемая выражением (0.1.8). Большую роль в физике играет волновое уравнение. Для скалярной функции Φ оно имеет вид

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0. \quad (0.1.49)$$

Найдем общее решение этого уравнения для случая, когда Φ зависит только от одной из декартовых координат, например x , т. е. $\Phi = \Phi(x, t)$.

0.1.9 Плоские волны

Большую роль в физике играет волновое уравнение. Для скалярной функции Φ оно имеет вид

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0. \quad (0.1.50)$$

Найдем общее решение этого уравнения для случая, когда Φ зависит только от одной из декартовых координат, например x , т.е. $\Phi = \Phi(x, t)$. Это означает, что Φ имеет постоянное значение в точках плоскости, перпендикулярной оси X . В этом случае уравнение (0.1.50) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0. \quad (0.1.51)$$

Используя независимые переменные

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct \quad (0.1.52)$$

получаем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}, \quad (0.1.53)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -c \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + c \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}. \quad (0.1.54)$$

Разделив обе части уравнения (0.1.54) на c и вычитая их почленно из левых и правых частей уравнения (0.1.44), находим

$$\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} = 2 \frac{\partial}{\partial \xi}. \quad (0.1.55)$$

¹Это относится только к движению в вакууме. Если же заряд движется с постоянной скоростью в среде, то в случае, когда его скорость превышает фазовую скорость электромагнитных волн в этой среде, наблюдается *излучение Вавилова-Черепкова* (см. Приложение).

Аналогично, почленное сложение правых и левых частей тех же уравнений дает

$$\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} = 2 \frac{\partial}{\partial \eta}. \quad (0.1.56)$$

Тогда

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (0.1.57)$$

С учетом (0.1.55) и (0.1.56) преобразуем уравнение (0.1.42) к виду

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \Phi = 0. \quad (0.1.58)$$

Интегрируя (0.1.58) по ξ , получаем независимую от ξ функцию, которая в данном случае может зависеть только от η , т. е. является произвольной функцией $\Psi(\eta)$. После этого уравнение (0.1.58) принимает вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = \Psi(\eta). \quad (0.1.59)$$

Интегрируя (0.1.59) по η , получаем

$$\Phi = \int \Psi d\eta = \Phi_1(\eta) + \Phi_2(\xi), \quad (0.1.60)$$

где $\Phi_1(\eta)$ – первообразная функция в интеграле от $\Psi(\eta)$ по $d\eta$, $\Phi_2(\xi)$ – постоянная интегрирования. Как видно по ходу решения, функции Φ_1 и Φ_2 произвольны. С учетом (0.1.43) общее решение (0.1.60) уравнения (0.1.42) может быть записано в виде

$$\boxed{\Phi(x, t) = \Phi_1(x + ct) + \Phi_2(x - ct)}. \quad (0.1.61)$$

Выясним физический смысл этого решения. Сначала проанализируем решение

$$\boxed{\Phi = \Phi_2(x - ct)}. \quad (0.1.62)$$

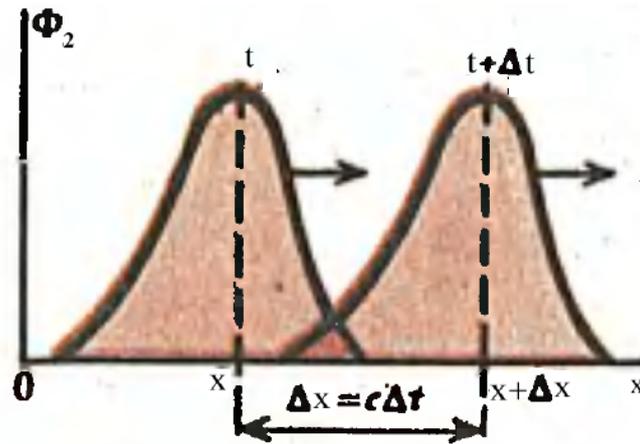


Рис. 9. Волна движется в направлении положительных значений x : $\Phi = \Phi_2(x - ct)$.

График Φ_2 как функции от x в моменты времени t и $t + \Delta t$ изображен на рис. 9. Видно, что значение аргумента функции в точке x в момент t совпадает со значением аргумента функции в точке $x + \Delta x$ в момент $t + \Delta t$, если $\Delta x = c\Delta t$, поскольку

$$x - ct = x + \Delta x - c(t + \Delta t) \quad (\Delta x = c\Delta t). \quad (0.1.63)$$

Поэтому график функции для $t + \Delta t$ получается из графика для t смещением всех точек кривой в направлении положительных значений оси X на $\Delta x = c\Delta t$. Следовательно, скорость волны равна $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = c$. Функция $\Phi_2(x - ct)$ описывает волну произвольной формы, движущуюся со скоростью c в направлении положительных значений оси X . В процессе движения значение Φ_2 в каждой точке волны и форма волны не изменяются.

Физический смысл Φ_1 , т. е. решения

$$\Phi = \Phi_1(x + ct), \quad (0.1.64)$$

выясняется аналогично. Учитывая, что

$$x + ct = x + \Delta x + c(t + \Delta t) \quad (\Delta x = -c\Delta t), \quad (0.1.65)$$

закключаем, что функция $\Phi_1(x + ct)$ описывает волну произвольной формы, движущуюся со скоростью c в направлении отрицательных значений оси X (рис. 10). Значение Φ_1 в каждой точке волны и форма волны в процессе движения не изменяются.

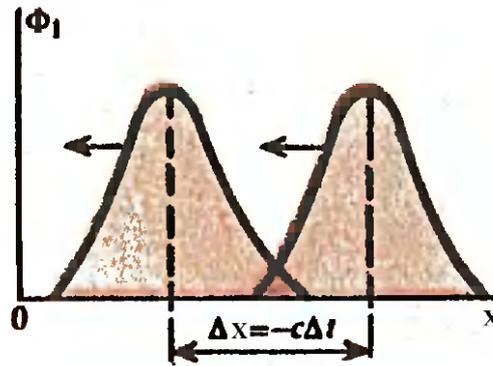


Рис. 10. Волна движется в направлении отрицательных значений x : $\Phi = \Phi_1(x + ct)$.

Волна, описываемая формулой (0.1.61), является суперпозицией двух волн, движущихся в противоположных направлениях. В этом случае уже нельзя говорить о скорости или направлении волны. В простейшем случае получается стоячая волна, а в общем случае — сложное электромагнитное поле, которое требует специального изучения.

Значение функции Φ для фиксированных x и t является постоянным на плоскости, перпендикулярной оси X . Поэтому такие волны называются плоскими.

Волновой вектор. Чтобы освободиться от использования системы координат запишем (0.1.15) с помощью векторных обозначений, полагая $E(\vec{x}, t) = \Phi(\vec{r}, t)$. Пусть вектор \vec{k} равен по модулю волновому числу и направлен параллельно оси X в сторону положительных значений (рис. 1). Такой вектор называется волновым. Принимая во внимание, что $\vec{k} \cdot \vec{r} = kx$, запишем для произвольной точки, характеризуемой радиусом-вектором \vec{r} , выражение

$$\Phi(\vec{r}, t) = A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}). \quad (0.1.66)$$

Эта формула не зависит от системы координат и характеризует плоскую волну, распространяющуюся в направлении вектора \vec{k} .

Аналогичное выражение для волны можно также написать с использованием синуса:

$$\Phi'(\vec{r}, t) = A' \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}), \quad (0.1.67)$$

которое при подходящем выборе начала отсчета времени может быть сведено к предыдущему, поскольку $\sin(\alpha + \pi/2) = -\cos \alpha$.

Представление плоской волны в комплексной форме. Принимая во внимание формулу Эйлера

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha, \quad (0.1.68)$$

представим выражения (0.1.66) и (0.1.67) формулами

$$\boxed{\Phi(\vec{r}, t) = A \operatorname{Re}[e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}]}, \quad (0.1.69)$$

$$\boxed{\Phi'(\vec{r}, t) = -A \operatorname{Im}[e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}]}, \quad (0.1.70)$$

где Re и Im —вещественная и мнимая части комплексного числа. В расчетах удобно пользоваться комплексным представлением плоской волны в виде

$$\boxed{\Phi(\vec{r}, t) = A e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}}, \quad (0.1.71)$$

обозначая комплексную величину тем же символом, что и действительную. Это упрощает написание формул и не приводит к путанице. В тех случаях, когда путаница все же возможна, будем в явном виде указывать, о каком представлении идет речь.

Величина A в (0.1.71) может быть как действительной, так и комплексной или мнимой. Учитывая, что в общем случае

$$A = |A|e^{i\varphi}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{Im} A}{\operatorname{Re} A},$$

запишем выражение (0.1.71) в виде

$$\boxed{\Phi(\vec{r}, t) = |A|e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \varphi)}}, \quad (0.1.72)$$

где $|A|$ — амплитуда плоской волны. Поэтому и в (0.1.72) $|A|$ — амплитуда плоской волны, а $(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \varphi)$ — фаза.

Будем искать решение уравнений Максвелла (0.1.2) и (0.1.3) в виде

$$\mathbf{E}(\vec{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}, \quad \mathbf{B}(\vec{r}, t) = \mathbf{B}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}, \quad (0.1.73)$$

где \mathbf{E}_0 и \mathbf{B}_0 — постоянные векторы, не зависящие от координат и времени. Компоненты этих векторов могут быть комплексными.

Подставляя выражения (0.1.73) в уравнения (0.1.2) и (0.1.3) и учитывая, что

$$\nabla e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = i\vec{k} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}, \quad \frac{\partial}{\partial t} e^{-i\omega t} = -i\omega e^{-i\omega t}, \quad (0.1.74)$$

получаем следующие соотношения:

$$-\vec{k} \times \mathbf{B} = \omega \mu_0 \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad \vec{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B}, \quad (0.1.75)$$

$$\vec{k} \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \vec{k} \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (0.1.76)$$

Из соотношений (0.1.76) следует, что векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} плоской волны перпендикулярны вектору \vec{k} , т. е. направлению распространения. Это означает, что электромагнитная волна является поперечной. Соотношения (0.1.75) показывают, что векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} взаимно перпендикулярны. Таким образом, \mathbf{E} , \mathbf{B} и \mathbf{k} составляют тройку взаимно перпендикулярных векторов.

Поперечность световых колебаний была открыта в 1817 г. Т. Юнгом (1773–1829). С помощью этого представления он объяснил отсутствие интерференции лучей света, поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях, обнаруженное в 1816 г. экспериментально в совместной работе Д.Ф. Араго (1786–1853) и О.Ж. Френеля (1788–1827).

Взяв от обеих частей второго уравнения (0.1.75) модули $|\mathbf{k} \times \mathbf{E}| = \omega|\mathbf{B}|$ и учитывая, что $|\mathbf{k} \times \mathbf{E}| = |\mathbf{k}||\mathbf{E}|$, $|\mathbf{k}| = k = \omega/c$, находим следующее соотношение между напряженностью электрического поля и магнитной индукцией плоской волны в вакууме:

$$\boxed{\mathbf{E} = c\mathbf{B}.} \quad (0.1.77)$$

Поскольку $\mathbf{k}, \omega, \mu_0, \varepsilon_0$ в (0.1.75) – вещественные величины, из (0.1.73) заключаем, что \mathbf{E} и \mathbf{B} в плоской волне изменяются в одинаковой фазе, т. е. одновременно достигают максимальных и нулевых значений (рис. 2).

0.1.10 Электромагнитная волна на границе двух диэлектриков

Пусть плоская электромагнитная волна (0.1.73) падает на плоскую, бесконечно простирающуюся границу раздела двух однородных изотропных прозрачных диэлектриков. Так как для всех прозрачных в видимой области тел $\mu \approx 1$, то имеем $n = \sqrt{\varepsilon\mu} = \sqrt{\varepsilon}$.

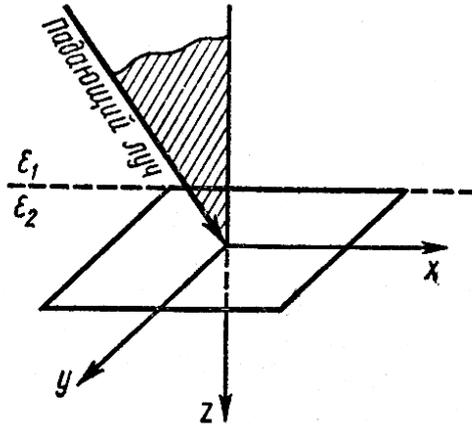


Рис. 11

Направим ось OZ перпендикулярно плоскости раздела по направлению ко второй среде. Ось OY проведем перпендикулярно падающему лучу и в направлении к наблюдателю (рис. 11) вдоль границы раздела двух сред с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 . Согласно граничным условиям, тангенциальные компоненты электрического и магнитного векторов остаются постоянными во всех точках границы раздела для любого момента времени, т. е.

$$\left. \begin{aligned} E_{1\tau} &= E_{2\tau}, \\ H_{1\tau} &= H_{2\tau}. \end{aligned} \right\} \quad (0.1.78)$$

Из условия (0.1.78) вытекает наличие поля во второй среде, если на плоскость раздела из первой среды падает электромагнитная волна. Удовлетворить двум условиям, предполагая наличие только одной плоской волны, невозможно, так как равенства

$$\left. \begin{aligned} H_{1\tau} &= \sqrt{\varepsilon_1} E_{1\tau}, \\ H_{2\tau} &= \sqrt{\varepsilon_2} E_{2\tau} \end{aligned} \right\} \quad (0.1.79)$$

одновременно можно удовлетворить только при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, что тривиально. Поэтому для решения задачи нужно предположить существование кроме падающей плоской волны еще,

по крайней мере, двух плоских волн – отраженной и преломленной. Определим направление распространения падающей волны с помощью волнового вектора \vec{k} , отраженной волны с помощью вектора \vec{k}' и, наконец, преломленной волны с помощью вектора \vec{k}'' . Учитывая это, для электрических векторов соответствующих волн имеем:

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}, \\ \vec{E}' &= \vec{E}'_0 e^{i(\omega' t - \vec{k}' \cdot \vec{r})}, \\ \vec{E}'' &= \vec{E}''_0 e^{i(\omega'' t - \vec{k}'' \cdot \vec{r})}. \end{aligned} \right\} \quad (0.1.80)$$

Учитывая (0.1.80) в (0.1.78), получим

$$E_{0\tau} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} + E'_{0\tau} e^{i(\omega' t - \vec{k}' \cdot \vec{r})} = E''_{0\tau} e^{i(\omega'' t - \vec{k}'' \cdot \vec{r})}. \quad (0.1.81)$$

Легко доказать, что условие (0.1.81) удовлетворяется при любом t и в любых точках плоскости раздела, если

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \omega' = \omega'', \\ k_x &= k'_x = k''_x, \\ k_y &= k'_y = k''_y. \end{aligned} \right\} \quad (0.1.82)$$

Для доказательства (0.1.82) граничное условие (0.1.81) перепишем в следующем виде:

$$A e^{i\omega t} + B e^{i\omega' t} = C e^{i\omega'' t}, \quad (0.1.83)$$

где A , B и C – величины, не зависящие от t .

Продифференцируем (0.1.83) по времени:

$$i\omega A e^{i\omega t} + i\omega' B e^{i\omega' t} = i\omega'' C e^{i\omega'' t}. \quad (0.1.84)$$

Отсюда

$$\frac{1}{\omega''} (\omega A e^{i\omega t} + \omega' B e^{i\omega' t}) = C e^{i\omega'' t}. \quad (0.1.85)$$

Сравнивая (0.1.83) и (0.1.85), получим

$$A(\omega'' - \omega) e^{i\omega t} = (\omega' - \omega'') B e^{i\omega' t}. \quad (0.1.86)$$

Это равенство удовлетворится при любом t , если $\omega = \omega'$. Аналогичным образом, определяя из уравнений (0.1.83) и (0.1.85) выражения для $B e^{i\omega' t}$ и приравнивая их, получим $\omega = \omega''$, что и требовалось доказать. Доказательство равенства компонентов волновых чисел принципиально ничем не отличается от вышеприведенного (вместо дифференцирования по времени проведем дифференцирование по координатам x и y).

Вывод законов отражения и преломления. Если волновой вектор падающей волны лежит в плоскости xz , то $k_y = 0$ и, следовательно, $k'_y = k''_y$, т. е. волновые векторы всех трех волн лежат в одной плоскости, которая, как принято, называется плоскостью падения на (рис. 11) эта плоскость заштрихована.

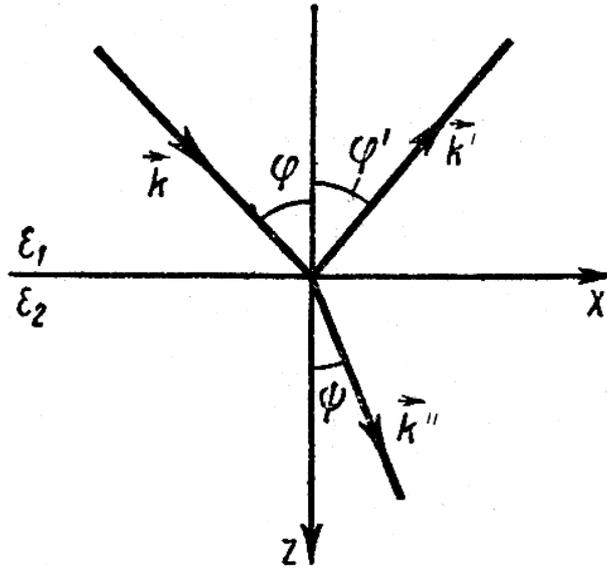


Рис. 12

Если ввести углы падения φ , отражения φ' и преломления ψ , то, как следует из (рис. 12),

$$\left. \begin{aligned} k_x &= k \sin \varphi, \\ k'_x &= k' \sin \varphi', \\ k''_x &= k'' \sin \psi. \end{aligned} \right\} \quad (0.1.87)$$

Если принять во внимание, что $|\vec{k}| = \frac{\omega}{v}$, то имеем:

$$\left. \begin{aligned} k &= \frac{\omega}{v_1}, \\ k' &= \frac{\omega}{v_1}, \\ k'' &= \frac{\omega}{v_2}, \end{aligned} \right\} \quad (0.1.88)$$

где v_1 и v_2 – скорости распространения света соответственно в первой и во второй средах.

Из (0.1.82) – (0.1.88) имеем

$$\frac{\sin \varphi}{v_1} = \frac{\sin \varphi'}{v_1} = \frac{\sin \psi}{v_2}. \quad (0.1.89)$$

Отсюда $\varphi = \varphi'$ и

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}. \quad (0.1.90)$$

Как известно, (0.1.89) и (0.1.90) есть законы отражения и преломления света. Следовательно, предположение трех плоских монохроматических волн, а также учет граничного условия дают возможность вывести известные из опытных данных законы отражения и преломления света, прийти к выводу о равенстве фаз и частот всех трех электромагнитных волн на границе раздела².

Формулы Френеля. Определим теперь распределение интенсивности света между отраженными и преломленными световыми волнами. С этой целью удобно разложить вектор

²Такое заключение верно, если падающее световое поле слабое. Соответствующие исследования показали, что при больших интенсивностях излучения, падающего на границу раздела двух сред, возникают новые явления, в результате чего в составе отраженного света встречаются лучи, направленные под углом, отличным от угла падения. Это объясняется возникновением в составе отраженного света излучения удвоенной частоты (так называемая вторая гармоника), направление отражения которого не совпадает с направлением, определяемым законом отражения.

напряженности электрического поля (световой вектор) у всех трех волн на два взаимно перпендикулярных вектора – один в плоскости падения, другой – перпендикулярно этой плоскости:

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_p + \vec{E}_s, \\ \vec{E}' &= \vec{E}'_p + \vec{E}'_s, \\ \vec{E}'' &= \vec{E}''_p + \vec{E}''_s, \end{aligned} \right\} \quad (0.1.91)$$

где индексы p и s относятся соответственно к компонентам, лежащим в плоскости падения и перпендикулярным ей. Это равносильно тому, что задачу (случай, когда падающий свет естественный) сводим к двум задачам: 1) электрический вектор лежит в плоскости падения; 2) электрический вектор перпендикулярен плоскости падения. Подобное разложение электрического вектора на две компоненты позволяет определить интенсивности отраженного и преломленного лучей, исходя из законов изменения каждой из этих компонент.

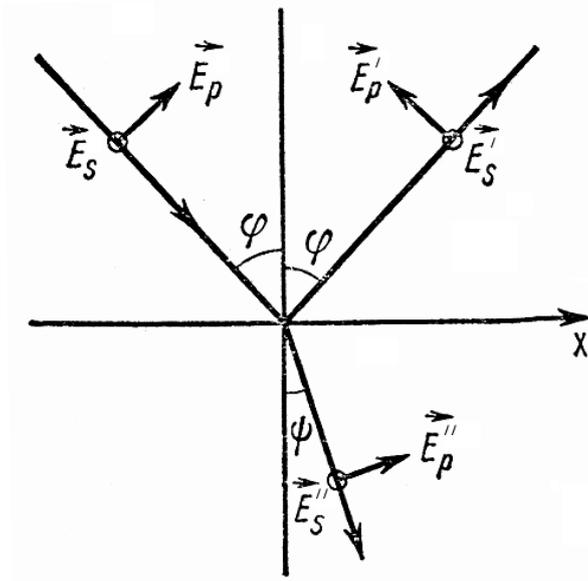


Рис. 13

Как следует из (рис. 13),

$$\left. \begin{aligned} E_x &= E_p \cos \varphi; & E'_x &= -E'_p \cos \varphi; \\ E_y &= E_s; & E'_y &= E'_s; \\ E_z &= -E_p \sin \varphi; & E'_z &= -E'_p \sin \varphi; \end{aligned} \right\} \quad (0.1.92)$$

Кружочками на рисунке обозначены компоненты, перпендикулярные плоскости чертежа. За положительные направления условно выбраны соответственно направление стрелки на рисунке для p и направление от наблюдателя за чертеж для s компонентов. Это означает, что компоненты E_s , E'_s и E''_s совпадают по фазе, если они имеют одинаковые знаки, и противоположны по фазе, если знаки различны. То же самое относится и к компонентам E_p и E''_p . Однако для E_p и E'_p имеет место обратное, т. е. они совпадают по фазе в том случае, если их знаки различны, и противоположны по фазе, если знаки их одинаковы.

Чтобы определить отношение амплитуд падающей и отраженной волн, напишем граничные условия (0.1.78) и (0.1.79): $E_x + E'_x = E''_x$; $E_y + E'_y = E''_y$; $H_x + H'_x = H''_x$; $H_y + H'_y = H''_y$. Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} (E_p - E'_p) \cos \varphi &= E''_p \cos \psi, \\ E_s + E'_s &= E''_s, \\ \sqrt{\varepsilon_1}(E_s - E'_s) \cos \varphi &= \sqrt{\varepsilon_2}E''_s \cos \psi, \\ \sqrt{\varepsilon_1}(E_p + E'_p) &= \sqrt{\varepsilon_2}E''_p. \end{aligned} \right\} \quad (0.1.93)$$

Амплитуды падающей волны E_p и E_s считаются заданными. Решая систему уравнений (0.1.93) относительно четырех неизвестных E'_p, E'_s, E''_p, E''_s , имеем:

$$\left. \begin{aligned} E'_p &= E_p \cdot \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \psi)}{\operatorname{tg}(\varphi + \psi)}; & E''_p &= E_p \cdot \frac{2 \sin \psi \cos \varphi}{\sin(\varphi + \psi) \cos(\varphi - \psi)}; \\ E'_s &= -E_s \cdot \frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)}; & E''_s &= E_s \cdot \frac{2 \sin \psi \cos \varphi}{\sin(\varphi + \psi)}. \end{aligned} \right\} \quad (0.1.94)$$

Эти формулы называются формулами Френеля. Впервые они были выведены Френелем в 1823 г. на основе его теории, согласно которой свет представляет собой колебание упругой среды – эфира. Свободный от противоречий вывод формул Френеля, как мы видели выше, основан на электромагнитной теории света, где световые колебания отождествляются с колебаниями электрического вектора. Если обратить внимание на тот факт, что действия света в основном обусловлены электрическим (световым) вектором, то подобное отождествление можно считать законным.

Как следует из (0.1.94), при $\varphi + \psi = \frac{\pi}{2}$, т. е. при $\operatorname{tg}(\varphi + \psi) = \infty$, $E'_p = 0$, $E'_s \neq 0$. Это означает, что если лучи, отраженный и преломленный, взаимно перпендикулярны, то в отраженной волне колебание электрического вектора происходит только в одном направлении – в направлении, перпендикулярном плоскости падения. Такой луч, как мы уже знаем называется линейно – или плоскополяризованным. Угол падения естественного света, при котором отраженный луч плоскополяризован, называется углом Брюстера.

0.2 Световая волна

Шкала электромагнитных волн. В этом разделе будет рассмотрен круг явлений, в основе которых лежит волновая природа света. Различают несколько видов электромагнитных волн: радиоволны, оптический диапазон, рентгеновское и гамма-излучения. В дальнейшем нас будет интересовать главным образом оптический диапазон длин волн. Его подразделяют на

инфракрасное излучение	$\lambda = 1 \text{ мм} \div 0,76 \text{ мкм}$,
видимое излучение (свет).....	$\lambda = 0,76 \div 0,40 \text{ мкм}$,
ультрафиолетовое излучение	$\lambda = 0,40 \div 0,01 \text{ мкм}$.

Соответствующие длины волн указаны в вакууме.

0.2.1 Кривая видности

В видимом диапазоне действие света на глаз (световое ощущение) весьма сильно зависит от длины волны. Чувствительность среднего нормального человеческого глаза к свету разной длины волны характеризуют кривой видности (более точное название – кривая относительной спектральной чувствительности). Ее график показан на рис. 14, где V_λ – относительная спектральная чувствительность. Наиболее чувствителен глаз к свету с длиной волны 555 нм (зеленая часть спектра). Для этой длины волны принято $V_\lambda = 1$.

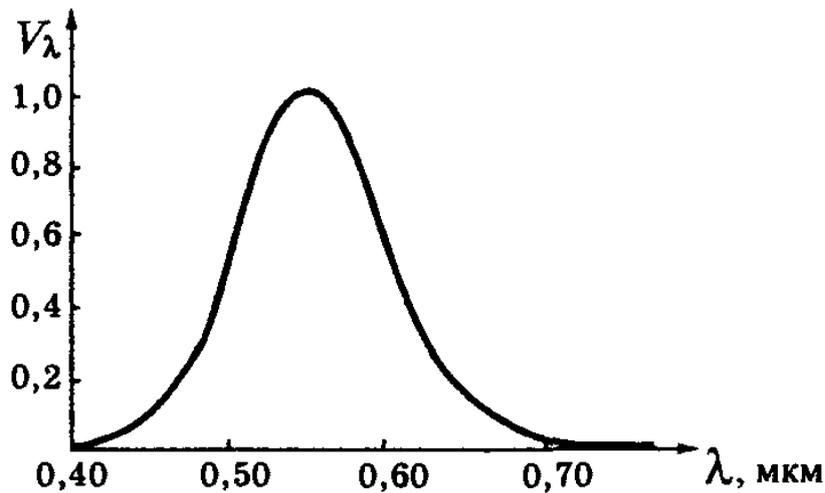


Рис. 14

При одинаковом потоке энергии оцениваемая зрительно интенсивность света других длин волн оказывается меньшей. Вне интервала видимых длин волн $V_\lambda = 0$.

Для характеристики интенсивности света с учетом его способности вызывать зрительное ощущение (что определяет функция V_λ) вводят понятие светового потока Φ . Для длины волны λ световой поток

$$\Phi = V_\lambda \Phi_\varepsilon, \quad (0.2.95)$$

где Φ_ε – соответствующий поток энергии. Размерность светового потока совпадает с размерностью потока энергии (Вт).

0.2.2 Показатель преломления

Электромагнитная волна характеризуется векторами \mathbf{E} и \mathbf{H} . Поскольку практически все действия света связаны с вектором \mathbf{E} , принято говорить о *световом векторе*, имея в виду вектор \mathbf{E} .

Модуль амплитуды светового вектора мы будем обозначать буквой A , а иногда E_m .

Показатель преломления n некоторой среды определяют как

$$n = \frac{c}{v}, \quad (0.2.96)$$

где c – скорость света в вакууме, v – фазовая скорость в данной среде. Сопоставление с формулой (0.1.7)³ дает:

$$n = \sqrt{\varepsilon}, \quad (0.2.98)$$

что справедливо для подавляющего большинства прозрачных веществ, у которых $\mu = 1$.

Последняя формула связывает оптические свойства вещества с его электрическими свойствами. Заметим, что ε зависит от частоты электромагнитной волны. Этим объясняется дисперсия света, т. е. зависимость n (или v) от частоты (или длины волны).

Показатель преломления n характеризует оптическую плотность среды. Среду с большим показателем преломления называют оптически более плотной.

В веществе длина волны $\lambda' = v/\nu = c/n\nu = \lambda/n$, Таким образом, длина волны света в среде с показателем преломления n равна

$$\lambda' = \lambda/n. \quad (0.2.99)$$

3

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \quad (0.2.97)$$

0.2.3 Интенсивность волны

Световую волну характеризуют интенсивностью I – это модуль среднего по времени значения плотности потока энергии. Плотность потока электромагнитной энергии определяется, как мы уже знаем, вектором Пойнтинга S как

$$I = \langle S \rangle \sim E_m \cdot H_m. \quad (0.2.100)$$

Согласно (0.1.14), $H_m \sim \sqrt{\varepsilon} E_m = n E_m$, поэтому формулу (0.2.100) можно записать так:

$$I \sim n E_m^2 = n A^2. \quad (0.2.101)$$

Линии, ортогональные волновым поверхностям, называют *лучами*. Вектор Пойнтинга направлен в каждой точке по касательной к лучу. Это, однако, относится только к изотропным средам.

0.2.4 Виды световых волн

Световые волны являются электромагнитными, поэтому они поперечны. Однако обычно они не обнаруживают асимметрии относительно направления распространения. Это связано с тем, что в свете, испускаемом обычными источниками – этот свет называют естественным – колебания светового вектора происходят поочередно в самых разных направлениях, перпендикулярных направлению распространения.

По классическим представлениям излучение светящегося тела (газа) складывается из волн, испускаемых его атомами. Излучение отдельного атома продолжается порядка $10^{-8}c$ и представляет собой, как говорят, *цуг волн* протяженностью в среднем порядка 3 м. Излучив, атом через некоторое время, придя в возбужденное состояние, излучает опять и т. д. Одновременно излучает множество атомов. Порожденные ими цуги волн, налагаясь друг на друга, образуют испускаемую телом световую волну. Направления колебаний для каждого цуга ориентированы случайным образом. Поэтому в результирующей световой волне колебания светового вектора происходят в разных направлениях с равной вероятностью. Это надо понимать так, что при прохождении световой волны через некоторую точку колебания светового вектора быстро и беспорядочно сменяют друг друга.

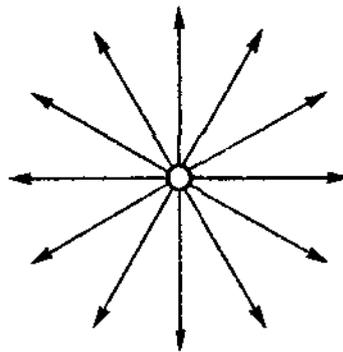


Рис. 15

Но в пределах некоторого времени мы имеем дело со световым вектором, направление колебаний которого сохраняется, затем направление колебаний меняется на другое и т. д. При этом модуль светового вектора остается неизменным. Условно это изображают как на рис. 15 где направление распространения волны перпендикулярно плоскости рисунка.

Свет, в котором направление колебаний светового вектора упорядочено каким-либо образом, называют *поляризованным*. Если колебания светового вектора происходят только в одной плоскости, свет называют *плоско-* (или *линейно-*) *поляризованным*.

Если конец светового вектора описывает эллипс, то такой свет называют *эллиптически-поляризованным* (в частности, поляризованным по кругу).

Создание принципиально нового источника света – *лазера* – позволило получить плоско-поляризованный свет с высокой степенью монохроматичности. Использование такого источника света сильно упростило экспериментальное решение многих вопросов, связанных с интерференцией, дифракцией и др.

0.3 Электромагнитная волна на границе раздела

0.3.1 Соотношения между амплитудами и фазами

Выясним, что происходит при падении плоской электромагнитной волны на границу раздела двух однородных изотропных прозрачных диэлектриков, магнитная проницаемость которых равна единице ($\mu = 1$). Известно, что при этом возникают отраженная и преломленная волны. Ограничимся рассмотрением частного, но практически важного случая, когда волна падает *нормально* на границу раздела диэлектриков с показателями преломления n_1 и n_2 .

Обозначим электрическую составляющую в падающей, отраженной и преломленной волнах соответственно через \mathbf{E} , \mathbf{E}' и \mathbf{E}'' , а магнитную составляющую – через \mathbf{H} , \mathbf{H}' и \mathbf{H}'' . Из соображений симметрии ясно, что колебания векторов \mathbf{E} , \mathbf{E}' и \mathbf{E}'' происходят в одной плоскости. Это же относится и к векторам \mathbf{H} , \mathbf{H}' и \mathbf{H}'' . На рис. 16 показаны относительное расположение этих векторов в непосредственной близости от границы раздела и направления распространения всех трех волн, обозначенные векторами \mathbf{k} , \mathbf{k}' и \mathbf{k}'' . Дальнейший расчет покажет, насколько эта картина соответствует действительности.

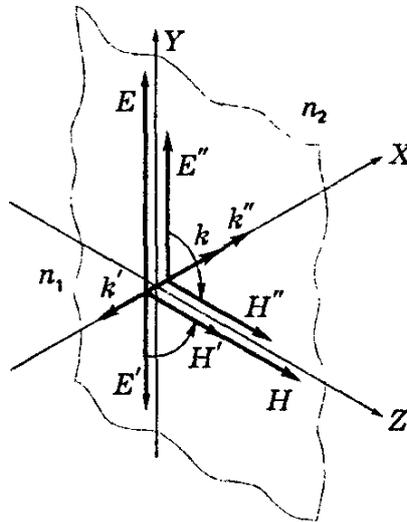


Рис. 16

Воспользуемся граничными условиями для тангенциальных составляющих векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} :

$$E_{1y} = E_{2y}, \quad H_{1z} = H_{2z}. \quad (0.3.102)$$

Перепишем эти условия для нашего случая:

$$E_y + E'_y = E''_y \quad (0.3.103)$$

$$H_z + H'_z = H''_z \quad (0.3.104)$$

Согласно (0.1.14), $H_z \sim \sqrt{\varepsilon} E_y = n_1 E_y$, $H''_z \sim n_2 E''_y$, но $H'_z \sim -n_1 E'_y$ поскольку проекции E'_y и H'_z в отраженной волне имеют противоположные знаки (см. рис. 16).

Поэтому равенство (0.3.104) можно переписать так: $n_1 E_y - n_1 E'_y = n_2 E''_y$, или

$$E_y - E'_y = \left(\frac{n_2}{n_1} \right) E''_y. \quad (0.3.105)$$

Решив совместно уравнения (0.3.103) и (0.3.105), получим выражения для E'_y и E''_y через E_y , которые в векторной форме имеют вид:

$$\mathbf{E}' = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \mathbf{E}, \quad \mathbf{E}'' = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \mathbf{E}. \quad (0.3.106)$$

Отсюда следует, что:

1. Вектор \mathbf{E}'' всегда сонаправлен с вектором \mathbf{E} , т. е. оба вектора колеблются синфазно – при прохождении волны через границу раздела фаза не претерпевает скачка.

2. Это же относится и к векторам \mathbf{E}' и \mathbf{E} , но при условии, что $n_1 > n_2$, т. е. если волна переходит в оптически менее плотную среду. В случае же, когда $n_1 < n_2$, дробь в выражении (0.3.106) для \mathbf{E} оказывается отрицательной, а это означает, что направление вектора \mathbf{E}' противоположно направлению вектора \mathbf{E} , т. е. колебания вектора \mathbf{E}' происходят в противофазе с колебаниями вектора \mathbf{E} (этому соответствует рис. 16). Другими словами, при отражении волны от оптически более плотной среды ее фаза изменяется скачком на π .

Эти результаты мы будем использовать в дальнейшем при изучении интерференции волн, отраженных от обеих поверхностей тонких пластинок.

0.3.2 Коэффициенты отражения и пропускания

Вопрос об этих коэффициентах мы рассмотрим для случая нормального падения световой волны на границу раздела двух прозрачных диэлектриков. Ранее мы выяснили, что интенсивность I гармонической волны, согласно (0.2.101), пропорциональна $\sqrt{\varepsilon} E_m^2$, или $I \sim n E_m^2$. Коэффициент отражения, по определению, есть $\rho = I'/I = n_1 E_m'^2 / n_1 E_m^2$. После подстановки отношения E'_m/E_m из первой формулы (0.3.106), найдем:

$$\rho = \frac{I'}{I} = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2. \quad (0.3.107)$$

Обратим внимание на то, что ρ не зависит от направления падающей волны на границу раздела: из среды 1 в среду 2, или наоборот.

Аналогично находим и коэффициент пропускания τ как отношение I''/I . Согласно (0.2.101), $I''/I = n_2 E_m''^2 / n_1 E_m^2$. Остается учесть вторую формулу из (0.3.106), и мы получим, что коэффициент пропускания

$$\tau = \frac{I''}{I} = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}. \quad (0.3.108)$$

Нетрудно убедиться в том, что сумма обоих коэффициентов $\rho + \tau = 1$, как и должно быть.

При нормальном (или близком к нему) падении световой волны на границу раздела воздух ($n \approx 1$) и стекло ($n \approx 1,5$) получим $\rho = 0,04$, т. е. отражается около 4% падающего света.

Заметим (это важно!), что если свет падает не по нормали к границе раздела, то коэффициент *пропускания* должен определяться через отношение не интенсивностей, а потоков, поскольку сечения падающего и преломленного пучков в этом случае различны, в отличие от падающего и отраженного. В связи с этим падающий поток $\Phi = \Phi' + \Phi''$, но $I \neq I' + I''$. Итак, в общем случае $\tau = \Phi''/\Phi$.

0.4 Геометрическая оптика

Длины световых волн, воспринимаемых глазом, очень малы (менее 1 мкм). Поэтому распространение света во многих случаях можно рассматривать, отвлекаясь от его волновой природы, и считать, что свет распространяется вдоль лучей.

В пределе ($\lambda \rightarrow 0$) законы оптики можно сформулировать на языке геометрии. Соответствующий раздел оптики называют геометрической (или лучевой) оптикой.

Основу геометрической оптики составляют три закона:

1. Закон прямолинейного распространения света (в однородной среде).
2. Закон отражения света: угол отражения θ' света равен его углу падения θ ,

$$\boxed{\theta' = \theta}. \quad (0.4.109)$$

и оба луча лежат в одной плоскости с нормалью к поверхности раздела.

3. Закон преломления света (закон Снелла): при преломлении света на границе раздела двух изотропных сред с показателями преломления n_1 и n_2 выполняется условие

$$\boxed{n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2}. \quad (0.4.110)$$

Отсюда, в частности, следует, что при падении света на оптически менее плотную среду ($n_2 < n_1$) угол θ_2 может достигнуть 90° . Соответствующий угол падения называют *предельным*:

$$\sin \theta_{\text{пр}} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (0.4.111)$$

Для углов падения $\theta_1 > \theta_{\text{пр}}$ наблюдается *полное внутреннее отражение*. Это явление нашло достаточно широкое практическое применение (призмы полного внутреннего отражения, световоды и др.).

Заметим, что законы отражения и преломления света могут быть получены как следствие поведения электромагнитной волны на границе раздела двух диэлектриков с учетом граничных условий для векторов \mathbf{E} , \mathbf{H} и \mathbf{D} , \mathbf{B} .

0.4.1 Принцип Ферма

Этот принцип также может быть положен в основу геометрической оптики (вместо перечисленных выше трех законов). Он утверждает, что *свет распространяется по такому пути, для прохождения которого ему требуется минимальное время*. Точнее, это время должно быть *экстремальным*, т. е. либо минимальным, либо максимальным, либо стационарным – одинаковым для всех возможных путей. В последнем случае все пути света между двумя точками оказываются *таухронными* (требующими для своего прохождения одинакового времени).

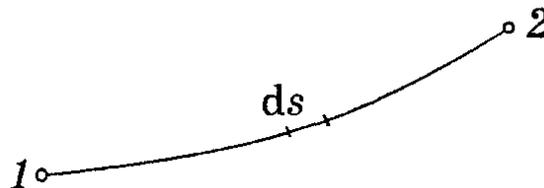


Рис. 17

Участок пути ds (рис. 17) свет проходит за время $dt = \frac{ds}{v}$, где v – скорость света в данном месте. Так как $v = \frac{c}{n}$, то $dt = \frac{nds}{c}$, и время τ для прохождения светом пути $1 \rightarrow 2$

равно

$$\tau = \frac{1}{c} \int_1^2 nds = \frac{L}{c}, \quad (0.4.112)$$

где L называют *оптической длиной пути*. В однородной среде $L = ns$.

Из принципа Ферма действительно следуют все три закона геометрической оптики. Доказательство, например, закона преломления см. в задаче 2.

Для дальнейшего нас будет интересовать только одно следствие принципа Ферма, а именно принцип действия линзы — она будет неоднократно использоваться в установках при наблюдении дифракции (Фраунгофера). Можно показать, что линза (как и любой оптический прибор) является системой *таутохронной*: все оптические пути от источника до его изображения одинаковы. Именно поэтому все колебания приходят в одной фазе, усиливая друг друга, и возникает изображение. Если бы это было не так, изображения мы бы не получили.

Напомним свойства тонкой линзы, необходимые для дальнейшего⁴.

1. Формула тонкой линзы в воздухе:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}, \quad \frac{1}{f'} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \quad (0.4.113)$$

где s и s' — расстояния от линзы до источника S и его изображения S' , f' — заднее фокусное расстояние (от линзы до заднего фокуса F').

Здесь принято следующее *правило знаков*: отрезки, отсчитываемые от линзы против хода лучей, т. е. влево на рис. 13, считаются отрицательными, а по ходу лучей (вправо от линзы) — положительными. На рисунке показан случай, когда $s' > 0$, а $s < 0$. Это относится и к радиусам кривизны поверхностей линзы, R_1 и R_2 , — передней и задней. Для линзы, изображенной на рисунке, $R_1 > 0$, а $R_2 < 0$.

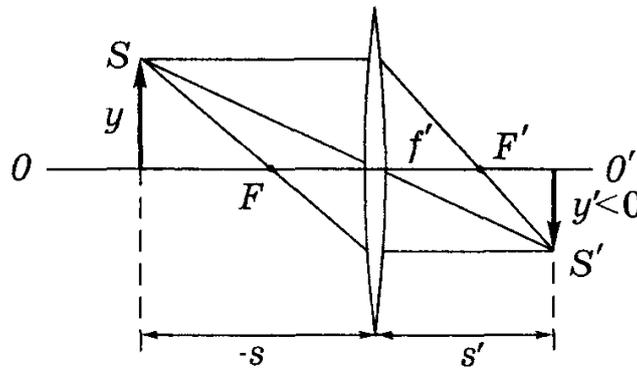


Рис. 18

Таким образом, все величины (кроме n), фигурирующие в формуле (0.4.113), алгебраические. Это во многих случаях очень удобно, поскольку значительно упрощает анализ результатов расчета: если, например, окажется, что $s' < 0$, то это сразу говорит о том, что изображение оказывается слева от линзы, т. е. мнимое и т. п.

Величину $\frac{1}{f'}$ в формуле (0.4.113) называют оптической силой линзы Φ , дптр (1 дптр = 1/м). Оптическая сила не зависит от направления хода лучей: слева — направо или наоборот. Линза с $\Phi > 0$ является *собирающей*, а с $\Phi < 0$ — *рассеивающей*.

⁴Эти свойства, строго говоря, относятся к параксиальным пучкам, т.е. к пучкам лучей, угол которых с главной оптической осью достаточно мал.

Заметим, что если бы линза находилась в среде, показатель преломления которой был бы разным, например, слева n , а справа n' то переднее и заднее фокусные расстояния были бы не одинаковы. Их отношение определялось бы формулой

$$\frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n}. \quad (0.4.114)$$

Знак минус показывает, что оба фокуса, передний F и задний F' , всегда находятся по разные стороны от линзы. Следует также иметь в виду, что при $n' \neq n$ центр линзы оказывается не оптическим центром: луч, проходящий через него, будет испытывать преломление.

2. При падении на линзу пучка параллельных лучей под углом к главной оптической оси (на которой находятся центры кривизны поверхностей линзы, а также фокусы F и F') изображение – точка S' – образуется в задней фокальной плоскости линзы (рис. 19). И главное: оптические пути всех лучей от плоскости TT' перпендикулярной падающей пучку, до изображения S' будут одинаковы в силу *таутохронности*. Это мы будем использовать в дальнейшем неоднократно.

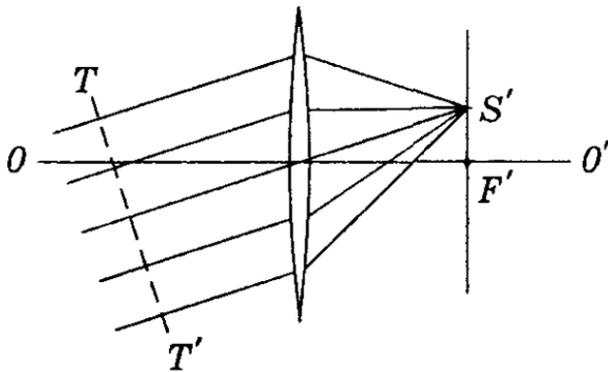


Рис. 19

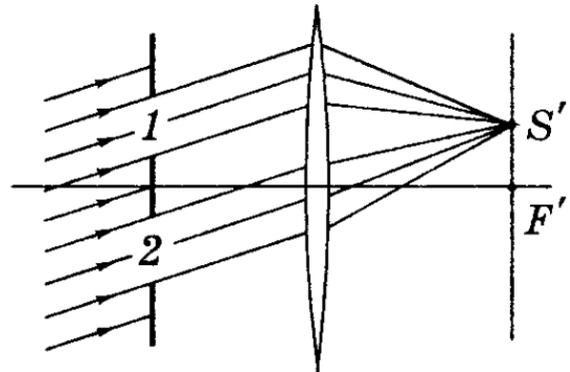


Рис. 20

3. При поступательном смещении параллельного пучка лучей положение точки их схождения S' в фокальной плоскости *не меняется*. Т. е. при смещении, например, отверстия из положения 1 в положение 2 (рис. 20) изображение – точка S' – будет оставаться на прежнем месте. Это мы будем учитывать при изучении действия дифракционной решетки ([2], §5.7).

4. *Линейное* или *поперечное увеличение* линзы $\beta = \frac{y'}{y}$, где y' и y – поперечные размеры изображения и самого предмета (см. рис. 13). Легко видеть, что

$$\beta = \frac{s'}{s}. \quad (0.4.115)$$

На рис. 13 величины y' и s отрицательные, следовательно и $\beta < 0$. Это означает, что изображение перевернутое (относительно предмета).

И последнее. Рассмотрение многих вопросов значительно упрощается, если вместо пути луча s и длины волны λ' в данной среде использовать понятие оптической длины L пути и длины волны λ в вакууме. Для монохроматической волны на пути λ' возникает отставание по фазе на 2π , а на пути s – на δ . Отсюда, учитывая, что $\lambda' = \frac{\lambda}{n}$ и $sn = L$, получим

$$\delta = \frac{2\pi L}{\lambda}, \quad (0.4.116)$$

где λ – отставание по фазе на оптическом пути L . Этими соображениями мы и будем пользоваться в дальнейшем, когда пойдет речь о связи разности фаз с оптической разностью хода Δ . И в этом случае

$$\delta = \frac{2\pi\Delta}{\lambda}. \quad (0.4.117)$$

0.4.2 Применение изученных выше законов при решении конкретных задач

1. Показать, что при преломлении в призме с малым преломляющим углом θ луч отклоняется от своего первоначального направления на угол $\alpha = (n - 1)\theta$ независимо от угла падения, если он также мал.

Решение

Вследствие малости углов падения (и преломления) синусы в законе Снелла⁵ можно опустить. Тогда условия преломления на передней и задней поверхностях призмы (рис.21) примут вид:

$$\vartheta_1 = n\vartheta'_1, \quad n\vartheta_2 = \vartheta'_2, \quad \vartheta'_1 + \vartheta_2 = \theta. \quad (0.4.118)$$

Искомый угол α , как видно из рисунка, равен

$$\alpha = (\vartheta_1 - \vartheta'_1) + (\vartheta'_2 - \vartheta_2). \quad (0.4.119)$$

После подстановки углов из (0.4.118) в (0.4.119) получим

$$\alpha = (n - 1)\theta.$$

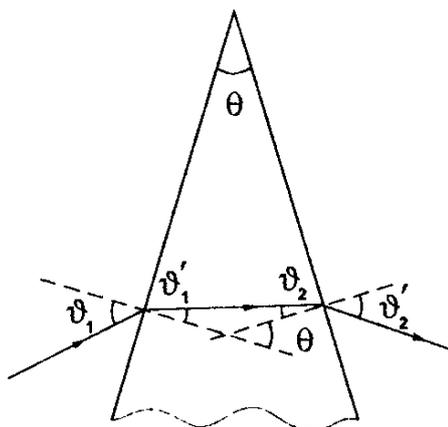


Рис. 21

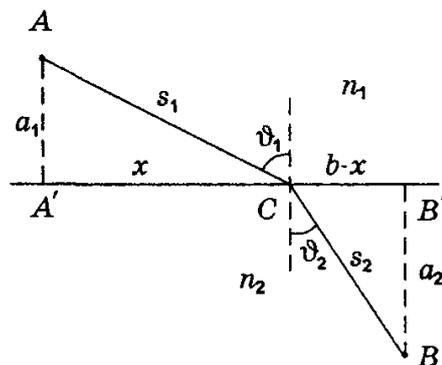


Рис. 22

2. **Принцип Ферма.** Вывести с помощью этого принципа закон преломления света на границе раздела двух прозрачных диэлектриков с показателями преломления n_1 и n_2 .

Решение

Найдем точку C (рис.22), в которой должен преломиться луч, распространяясь от A к B , чтобы оптическая длина пути L была экстремальной. Пусть отрезок $A'B' = b$, тогда, как видно из рисунка,

$$L = n_1 s_1 + n_2 s_2 = n_1 \sqrt{a_1^2 + x^2} + n_2 \sqrt{a_2^2 + (b - x)^2}.$$

⁵

$$n_1 \sin \vartheta_1 = n_2 \sin \vartheta_2$$

Продифференцируем это выражение по x и приравняем производную нулю:

$$\frac{dL}{dx} = \frac{n_1 x}{\sqrt{a_1^2 + x^2}} - \frac{n_2(b-x)}{\sqrt{a_2^2 + (b-x)^2}} = n_1 \frac{x}{s_1} - n_2 \frac{b-x}{s_2} = 0.$$

Множители при n_1 и n_2 равны соответственно $\sin \vartheta_1$ и $\sin \vartheta_2$. Таким образом, получаем

$$n_1 \sin \vartheta_1 = n_2 \sin \vartheta_2,$$

что и требовалось.

3. Вывести с помощью принципа Ферма формулу преломления параксиальных лучей на сферической поверхности радиуса R , разделяющей среды с показателями преломления n и n' :

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{R}.$$

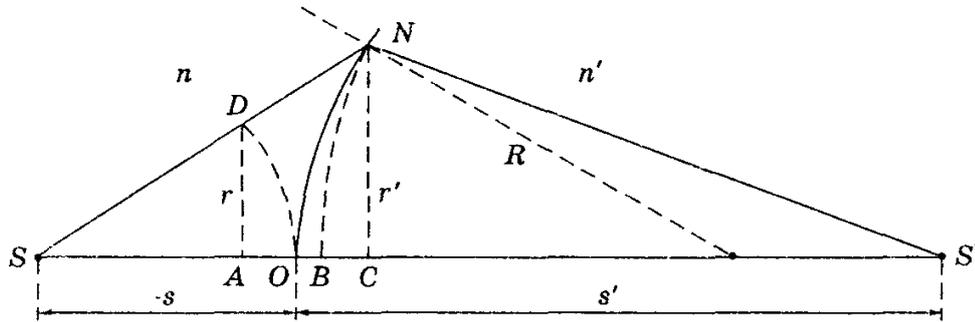


Рис. 23

Решение

Пусть S — точечный источник света и S' — его изображение (рис. 23). По принципу Ферма оптические длины всех лучей, вышедших из S и собравшихся в S' , должны быть одинаковы. Проведем дуги окружностей из центров S и S' радиусами SO и $S'N$. Тогда оптические пути DN и OB должны быть равны:

$$n \cdot DN = n' \cdot OB. \quad (0.4.120)$$

Для параксиальных лучей $DN \approx AO + OC$. Найдем последние два отрезка. Сначала AO : из рисунка видно, что

$$r^2 = (SD)^2 - (SA)^2 = (SD + SA)(SD - SA) \approx 2(-s)AO,$$

откуда

$$AO = \frac{r^2}{(-2s)}.$$

Аналогично

$$OC = \frac{r'^2}{2R}.$$

Отсюда находим сумму $AO + OC$, т. е. DN . В свою очередь

$$OB = OC - BC = \frac{r'^2}{2R} - \frac{r'^2}{2s'}.$$

Подставив это выражение в (0.4.120) и имея в виду, что $r' \approx r$, получим искомое соотношение.

4. **Тонкая линза.** Найти с помощью формулы преломления на сферической границе раздела (см. предыдущую задачу) формулу тонкой линзы в воздухе.

Решение

Применим указанную формулу последовательно для передней и задней поверхностей линзы. Для передней поверхности (рис.24), полагая, что за ней всюду среда с показателем преломления n , запишем:

$$\frac{n}{d + s_0} - \frac{1}{s} = \frac{n - 1}{R_1}.$$

Для задней поверхности линзы источник S_0 находится справа (он мнимый), и мы имеем:

$$\frac{1}{s'} - \frac{n}{s_0} = \frac{1 - n}{R_2},$$

где $s_0 > 0$, а $R_2 < 0$ (в соответствии с правилом знаков).

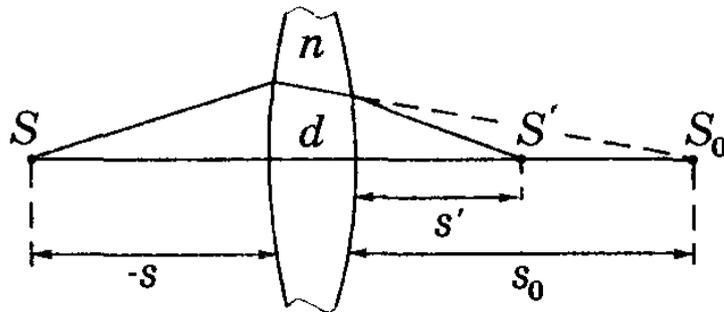


Рис. 24

Сложив отдельно левые и правые части этих равенств с учетом того, что толщина линзы d пренебрежимо мала, получим:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

0.5 Интерференция света

0.5.1 Интерференция световых волн

Пусть две волны одинаковой частоты, накладываясь друг на друга, возбуждают в некоторой точке пространства колебания одинакового направления:

$$A_1 \cos(\omega t + \alpha_1), \quad A_2 \cos(\omega t + \alpha_2).$$

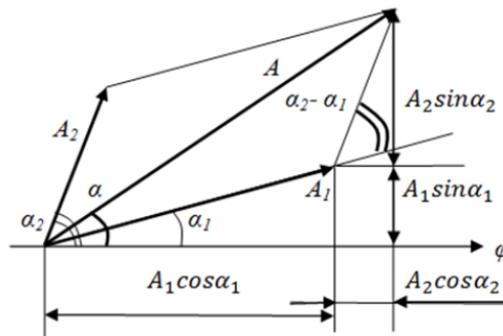


Рис. 25

Амплитуда результирующего колебания в данной точке определяется выражением (см. рис. 25)

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \delta, \quad (0.5.121)$$

где $\delta = \alpha_2 - \alpha_1$.

Если разность фаз δ возбуждаемых волнами колебаний остается постоянной во времени, то волны называются **когерентными**.

В случае некогерентных волн δ непрерывно изменяется, принимая с равной вероятностью любые значения, вследствие чего среднее по времени значение $\cos \delta$ равно нулю. Поэтому

$$\langle A^2 \rangle = \langle A_1^2 \rangle + \langle A_2^2 \rangle.$$

Отсюда приняв во внимание, что $I \sim A^2$, приходим к выводу, что интенсивность, наблюдаемая при наложении некогерентных волн, равна сумме интенсивностей, создаваемых каждой из волн в отдельности:

$$I = I_1 + I_2. \quad (0.5.122)$$

В случае когерентных волн $\cos \delta$ имеет постоянное во времени (но свое для каждой точки пространства) значение, так что

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2} \cos \delta. \quad (0.5.123)$$

Последнее слагаемое в этой формуле и в (0.5.121) называют *интерференционным членом*. Рассмотрим его влияние на результирующую интенсивность.

В тех точках пространства, для которых $\cos \delta > 0$, I будет превышать $I_1 + I_2$; в точках, для которых $\cos \delta < 0$, I будет меньше $I_1 + I_2$. Таким образом, при наложении когерентных световых волн происходит перераспределение светового потока в пространстве, в результате чего в одних местах возникают максимумы, а в других – минимумы интенсивности. Это явление называется **интерференцией** волн. Особенно отчетливо проявляется интерференция в том случае, когда интенсивность обеих интерферирующих волн одинакова: $I_1 = I_2$. Тогда согласно (0.5.123) в максимумах $I = 4I_1$, в минимумах же $I = 0$. Для некогерентных волн при том же условии получается всюду одинаковая интенсивность (0.5.122) $I = 2I_1$.

Основной принцип интерференционных схем. Интерференция характерна для волн любой природы и сравнительно просто наблюдается на опыте для волн на поверхности воды или для звуковых волн. Наблюдать же интерференцию световых волн можно лишь при определенных условиях.

Монохроматичными могут считаться лишь кусочки волны длительностью $\tau \approx 10^{-8}$ с., они называются *цугами*. Цуги имеют пространственную длину $c\tau \approx 3$ м., где c – скорость света. Колебания в одном цуге можно считать когерентными, а в разных цугах – некогерентными. В общем случае интервал времени τ , в течение которого фаза колебаний остается приблизительно постоянной, называют *временем когерентности*, а пространственную длину $c\tau$ называют *длиной когерентности*.

Когерентные световые волны можно получить, разделив (с помощью отражений или преломлений) волну, излучаемую одним источником, на две части. Если заставить эти две волны пройти разные оптические пути, а потом наложить их одна на другую, наблюдается интерференция. Разность оптических длин путей, проходимых интерферирующими волнами, не должна быть очень большой, так как складывающиеся колебания должны принадлежать одному и тому же результирующему цугу волн. Если эта разность будет порядка 1 м., наложатся колебания, соответствующие разным цугам, и разность фаз между ними будет непрерывно меняться хаотическим образом.

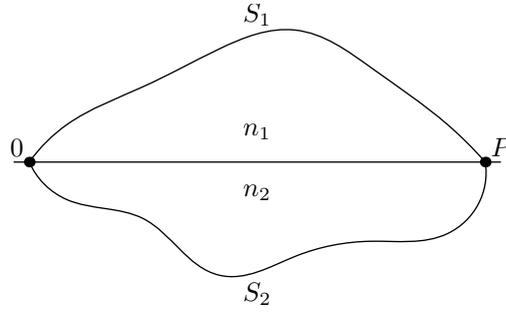


Рис. 26

Пусть разделение на две когерентные волны происходит в точке O (рис. 28). До точки P первая волна проходит в среде с показателем преломления n_1 путь s_1 , вторая волна проходит в среде с показателем преломления n_2 путь s_2 . Если в точке O фаза колебания равна ωt , то первая волна возбудит в точке P колебание $A_1 \cos[\omega(t - \frac{s_1}{v_1})]$, а вторая волна – колебание $A_2 \cos[\omega(t - \frac{s_2}{v_2})]$ ($v_1 = \frac{c}{n_1}$ $v_2 = \frac{c}{n_2}$ – фазовые скорости волн). Следовательно, разность фаз колебаний, возбуждаемых волнами в точке P , будет равна

$$\delta = \omega \left(\frac{s_2}{v_2} - \frac{s_1}{v_1} \right) = \frac{\omega}{c} (n_2 s_2 - n_1 s_1).$$

Заменив $\frac{\omega}{c}$ на $\frac{2\pi\nu}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ (λ_0 – длина волны в вакууме), выражению для разности фаз можно придать вид

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta, \quad (0.5.124)$$

где

$$\Delta = n_2 s_2 - n_1 s_1 = L_2 - L_1 \quad (0.5.125)$$

есть величина, равная разности оптических длин проходимых волнами путей и называемая *оптической разностью хода* ср. с (0.4.117).

Из формулы (0.5.124) видно, что если оптическая разность хода равна целому числу длин волн в вакууме,

$$\Delta = \pm m \lambda_0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (0.5.126)$$

то разность фаз δ оказывается кратной 2π и колебания, возбуждаемые в точке P обеими волнами, будут происходить с одинаковой фазой. Таким образом, (0.5.126) есть условие интерференционного максимума.

Если Δ равна полуцелому числу длин волн в вакууме,

$$\Delta = \pm \left(m + \frac{1}{2} \right) \lambda_0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (0.5.127)$$

то $\delta = \pm(2m + 1)\pi$, так что колебания в точке P находятся в противофазе. Следовательно, (0.5.127) есть условие интерференционного минимума.

Как будет видно в дальнейшем, образовавшиеся после разделения волны во всех интерференционных схемах можно представить как бы исходящими из двух точечных источников S_1 и S_2 (действительных или мнимых – это не существенно). Поэтому общий подход к интерпретации получаемых результатов будет единым, с него мы и начнем.

Рассмотрим две волны, исходящие из когерентных источников S_1 и S_2 (рис. 27). В области, где эти волны перекрываются – ее называют *зоной интерференции* – должна возникать система чередующихся максимумов и минимумов освещенности, которую можно наблюдать на экране \mathcal{E} .

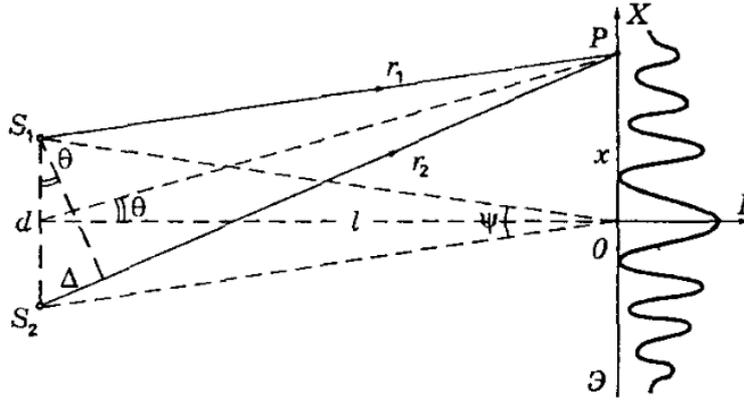


Рис. 27

Ширина интерференционной полосы. В практически важных случаях, угол $\theta \ll 1$ (см. рис. 27) и разность хода Δ можно записать как $\Delta = d \cdot \theta$, где d – расстояние между источниками S_1 и S_2 . А так как $\theta \approx x/\ell$, где ℓ – расстояние от источников до экрана, то для максимумов, согласно (0.5.126), получим $d \cdot \frac{x_m}{\ell} = m\lambda$, откуда

$$x_m = \frac{m\lambda\ell}{d} \quad (0.5.128)$$

В точке $x = 0$ расположен максимум, соответствующий нулевой разности хода. Для него порядок интерференции $m = 0$. Это центр интерференционной картины.

При переходе к соседнему максимуму m меняется на единицу и x – на величину Δx , которую называют *шириной интерференционной полосы*. Таким образом,

$$\Delta x = \frac{\lambda\ell}{d} \quad \Delta x = \frac{\lambda}{\psi}, \quad (0.5.129)$$

где ψ – угол, под которым видны оба источника из центра экрана, $\psi = \frac{d}{\ell}$ (см. рис. 27).

Из этих формул видно, что для увеличения ширины полосы следует увеличивать ℓ , или уменьшать d , или то и другое, т. е. в конечном счете – уменьшать угловое расстояние ψ между источниками. Полезно иметь в виду, что размер интерференционной картины обычно не превышает 1 мм, это при расстоянии от источника до экрана порядка нескольких десятков сантиметров.

Практически для получения более яркой интерференционной картины в качестве источников S_1 и S_2 используют две щели (или изображения исходного источника – щели S), и интерференционная картина имеет вид чередующихся светлых и темных полос, параллельных данным щелям.

Распределение интенсивности. Рассмотрим идеализированный случай, когда источники S_1 и S_2 строго монохроматические. В интересующую нас точку экрана колебания от этих источников будут приходить практически с одинаковой амплитудой, $A_1 = A_2 = A_0$. Тогда, согласно (0.5.121),

$$A^2 = 2A_0^2 + 2A_0^2 \cos \delta = 2A_0^2(1 + \cos \delta) = 4A_0^2 \cos^2 \left(\frac{\delta}{2} \right), \quad (0.5.130)$$

где δ – разность фаз, которая зависит от разности хода $\delta = \frac{2\pi\Delta}{\lambda}$. В нашем случае (см. рис. 27) $\Delta = d \cdot \theta = d \cdot \frac{x}{\ell}$. Следовательно, $\delta = \frac{2\pi xd}{\ell\lambda}$. Имея в виду, что интенсивность $I \sim A^2$, получим

$$I = I_0 \cos^2 \eta x, \quad (0.5.131)$$

где $\eta = \frac{\pi d}{\ell\lambda}$, I_0 – интенсивность в максимумах, в минимумах $I = 0$. Полученное идеализированное распределение интенсивности $I(x)$ несколько отличается, естественно, от реального, которому соответствует рис. 27.

0.5.2 Когерентность

Когерентностью называется согласованное протекание нескольких колебательных или волновых процессов. Степень согласованности может быть различной. Соответственно можно ввести понятие *степени когерентности* двух волн.

Различают *временную* и *пространственную* когерентность. Мы начнем с рассмотрения временной когерентности.

Временная когерентность. Рассмотренный выше процесс интерференции гораздо более сложен. Это обусловлено тем, что монохроматическая волна представляет собой абстракцию. Всякая реальная световая волна образуется наложением колебаний всевозможных частот (или длин волн), заключенных в более или менее узком, но конечном интервале частот $\Delta\omega$ (соответственно длин волн $\Delta\lambda$). Даже для квазимонохроматического света интервал частот $\Delta\omega$ является конечным. В общем виде уравнение колебания можно представить как

$$E = E_0(t) \cos[\omega t - \varphi(t)]. \quad (0.5.132)$$

Если амплитуда $E_0(t)$ и фаза $\varphi(t)$ меняются во времени относительно медленно по сравнению с основными колебаниями с частотой ω , то волны типа (0.5.132), называются квазимонохроматическими.

Перейдем к выяснению роли немонахроматичности световых волн. Пусть световое возмущение описывается уравнением (0.5.132), где амплитуда E_0 и начальная фаза φ являются постоянными величинами, не зависящими от времени в некотором определенном интервале $\tau = \Delta t = t_2 - t_1$ (рис. 28):

$$\left. \begin{aligned} E(t) &= E_0 e^{i\omega_0 t} && \text{при } |t| \leq \frac{\tau}{2}, \\ E(t) &= 0 && \text{при } |t| > \frac{\tau}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (0.5.133)$$

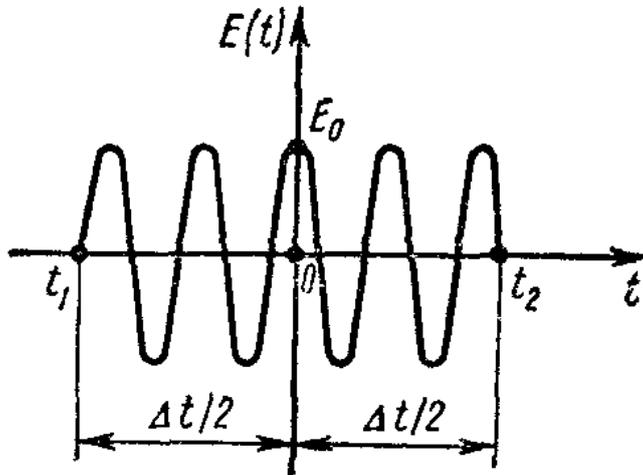


Рис. 28

Колебание, изображенное на рис. 28, длится конечный промежуток времени. Поэтому оно не является периодическим процессом и может быть разложено в интеграл Фурье:

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

где монохроматическая составляющая $E(\omega)$ определяется формулой

$$E(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (0.5.134)$$

Учитывая (0.5.133) в (0.5.134), получим

$$\begin{aligned}
 E(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} E(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{E_0}{2\pi} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{i(\omega_0 - \omega)t} dt = \\
 &= \frac{E_0}{2\pi} \cdot \frac{1}{i(\omega_0 - \omega)} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} i(\omega_0 - \omega) e^{i(\omega_0 - \omega)t} dt = \\
 &= \frac{E_0}{2\pi} \cdot \frac{e^{[i(\omega_0 - \omega)t]} \Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}}{i(\omega_0 - \omega)}.
 \end{aligned} \tag{0.5.135}$$

Производя подстановку границ интегрирования в правой части уравнения (0.5.135) с учетом того, что $\tau = \Delta t$, получим

$$\begin{aligned}
 E(\omega) &= \frac{E_0}{2\pi} \cdot \frac{\exp[i(\omega_0 - \omega)\frac{\Delta t}{2}] - \exp[-i(\omega_0 - \omega)\frac{\Delta t}{2}]}{i(\omega_0 - \omega)} = \\
 &= \frac{E_0}{2\pi} \cdot \frac{\cos[(\omega_0 - \omega)\frac{\Delta t}{2}] + i \sin[(\omega_0 - \omega)\frac{\Delta t}{2}]}{i(\omega_0 - \omega)} - \\
 &- \frac{\cos[(\omega_0 - \omega)\frac{\Delta t}{2}] - i \sin[(\omega_0 - \omega)\frac{\Delta t}{2}]}{i(\omega_0 - \omega)} = \\
 &= \frac{E_0}{2\pi} \cdot \frac{2i \sin(\omega_0 - \omega)\frac{\Delta t}{2}}{i(\omega_0 - \omega)}.
 \end{aligned} \tag{0.5.136}$$

Формулу (0.5.136) можно переписать в виде

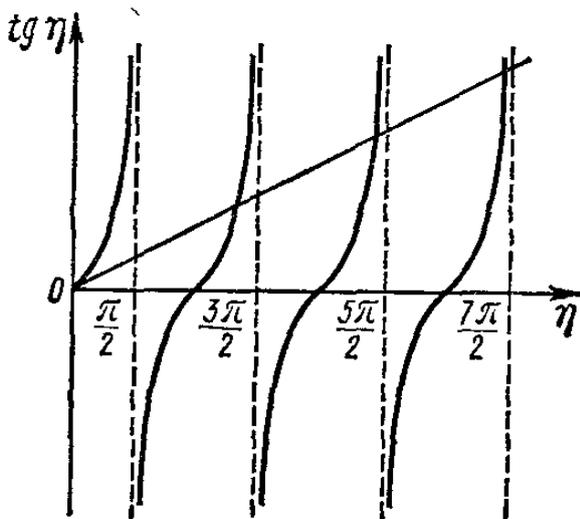


Рис. 29

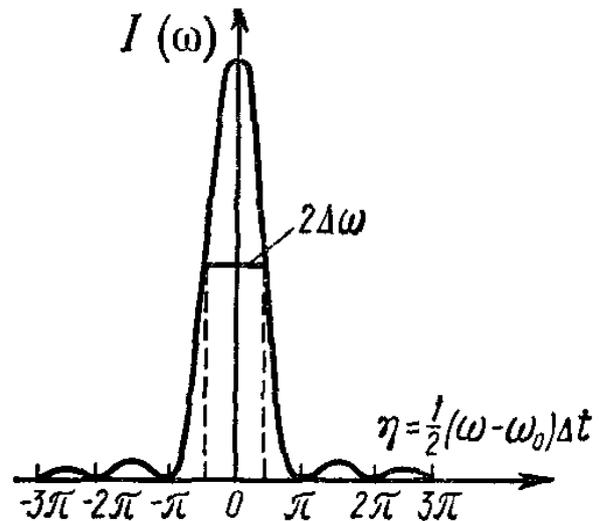


Рис. 30

$$E(\omega) = \frac{E_0}{2\pi} \Delta t \frac{\sin \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)\Delta t}{\frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)\Delta t} = A \frac{\sin \eta}{\eta}, \tag{0.5.137}$$

где $A = \frac{E_0}{2\pi} \Delta t$, $\eta = \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)\Delta t$. Тогда

$$I(\omega) \sim |E(\omega)|^2 = A^2 \frac{\sin^2 \eta}{\eta^2} = \left(\frac{E_0}{2\pi} \Delta t \right)^2 \left[\frac{\sin \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)\Delta t}{\frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)\Delta t} \right]^2. \quad (0.5.138)$$

Функция $F(\eta) = \frac{\sin \eta}{\eta}$ встретится нам при рассмотрении фраунгоферовой дифракции от одной щели. Поэтому более подробно остановимся на свойствах этой функции. Очевидно, $F(\eta)$ обращается в нуль при $\eta = \pm m\pi$, где $m = 1, 2, 3, 4, \dots$. Условия максимума имеют вид $dF(\eta)/d\eta = 0$, откуда следует $\tan \eta = \eta$. Решая это трансцендентное уравнение графически (29), получим значения η , при которых $F(\eta)$ имеет максимумы: $\eta_1 = 0$; $\eta_2 = 1,43\pi$; $\eta_3 = 2,46\pi$; $\eta_4 = 3,47\pi$; $\eta_5 = 4,47\pi$ и т. д.

Подставляя эти значения в (0.5.138), легко убедиться, что с увеличением η второстепенные максимумы резко уменьшаются (табл. 1).

таблица 1

η	0	1,43 π	2,46 π	3,47 π
$(\sin \eta/\eta)^2$	1	0,047	0,016	0,008

На основе таких сведений можно построить график зависимости $I(\omega)$, который показан на (30). Как видно, $I(\omega)$ имеет главный максимум при $\omega = \omega_0$, т. е. при частоте квази-мономатических колебаний. Так как второстепенные максимумы составляют весьма незначительную часть главного, их отношения выражаются как $\left[1 : \left(\frac{2}{3\pi}\right)^2 : \left(\frac{2}{5\pi}\right)^2 : \dots \right]$, то с погрешностью, меньшей 0,05, можно считать, что вся интенсивность сосредоточена в интервале $\eta = \pm\pi$, т. е. спектр является сплошным в интервале частот $\Delta\omega = \omega_0 - \omega$. Это обстоятельство позволяет связать длительность цуга τ с эффективным частотным диапазоном $\Delta\omega$ фурье-спектра:

$$\tau = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{1}{\Delta\nu}.$$

Отождествив τ со временем когерентности, придем к соотношению

$$t_{\text{кор}} \sim \frac{1}{\Delta\nu} \quad (0.5.139)$$

(знак \sim означает: “по порядку величины равно”).

Из соотношения (0.5.139) следует, что чем шире интервал частот, представленных в данной световой волне, тем меньше время когерентности этой волны.

Частота связана с длиной волны в вакууме соотношением $\nu = \frac{c}{\lambda_0}$. Продифференцировав это соотношение, найдем что $\Delta\nu = \frac{c\Delta\lambda_0}{\lambda_0^2} \approx \frac{c\Delta\lambda}{\lambda^2}$ (знак минус, получающийся при дифференцировании, мы опустили, кроме того, положили $\lambda_0 \approx \lambda$). Заменяв в формуле (0.5.139) $\Delta\nu$ его выражением через λ и $\Delta\lambda$, получим для времени когерентности выражение

$$t_{\text{кор}} \sim \frac{\lambda^2}{c\Delta\lambda}. \quad (0.5.140)$$

Отсюда для длины когерентности получается следующее значение:

$$l_{\text{кор}} = ct_{\text{кор}} \sim \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}. \quad (0.5.141)$$

Оптическая разность хода, при которой получается максимум m -го порядка, определяется соотношением

$$\Delta_m = \pm m\lambda_0 \approx \pm m\lambda.$$

Когда эта разность хода достигает значения порядка длины когерентности, полосы становятся неразличимыми. Следовательно, предельный наблюдаемый порядок интерференции определяется условием

$$m_{\text{пред}}\lambda \sim l_{\text{ког}} \sim \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda},$$

откуда

$$m_{\text{пред}} \sim \frac{\lambda}{\Delta\lambda}. \quad (0.5.142)$$

Из (0.5.142) следует, что число интерференционных полос, наблюдаемых по схеме, изображенной на рис. 4.2, возрастает при уменьшении интервала длин волн, представленных в используемом свете.

Пространственная когерентность. Отдельные участки источника света возбуждают волны, фазы которых никак не связаны между собой. Поэтому интерференционная картина, возникающая на экране, будет наложением картин, создаваемых каждым из участков в отдельности. Различия в разности хода, а следовательно, и в разности фаз для разных точек протяженного источника приведут к ухудшению видимости интерференционной картины. Если же изменения разностей хода (разностей фаз) так малы, что это приведет к незначительным изменениям интенсивностей, то будет наблюдаться четкая интерференционная картина, следовательно, в данном случае лучи, исходящие от разных точек источника, будут когерентны. Когерентность лучей, исходящих от пространственно разделенных участков протяженного источника называется *пространственной*.

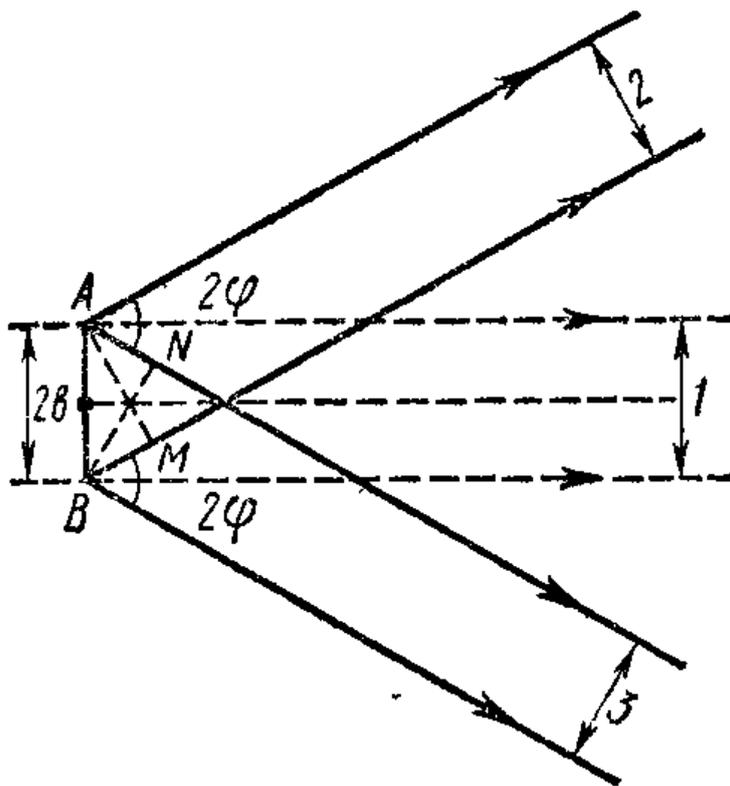


Рис. 31

Можно оценить максимальные размеры источника, при котором интерференция еще наблюдается, т. е. пространственная когерентность сохраняется. Пусть имеем протяженный источник света с шириной равной $2b$. Апертуру интерференции обозначим через 2φ . Очевидно, что каждая точка протяженного источника будет излучать независимо от остальных. Излучение каждой точки протяженного источника влияет на фазу результирующей волновой группы. При излучении в направлении 1 (рис.31) положение каждой точки источника в пределах $2b$ не играет роли. Однако это не имеет места для излучения,

распространяющегося под углом. В этих случаях положение каждого точечного источника в указанных пределах обуславливает дополнительную разность фаз, связанную с разностью хода и зависящую от выбранного направления. Максимальное значение этой разности хода достигается в направлениях 1 и 2 или 1 и 3, для которых

$$AN = BM = 2b \sin \varphi.$$

При $2b \sin \varphi = \frac{\lambda}{2}$ происходит произвольное изменение фазы, в результате чего интерференционная картина исчезает. Если $2b \sin \varphi$ немного меньше $\frac{\lambda}{2}$, то наблюдаются размытые интерференционные полосы, т. е. имеет место частичная когерентность. При $2b \sin \varphi \ll \frac{\lambda}{2}$ можно пренебречь разностью хода, обусловленной протяженностью источника. В этом случае протяженный источник размером $2b$ сводится к точечному, если сравнить его с излучением, заключенным в пределах апертуры интерференции. Здесь наблюдается четкая интерференционная картина, т. е. имеет место пространственная когерентность. Равенство разности хода $2b \sin \varphi$ четверти длины волны соответствует смещению интерференционных картин, полученных от крайних точек A и B протяженного источника, на полполосы. Интерференционная картина остается достаточно четкой, если такое смещение не превышает полполосы, т. е.

$$2b \sin \varphi \ll \frac{\lambda}{4}. \quad (0.5.143)$$

Эта формула, связывающая апертуру интерференции и размеры протяженного источника, называется условием *пространственной когерентности*. Соотношение (0.5.143) позволяет говорить о *ширине когерентности* — $\rho_{\text{ког}}$. Для получения устойчивой интерференционной картины с использованием обычных (не лазерных) источников света применяются схемы имеющие обычно малый апертурный угол. Поэтому с хорошей степенью точности можно положить что в (0.5.143) $\sin \varphi \approx \varphi$, а $\rho_{\text{ког}} = 2b$. На основе сказанного произведем оценку ширины когерентности

$$\rho_{\text{ког}} \sim \frac{\lambda}{\varphi}. \quad (0.5.144)$$

Например, угловой размер Солнца составляет около 0,01 рад, длина световых волн равна примерно 0,5 мкм. Следовательно, ширина когерентности приходящих от Солнца световых волн имеет значение порядка

$$\rho_{\text{ког}} = (0,5/0,01) \text{ мкм} = 50 \text{ мкм} = 0,05 \text{ мм}.$$

В заключение еще раз отметим высокую степень временной и пространственной когерентности лазерных излучений.

0.5.3 Интерференционные схемы

Бипризма Френеля. В этой схеме для разделения исходной световой волны используют двойную призму (бипризму) с малым преломляющим углом Θ (рис. 32). Источником света служит ярко освещенная узкая щель S , параллельная преломляющему ребру бипризмы.

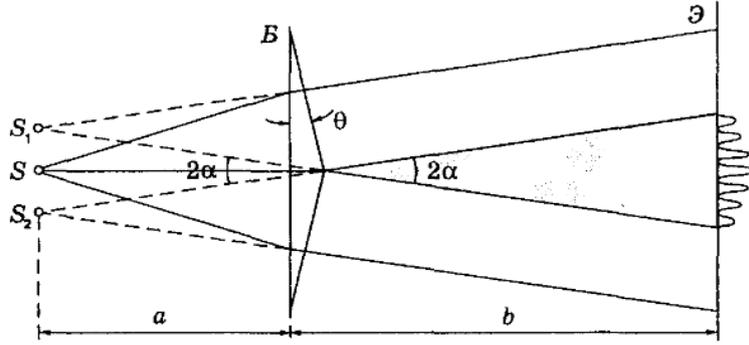


Рис. 32

Поскольку преломляющий угол бипризмы очень мал (порядка десятка угловых минут), то, как можно показать см. пример 2, все лучи отклоняются бипризмой на практически одинаковый угол $\alpha = (n - 1)\Theta$. В результате образуются две когерентные волны, как бы исходящие из мнимых источников S_1 и S_2 , лежащих в одной плоскости со щелью S .

Ширину Δx интерференционных полос находим по первой из формул (0.5.129), учитывая, что в данном случае $\ell = a + b$ и расстояние между изображениями S_1 и S_2 щели S равно $d = a \cdot 2\alpha$. Таким образом,

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2\alpha} \left(1 + \frac{b}{a} \right). \quad (0.5.145)$$

Видно, что ширина полос тем больше, чем больше расстояние b от бипризмы до экрана.

Если же на бипризму падает плоская волна, т. е. $a \rightarrow \infty$, то

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2\alpha}. \quad (0.5.146)$$

Откуда следует, что ширина полосы в этом случае не зависит от положения экрана (расстояния b).

При наблюдении в белом свете центральный максимум (нулевого порядка, $m = 0$) получается белым, остальные окрашенными, поскольку $\Delta x \sim \lambda$.

Максимальное число N возможных полос интерференции на экране, где ширина зоны интерференции $x = b \cdot 2\alpha$ (см. рис. 32), определяется условием $N_{\text{макс}} = \frac{x}{\Delta x}$. Отсюда следует с учетом (0.5.145), что

$$N_{\text{макс}} = \frac{4\alpha^2}{\lambda} \frac{ab}{a+b}. \quad (0.5.147)$$

Пример. Убедимся, что для получения интерференционной картины с шириной полос, например, $\Delta x = 0,5$ мм при размерах установки $a = 50$ см, $b = 100$ см преломляющий угол бипризмы Θ должен быть весьма малым. Будем считать, что показатель преломления стекла $n = 1,5$, и длина волны света $\lambda = 0,5$ мкм. Из (0.5.145) следует, если учесть, что угол $\alpha = (n - 1)\Theta$:

$$\Theta = \frac{\lambda \left(1 + \frac{b}{a} \right)}{2(n - 1)\Delta x} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ рад} \approx 10 \text{ угл. мин.}$$

Найдем, кстати, и ширину зоны интерференции на экране:

$$x = b \cdot 2\alpha = 2(n - 1)\Theta b = 3 \text{ мм.}$$

Видно, что $x \ll b$. Это характерно для многих интерференционных схем, что мы ранее и учитывали, упрощая некоторые расчеты.

В предыдущем параграфе было показано, что условия, подобные рассмотренным нами сейчас для случая бипризмы Френеля, являются необходимыми, но еще не достаточными

для получения интерференционной картины. Следует обязательно учесть роль ширины S щели (она связана с шириной когерентности) и степень монохроматичности $\frac{\lambda}{\Delta\lambda}$ используемого света (которая связана с длиной когерентности). Оказывается (расчет можно посмотреть в задаче 3 раздела 1.4 “Примеры решения задач”), для получения интерференционной картины с достаточно хорошей видимостью нужно, чтобы ширина S щели удовлетворяла условию

$$S \leq \frac{\lambda}{4\alpha} \left(1 + \frac{a}{b}\right), \quad (0.5.148)$$

а степень монохроматичности — условию

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} \geq \frac{4\alpha^2 ab}{\lambda(a+b)}, \quad (0.5.149)$$

где $\alpha = (n-1)\Theta$.

Следует обратить внимание на то, что для увеличения ширины Δx интерференционных полос нужно, согласно (0.5.145), увеличивать отношение $\frac{b}{a}$. А чтобы использовать более широкую щель S , т. е. добиться большей светосильности установки, надо, как видно из (0.5.148), наоборот — увеличивать обратное отношение $\frac{a}{b}$. Компромисс между этими двумя противоположными требованиями решается обычно экспериментально.

0.5.4 Интерференция света при отражении от тонких пластинок

При отражении от плоскопараллельной пластинки. Пусть на прозрачную плоскопараллельную пластинку падает плоская монохроматическая световая волна, направление распространения которой показано падающим лучом на рис. 33. В результате отражений от обеих поверхностей пластинки исходная волна расщепится на две, что и показано лучами 1 и 2. Амплитуды этих волн мало отличаются друг от друга — это важно для получения достаточно контрастной интерференции.

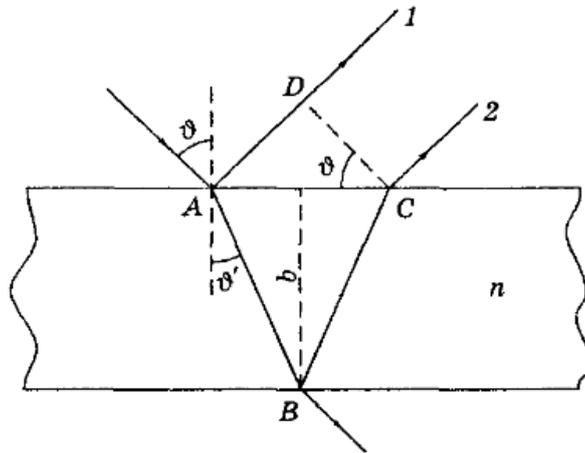


Рис. 33

Заметим, что, кроме этих двух отраженных волн (1 и 2), возникает еще многократное отражение. Однако их вклад практически пренебрежимо мал (см. задачу 5 в разделе 1.3 “Примеры решения задач”), и мы ограничимся только волнами, возникшими при однократном отражении.

Оптическую разность хода волн 1 и 2 определим, согласно рис. 33, как

$$\Delta = n(AB + BC) - AD, \quad (0.5.150)$$

где n — показатель преломления вещества пластинки. Кроме того, видно, что $AB = BC = \frac{2b}{\cos \vartheta'}$ и $AD = 2b \operatorname{tg} \vartheta' \cdot \sin \vartheta$, b — толщина пластинки. В результате подстановки этих выражений в (0.5.150) получим

$$\Delta = 2nb \cos \vartheta'. \quad (0.5.151)$$

Следует также учесть, что при отражении от верхней поверхности пластинки (от среды, оптически более плотной) в соответствии с (0.3.106) происходит скачок фазы на π у отраженной волны, т.е., как говорят, «потеря» полуволны $\left(\pm \frac{\lambda}{2}\right)$. Учитывая еще, что $\sin \vartheta = n \sin \vartheta'$, получим

$$\Delta = 2b\sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta} - \frac{\lambda}{2} \quad (0.5.152)$$

(здесь можно было написать и $+\frac{\lambda}{2}$, но это не существенно).

Если отраженные волны 1 и 2 когерентны между собой (а мы об этом позаботимся), то максимумы отражения будут наблюдаться при условии

$$2b\sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta} - \frac{\lambda}{2} = m\lambda, \quad (0.5.153)$$

где m — целое число (порядок интерференции).

Меняя угол падения ϑ , мы будем наблюдать последовательную смену максимумов и минимумов отражения. (Заметим, что при минимуме отражения наблюдается максимум проходящего через пластинку света, и наоборот.) Если бы обе отраженные волны были некогерентными, то такого явления мы не наблюдали бы: по мере увеличения угла падения интенсивность отраженного света монотонно уменьшалась бы.

Теперь выясним условия, при которых отраженные волны будут когерентными и смогут интерферировать, т.е. выполняются соотношения (0.5.141) и (0.5.144).

Проиллюстрируем ситуацию с помощью рис. 34. Выделим в падающей волне некоторую область когерентности $l_{\text{ког}} \cdot \rho_{\text{ког}}$ (она слегка затенена на рисунке) и проследим за ее дальнейшей судьбой. После расщепления падающей волны расщепится и выделенная область когерентности, причем так, что в отраженных волнах эти области когерентности сместятся относительно друг друга рис. 34,а. Если они при этом перекрываются (на рисунке более темный участок), интерференция будет наблюдаться и тем более отчетливо, чем больше степень перекрытия.

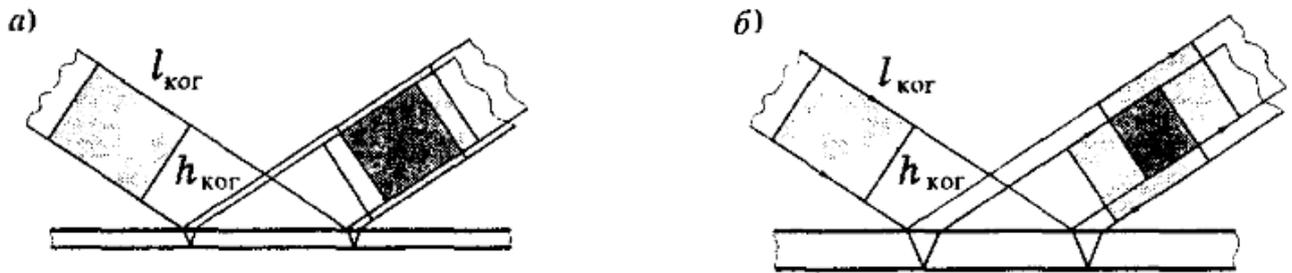


Рис. 34

Нетрудно видеть, что для пластинки с большей толщиной область перекрытия когерентных участков уменьшается рис. 34 б, и интерференция будет наблюдаться все менее отчетливо. Начиная с некоторой толщины пластинки интерференция исчезнет совсем.

Из рис. 34 видно, что смещение расщепленных частей области когерентности происходит как вдоль распространения волны (оно не должно превосходить длину когерентности $l_{\text{ког}}$), так и поперек распространения волны (смещение не должно превосходить ширину когерентности $\rho_{\text{ког}}$). Интерференция будет наблюдаться лишь в том случае, когда будут удовлетворены оба эти условия. Напомним, что для лучшей видности мы договорились брать половины значений $l_{\text{ког}}$ и $\rho_{\text{ког}}$.

Перейдем к расчету. Согласно (0.5.141), необходимо, чтобы оптическая разность хода $\Delta \leq \frac{l_{\text{ког}}}{2}$. Следовательно,

$$2b\sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta} - \frac{\lambda}{2} \leq \frac{l_{\text{ког}}}{2}. \quad (0.5.154)$$

Для оценки необходимого значения толщины пластинки b будем считать, что корень в этом выражении равен величине порядка единицы (что обычно и бывает), а также пренебрежем

$\frac{\lambda}{2}$. Тогда получим

$$2b \leq \frac{l_{\text{ког}}}{2},$$

т. е. необходимо, чтобы удвоенная толщина пластинки была не более половины длины когерентности используемого излучения. Например, если $\lambda = 600 \text{ нм}$, а $\Delta\lambda = 3 \text{ нм}$, то толщина пластинки

$$b \leq \frac{\lambda^2}{4\Delta\lambda} = 3 \cdot 10^4 \text{ нм} = 30 \text{ мкм}.$$

Далее, поперечный сдвиг частей области когерентности не должен превосходить половины ширины когерентности $\rho_{\text{ког}}$. Этот сдвиг, как видно из рис. 33, равен отрезку DC . Значит, необходимо, чтобы $DC \leq \frac{\rho_{\text{ког}}}{2}$. Из рис. 33 следует, что

$$DC = 2b \operatorname{tg} \vartheta' \cos \vartheta = b \frac{\sin 2\vartheta}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta}}.$$

Это смещение существенно зависит от угла падения ϑ . Чем меньше угол падения, тем меньше смещение DC , тем меньше может быть $\rho_{\text{ког}}$. И основную роль в этом случае будет играть длина когерентности. При $\vartheta = 0$ смещение происходит только вдоль распространения волн, поперек — оно равно нулю, и ширина когерентности $\rho_{\text{ког}}$ становится практически не существенной.

Обратимся к вопросу, что следует понимать под словами «тонкая» пластинка. Когда говорят, что интерференция происходит при отражении от тонкой пластинки, то имеют в виду, что ее толщина меньше (в той или иной степени) $l_{\text{ког}}$ и $\rho_{\text{ког}}$ (если $\vartheta \neq 0$). Причем — это важно — при нормальном падении интерференция обеспечивается только соотношением между толщиной пластинки и $l_{\text{ког}}$.

Для солнечного света ($l_{\text{ког}} \approx 5\lambda$) пластинка будет тонкой, если ее толщина порядка нескольких длин волн. Длину когерентности можно увеличить с помощью светофильтров, соответственно увеличивается и толщина пластинки, которую мы называем тонкой. Для лазерного же излучения тонкой будет пластинка в десятки сантиметров и метров (в зависимости от длины когерентности излучения используемого лазера).

Итак, мы выяснили, что при падении плоской световой волны на плоскопараллельную тонкую пластинку интенсивность отраженного света зависит от угла падения. Изменяя этот угол, мы будем наблюдать чередование максимумов и минимумов отраженного света. Это можно использовать для получения интерференционной картины в виде привычной системы полос. Достаточно использовать в качестве падающего рассеянный монохроматический свет (он содержит волны, падающие на пластинку одновременно под разными углами), а на пути отраженного света поставить линзу и в ее фокальной плоскости экран (рис. 35).

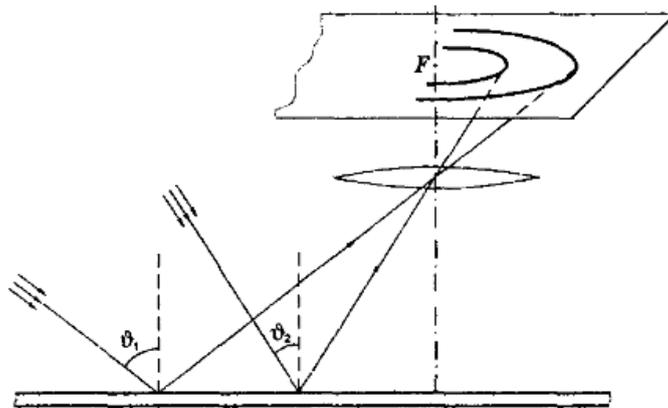


Рис. 35

Максимумы на экране будут располагаться в местах, соответствующих условию (0.5.153). Полоса данного порядка интерференции обусловлена светом, падающим на пластинку под

одним и тем же углом ϑ , но с разных направлений. Поэтому такие полосы называют *полосами равного наклона*. При расположении линзы как показано на рисунке, эти полосы имеют вид концентрических колец с центром в ее фокусе F . Порядок интерференции m растет с уменьшением угла падения ϑ , и в центре картины он максимален.

Поскольку для наблюдения интерференционной картины в данном случае экран помещают в фокальной плоскости линзы, т. е. так, как его располагают для получения на нем изображения бесконечно удаленных предметов, то говорят, что *полосы равного наклона локализованы в бесконечности*. Роль линзы и экрана может играть хрусталик и сетчатка глаза. В этом случае для наблюдения полос равного наклона глаз нужно аккомодировать (настраивать) так, как при рассмотрении удаленных предметов.

В белом свете интерференционные полосы окрашены. Поэтому такое явление называют *цветом тонких пластинок*.

Клиновидные пластинки. Пусть стеклянная пластинка имеет форму клина с углом раствора $\alpha \ll 1$, и на нее падает плоская монохроматическая световая волна. Теперь отраженные от поверхностей клина световые волны будут распространяться не в одном направлении, а под некоторым углом рис. 36.

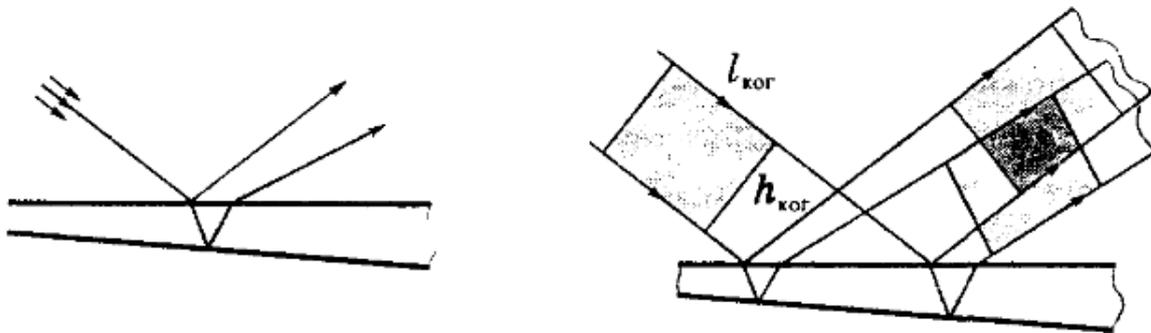


Рис. 36

Выясним прежде всего, где будет локализована интерференционная картина. Это проще всего сделать с помощью рис. 36, на котором показано, что происходит с областью когерентности после расщепления волны при отражении от поверхностей клина. Ясно, что при небольших значениях $l_{\text{ког}}$ и $\rho_{\text{ког}}$, область перекрытия когерентных частей отраженных волн локализована в основном вблизи поверхности клина и становится все более узкой по мере перемещения в сторону утолщения клина, постепенно исчезая совсем. На рисунке область локализации несколько затемнена.

Так как разность хода лучей, отразившихся от различных участков клина, неодинакова, в области локализации интерференции появятся светлые и темные полосы, параллельные ребру клина. Каждая из таких полос возникает в результате отражений от участков клина с одинаковой толщиной, поэтому их называют *полосами равной толщины*.

Локализованные вблизи поверхности клина интерференционные полосы можно наблюдать непосредственно глазом, фокусируя его на поверхность клина, либо с помощью линзы, сфокусированной также на поверхность клина. С помощью линзы интерференционную картину с поверхности клина можно отобразить на экран \mathcal{E} , расположенный в плоскости, сопряженной с поверхностью клина.

Полосы равной толщины можно наблюдать в тонкой клиновидной прослойке воздуха между поверхностями двух прозрачных пластинок. Если направление наблюдения близко к нормальному, то оптическая разность хода лучей, отраженных от поверхностей клина в месте, где ширина зазора равна b , определяется как $\Delta = 2b - \frac{\lambda}{2}$. Там, где $\Delta = \left(m - \frac{1}{2}\right) \lambda$, $m = 1, 2, \dots$, возникают минимумы. Т. е. темные полосы возникают в тех местах, где толщина зазора $b = m \frac{\lambda}{2}$. Переход от одной полосы к соседней (ширина полосы Δx) соответствует изменению толщины зазора на $\frac{\lambda}{2}$. Каждая полоса соответствует определенной толщине зазора. Это используют для проверки качества оптических поверхностей при их

шлифовке, наблюдая в отраженном свете прослойку между контролируемой и эталонной поверхностями.

Измеряя ширину полосы Δx в монохроматическом свете с известной длиной волны λ , можно измерить углы порядка 0,1 угл. мин и меньше (см. задачу 4 из раздела 1.4 “Примеры решения задач”).

В предыдущих рассуждениях мы принимали во внимание только волны, отраженные от поверхностей воздушного клиновидного зазора, игнорируя волны, отраженные от наружных поверхностей пластинок. Это можно сделать лишь постольку, поскольку толщина пластинок обычно значительно превышает длину когерентности используемого света от обычных источников, и отраженные от этих поверхностей волны оказываются некогерентными.

Кольца Ньютона — это кольцевые полосы равной толщины, наблюдаемые при отражении света от поверхностей зазора между стеклянной пластинкой и соприкасающейся с ней выпуклой линзой рис. 37.

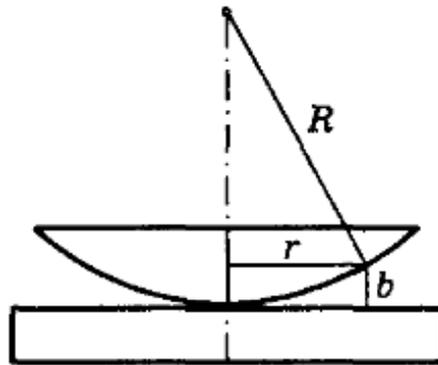


Рис. 37

Волна, отраженная от верхней поверхности линзы, в силу небольшой длины когерентности обычных источников света, некогерентна с волнами, отраженными от поверхностей зазора, и участия в образовании интерференционной картины не принимает. Поэтому мы ее и не будем учитывать.

При нормальном падении света кольца в отраженном свете имеют вид концентрических окружностей с центром в точке соприкосновения линзы с пластинкой. Найдем радиусы r темных колец (минимумов).

Сначала запишем условие образования темных колец. Они возникают там, где оптическая разность хода Δ волн, отраженных от обеих поверхностей зазора, равна нечетному числу полуволен:

$$\Delta = 2b + \frac{\lambda}{2} = (2m + 1) \frac{\lambda}{2},$$

где $\frac{\lambda}{2}$ связано с «потерей» полуволны при отражении от пластинки и $m = 0, 1, 2, \dots$. Отсюда

$$2b = m\lambda. \quad (0.5.155)$$

Далее, согласно теореме Пифагора (см. рис. 37), $r^2 = R^2 - (R - b)^2$. Учитывая, что $b \ll R$, получим

$$r^2 = 2bR. \quad (0.5.156)$$

Из (0.5.155) и (0.5.156) следует, что радиус m -го *темного* кольца

$$r_m = \sqrt{m\lambda R}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (0.5.157)$$

Заметим, что значению $m = 0$ соответствует минимум темного *пятна* (не кольца). Аналогичный расчет можно провести и для светлых колец.

Пример. Найдём радиус 5-го светлого кольца, если радиус кривизны выпуклой поверхности линзы $R = 16$ см и контакт ее с плоской поверхностью стекла идеальный (в точке). Длина волны света $\lambda = 0,50$ мкм. Условие максимумов в данном случае имеет вид

$$2b + \frac{\lambda}{2} = m\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

где b – толщина зазора в месте m -го максимума (заметим, что если бы мы взяли $-\frac{\lambda}{2}$, то значения m надо было начинать с нуля). Согласно (0.5.156), $2b = \frac{r^2}{R}$. Из этих двух соотношений следует, что искомым радиус

$$r_m = \sqrt{\left(m - \frac{1}{2}\right) \lambda R} = 0,6 \text{ мкм.}$$

Следует обратить внимание на то, что формула (0.5.157) справедлива лишь в случае идеального (точечного) контакта сферической поверхности линзы с пластинкой. Но идеальных контактов не бывает, номера колец не равны, вообще говоря, порядку интерференции m , и это обстоятельство необходимо учитывать при расчетах (см. задачу 5 из раздела 1.4 “Примеры решения задач”). Если линзу постепенно отодвигать от поверхности пластинки, то интерференционные кольца будут стягиваться к центру: это ведь кольца (полосы) равной толщины, а она при этом перемещается к центру. С помощью колец Ньютона можно с достаточно высокой точностью контролировать качество изготовления, например, сферических поверхностей. Рассмотрим теперь на конкретном примере вопрос, связанный с причиной локализации колец Ньютона в очень малой области для обычных линз (кольца приходится рассматривать в микроскоп).

Пример. Плосковыпуклая линза, радиус кривизны сферической поверхности которой $R = 60$ мм, соприкасается со стеклянной пластинкой. Оценим радиус наблюдаемой в отраженном свете интерференционной картины, если длина волны света $\lambda = 0,60$ мм и $\Delta\lambda = 0,06$ мкм. Свет падает практически нормально. При нормальном падении света ограничивать интерференционную картину будет только длина когерентности $l_{\text{ког}}$. Кольца исчезают при условии $2b \approx l_{\text{ког}}$, где b – ширина зазора в месте исчезновения колец. Согласно (0.5.156), $r^2 = 2bR$, а $l_{\text{ког}} \approx \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$. Из этих формул получим $\frac{r^2}{R} \approx \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$, откуда

$$r \approx \lambda \sqrt{\frac{R}{\Delta\lambda}} = 0,6 \text{ мм.}$$

Число видимых колец равно $m = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \approx 10$. Этот результат можно получить и с помощью (0.5.157).

0.5.5 Многолучевая интерференция

До сих пор мы рассматривали двухлучевую интерференцию. Теперь исследуем случай, когда интерферирует много световых лучей.

Допустим, что в данную точку экрана приходит N лучей одинаковой интенсивности, причем фаза каждого следующего луча сдвинута относительно фазы предыдущего на одну и ту же величину δ . Представим возбуждаемые лучами колебания в виде экспонент:

$$E_1 = a \exp(i\omega t), \quad E_2 = a \exp[i(\omega t + \delta)], \dots, E_m = a \exp[i\omega t + (m - 1)\delta], \dots, \\ E_N = a \exp[i\omega t + (N - 1)\delta].$$

Результирующее колебание определится формулой

$$E = \sum_{m=1}^N E_m = a \exp(i\omega t) \sum_{m=1}^N \exp[i(m-1)\delta].$$

Полученное выражение представляет собой сумму N членов геометрической прогрессии с первым членом, равным единице, и знаменателем, равным $\exp(i\delta)$. Следовательно,

$$E = a \exp(i\omega t) \frac{1 - \exp(iN\delta)}{1 - \exp(i\delta)} = \hat{A} \exp(i\omega t).$$

где

$$\hat{A} = a \frac{1 - \exp(iN\delta)}{1 - \exp(i\delta)} \quad (0.5.158)$$

есть комплексная амплитуда, которую можно представить в виде

$$\hat{A} = A \exp(i\alpha) \quad (0.5.159)$$

(A – обычная амплитуда результирующего колебания, α – его начальная фаза).

Произведение величины (0.5.159) на ее комплексно сопряженную дает квадрат амплитуды результирующего колебания:

$$\hat{A}\hat{A}^* = A \exp(i\alpha) A \exp(-i\alpha) = A^2. \quad (0.5.160)$$

Подставив в (0.5.160) значение (0.5.158) для \hat{A} , получим следующее выражение для квадрата амплитуды:

$$\begin{aligned} A^2 = \hat{A}\hat{A}^* &= a^2 \frac{[1 - \exp(iN\delta)][1 - \exp(-iN\delta)]}{[1 - \exp(i\delta)][1 - \exp(-i\delta)]} = a^2 \frac{2 - \exp(iN\delta) - \exp(-iN\delta)}{2 - \exp(i\delta) - \exp(-i\delta)} = \\ &= a^2 \frac{1 - \cos(N\delta)}{1 - \cos \delta} = a^2 \frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}. \end{aligned} \quad (0.5.161)$$

Интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды. Следовательно, интенсивность, возникающая при интерференции N лучей, определяется выражением

$$I(\delta) = K a^2 \frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} \quad (0.5.162)$$

(K – коэффициент пропорциональности, $I_0 = K a^2$ – интенсивность, создаваемая каждым из лучей в отдельности). При значениях

$$\delta = 2\pi m \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (0.5.163)$$

выражение (0.5.163) становится неопределенным. Раскроем неопределенность по правилу Лопиталья:

$$\lim_{\delta \rightarrow 2\pi m} \frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} = \lim_{\delta \rightarrow 2\pi m} \frac{2 \sin\left(\frac{N\delta}{2}\right) \cos\left(\frac{N\delta}{2}\right) \cdot \frac{N}{2}}{2 \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}} = \lim_{\delta \rightarrow 2\pi m} N \frac{\sin(N\delta)}{\sin \delta}. \quad (0.5.164)$$

Полученное выражение также оказывается неопределенным. Поэтому применим правило Лопиталья еще раз:

$$\lim_{\delta \rightarrow 2\pi m} \frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} = \lim_{\delta \rightarrow 2\pi m} N \frac{\sin(N\delta)}{\sin(\delta)} = \lim_{\delta \rightarrow 2\pi m} N \frac{N \cos(N\delta)}{\cos \delta} = N^2. \quad (0.5.165)$$

Таким образом, при $\delta = 2\pi t$ (или разностях хода $\Delta = t\lambda_0$) результирующая интенсивность равна

$$I = I_0 N^2. \quad (0.5.166)$$

Такой результат можно было предвидеть заранее. Действительно, в точки, для которых $\Delta = 2\pi t$, все колебания приходят в одинаковой фазе. Следовательно, результирующая амплитуда оказывается в N раз больше амплитуды отдельного колебания, а интенсивность в N^2 раз больше интенсивности отдельного колебания.

Назовем места, в которых наблюдается интенсивность, определяемая формулой (0.5.166), **главными максимумами**. Их положение определяется условием (0.5.163). Число t называется *порядком* главного максимума. Из выражения (0.5.162) следует, что в промежутке между двумя соседними главными максимумами располагается $N - 1$ минимумов интенсивности. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим, например, промежуток между максимумами нулевого ($m = 0$) и первого ($m = 1$) порядка. В этом промежутке δ изменяется от нуля до 2π , а $\frac{\delta}{2}$ — от нуля до π . Знаменатель выражения (0.5.162) всюду, кроме концов промежутка, отличен от нуля, причем в середине промежутка он достигает наибольшего значения, равного единице. Величина $N\frac{\delta}{2}$ принимает в рассматриваемом промежутке все значения от нуля до $N\pi$. При значениях $\pi, 2\pi, \dots, (N-1)\pi$ числитель выражения (0.5.162) становится равным нулю. Это и будут минимумы интенсивности. Их положения отвечают значениям δ , равным

$$\delta = \frac{k'}{N} \cdot 2\pi \quad (k = 1, 2, \dots, N-1). \quad (0.5.167)$$

В промежутках между $N - 1$ минимумами располагаются $N - 2$ вторичных максимумов. Наибольшей интенсивностью обладают вторичные максимумы, ближайšie к главным максимумам. Вторичный максимум, ближайший к главному максимуму нулевого порядка, лежит между первым ($k' = 1$) и вторым ($k' = 2$) минимумами. Этим минимумам отвечают значения δ , равные $\frac{2\pi}{N}$ и $\frac{4\pi}{N}$. Следовательно, рассматриваемому вторичному максимуму соответствует $\delta = \frac{3\pi}{N}$. Подстановка этого значения в формулу (0.5.162) дает

$$I\left(\frac{3\pi}{N}\right) = Ka^2 \frac{\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{3\pi}{2N}\right)}.$$

Числитель равен единице. При большом N можно положить синус в знаменателе равным его аргументу ($\sin\left(\frac{3\pi}{2N}\right) \approx \frac{3\pi}{2N}$). Тогда

$$I\left(\frac{3\pi}{N}\right) = Ka^2 \frac{1}{\left(\frac{3\pi}{2N}\right)^2} = \frac{Ka^2 N^2}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2}.$$

В числителе получилась интенсивность главного максимума (см. (0.5.166)). Таким образом, при большом N ближайший к главному максимуму вторичный максимум имеет интенсивность в $\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 \approx 22$ раза меньшую, чем интенсивность главного максимума. Остальные вторичные максимумы оказываются еще слабее. На рис. 38 изображен график функции $I(\delta)$ для $N = 10$. Для сравнения штриховой линией показан график интенсивности для $N = 2$ (двухлучевая интерференция; см. кривую $I(x)$ на рис. 27). Из рисунка видно, что с увеличением числа интерферирующих лучей главные максимумы делаются все более узкими. Вторичные максимумы настолько слабы, что практически интерференционная картина имеет вид узких ярких линий на темном фоне.

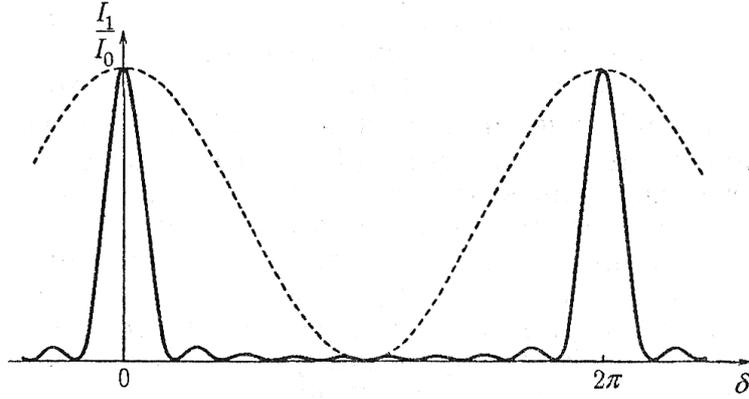


Рис. 38

Теперь рассмотрим интерференцию очень большого числа лучей, интенсивность которых убывает в геометрической прогрессии. Складываемые колебания имеют вид

$$E_1 = a \exp(i\omega t), E_2 = a\rho \exp[i(\omega t + \delta)], \dots, E_m = a\rho^{m-1} \exp\{i[\omega t + (m-1)\delta]\}, \dots \quad (0.5.168)$$

(ρ — постоянная величина, меньшая единицы). Результирующее колебание описывается формулой

$$E = \sum_{m=1}^N E_m = a \exp(i\omega t) \sum_{m=1}^N \rho^{m-1} \exp[i(m-1)\delta].$$

Воспользовавшись выражением для суммы членов геометрической прогрессии, получим

$$E = a \exp(i\omega t) \frac{1 - \rho^N \exp(iN\delta)}{1 - \rho \exp(i\delta)} = \hat{A} \exp(i\omega t).$$

Таким образом, комплексная амплитуда равна

$$\hat{A} = a \frac{1 - \rho^N \exp(iN\delta)}{1 - \rho \exp(i\delta)}. \quad (0.5.169)$$

Если N очень велико, комплексным числом $\rho^N \exp(iN\delta)$ можно пренебречь по сравнению с единицей (для примера укажем, что $0,9^{100} \approx 3 \cdot 10^{-5}$). Тогда выражение (0.5.169) упрощается следующим образом:

$$\hat{A} = a \frac{1}{1 - \rho \exp(i\delta)}.$$

Умножив это выражение на комплексно с ним сопряженное, получим квадрат обычной амплитуды результирующего колебания:

$$\begin{aligned} A^2 = \hat{A}\hat{A}^* &= \frac{a^2}{[1 - \rho \exp(i\delta)][1 - \rho \exp(-i\delta)]} = \\ &= \frac{a^2}{1 + \rho^2 - \rho[\exp(i\delta) + \exp(-i\delta)]} = \frac{a^2}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos \delta} = \\ &= \frac{a^2}{(1 - \rho)^2 + 2\rho(1 - \cos \delta)} = \frac{a^2}{(1 - \rho)^2 + 4\rho \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$I(\delta) = \frac{Ka^2}{(1 - \rho)^2 + 4\rho \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} = \frac{I_1}{(1 - \rho)^2 + 4\rho \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}, \quad (0.5.170)$$

где $I_1 = Ka^2$ — интенсивность первого (наиболее интенсивного) луча. При значениях

$$\delta = 2\pi m \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (0.5.171)$$

выражение (0.5.170) имеет максимумы, равные

$$I_{\max} = \frac{I_1}{(1 - \rho)^2}. \quad (0.5.172)$$

В промежутках между максимумами функция изменяется монотонно, достигая в середине промежутка значения, равного

$$I_{\min} = \frac{I_1}{(1 - \rho)^2 + 4\rho} = \frac{I_1}{(1 + \rho)^2} \quad (0.5.173)$$

Таким образом, отношение интенсивности в максимуме к интенсивности в минимуме

$$\frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \left(\frac{1 + \rho}{1 - \rho} \right)^2 \quad (0.5.174)$$

оказывается тем больше, чем ближе ρ к единице, т. е. чем медленнее происходит убывание интенсивности интерферирующих лучей.

На рис. 39 показан график функции (0.5.170) для $\rho = 0,8$. Из рисунка следует, что интерференционная картина имеет вид узких резких линий на практически темном фоне. В отличие от рис. 38 вторичные максимумы отсутствуют.

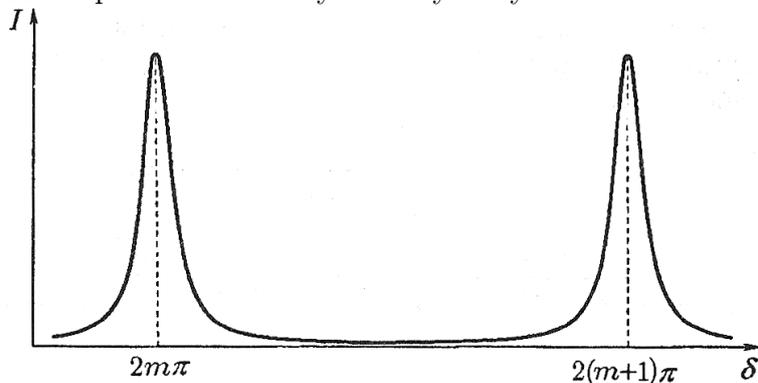


Рис. 39

Практически случай большого числа лучей с убывающей интенсивностью осуществляется в *интерферометре Фабри-Перо*. Этот прибор состоит из двух стеклянных или кварцевых пластинок, разделенных воздушным промежутком (рис. 40). Тщательной обработкой добиваются того, чтобы неровности внутренних поверхностей пластинок не превышали нескольких сотых долей длины световой волны. Затем на эти поверхности наносятся частично прозрачные металлические слои или диэлектрические пленки.

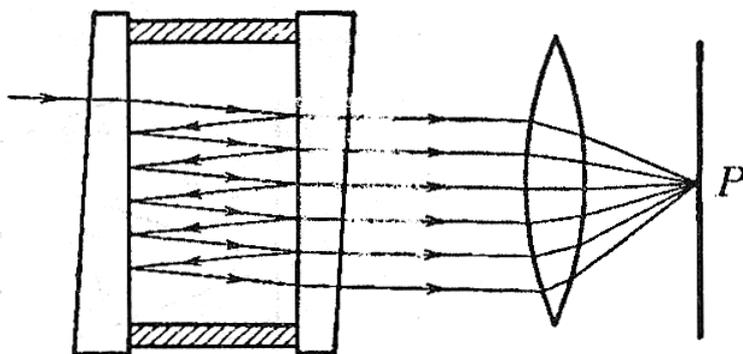


Рис. 40

Внешние поверхности пластинок делают слегка скошенными относительно внутренних, чтобы устранить блики, обусловленные отражением света от этих поверхностей. В

первоначальной конструкции интерферометра одна из пластинок могла перемещаться относительно другой неподвижной пластинки с помощью микрометрического винта. Однако ненадежность такой конструкции привела к тому, что она вышла из употребления. В современных конструкциях пластинки закреплены неподвижно. Параллельность внутренних рабочих плоскостей достигается тем, что между пластинками устанавливается кольцо из инвара или кварца. Это кольцо имеет с каждой стороны по три выступа с тщательно отшлифованными торцами. Пластинки прижимаются к кольцу пружинами. Такое устройство надежно обеспечивает строгую параллельность внутренних плоскостей пластинок и постоянство расстояния между ними. Подобный интерферометр с фиксированным расстоянием между пластинками называется эталоном Фабри-Перо.

Рассмотрим, что происходит с лучом, вошедшим в зазор между пластинками (рис. 41). Пусть интенсивность вошедшего луча равна I_0 . В точке A_1 этот луч разделяется на вышедший наружу луч 1 и отраженный луч $1'$. Если коэффициент отражения от поверхности пластинки равен ρ , то интенсивность луча 1 будет равна $I_1 = (1 - \rho)I_0$, а интенсивность отраженного луча $I_1' = \rho I_0$. В точке B_1 луч $1'$ разделяется на два. Показанный штриховой линией луч $1'''$ выйдет из игры, а отраженный луч $1''$ будет иметь интенсивность $I_1'' = \rho I_1' = \rho^2 I_0$. В точке A_2 луч $1''$ разделится на два луча — вышедший наружу луч 2 с интенсивностью $I_2 = (1 - \rho)I_1'' = (1 - \rho)\rho^2 I_0$ и отраженный луч $2'$, и т. д. Таким образом, для интенсивностей вышедших из прибора лучей 1, 2, 3, ... имеет место соотношение

$$I_1 : I_2 : I_3 : \dots = 1 : \rho^2 : \rho^4 : \dots$$

Соответственно для амплитуд колебаний получается соотношение (ср. с (0.5.168))

$$A_1 : A_2 : A_3 : \dots = 1 : \rho : \rho^2 : \dots$$

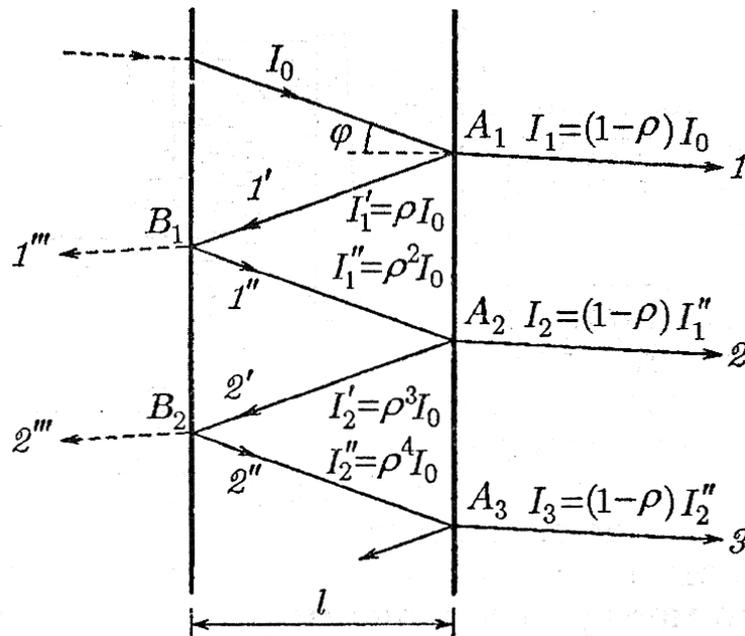


Рис. 41

Колебание в каждом из лучей 2, 3, 4, ... отстает по фазе от колебания в предыдущем луче на одну и ту же величину δ , определяемую оптической разностью хода Δ , возникающей на пути $A_1 - B_1 - A_2$ либо $A_2 - B_2 - A_3$ и т. д. (см. рис. 41). Из рисунка видно, что $\Delta = \frac{2l}{\cos \varphi}$, где φ — угол падения лучей на отражающие слои. Если собрать лучи 1, 2, 3, ... с помощью линзы в точке P фокальной плоскости (см. рис. 41), то колебания, создаваемые этими лучами, будут иметь вид (0.5.168). Следовательно, интенсивность в точке P

определяется формулой (0.5.172), в которой ρ имеет смысл коэффициента отражения, а

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{2l}{\cos \varphi}.$$

При пропускании сквозь прибор расходящегося пучка света в фокальной плоскости линзы возникают полосы равного наклона, имеющие вид резких колец (рис. 42).

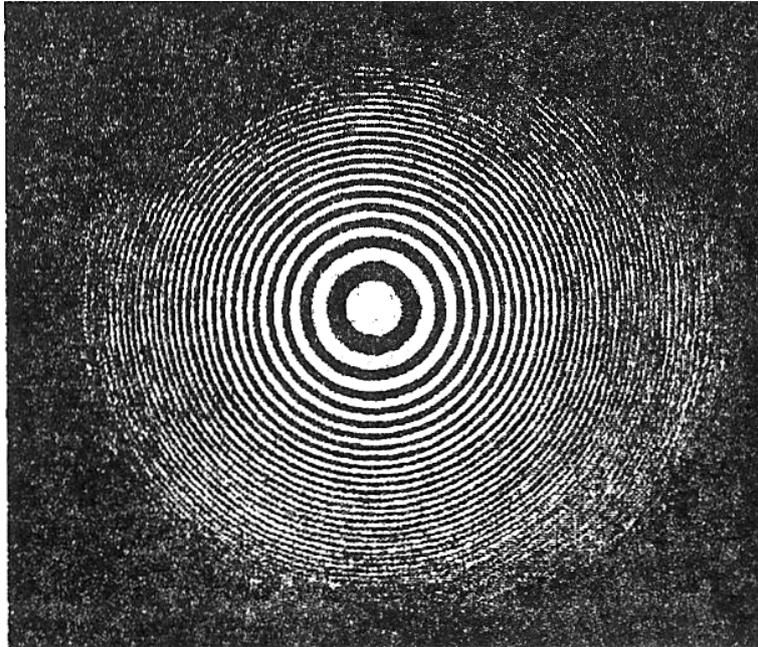


Рис. 42

Интерферометр Фабри–Перо используется в спектроскопии для изучения тонкой структуры спектральных линий. Он нашел также широкое применение в метрологии для сравнения длины стандартного метра с длинами волн отдельных спектральных линий.

0.6 Дифракция света

0.6.1 Принцип Гюйгенса—Френеля

Введение. Под дифракцией света, как и других волновых процессов, понимают любое отклонение от прямолинейного распространения колебаний в среде с резкими неоднородностями (края экранов, отверстия и др.), что связано с отклонениями от законов геометрической оптики. Это приводит к огибанию световыми волнами препятствий и проникновению света в область геометрической тени.

Мы постоянно наблюдаем дифракцию звуковых волн, волн на поверхности воды, радиоволн. Для наблюдения же дифракции световых волн необходимы специальные условия, обусловленные малостью их длин волн λ .

Наблюдение дифракции света проводят обычно по такой схеме. На пути световой волны помещают непрозрачную преграду, закрывающую часть световой волны. За преградой располагают экран, на котором при определенных условиях возникает дифракционная картина в виде той или иной системы полос и пятен — максимумов и минимумов освещенности. Исследование распределения интенсивности света на экране и будет являться основной нашей задачей, поскольку дает достаточно обширную информацию как о свойствах самой световой волны, так и о действии того или иного участка незакрытой части преграды (круглых отверстий, щелей и др.).

Первое объяснение дифракции света принадлежит Френелю (1818 г.). Он показал, что количественное описание дифракционных явлений возможно на основе построения Гюйгенса, если его дополнить принципом интерференции вторичных волн.

Вообще говоря, для описания дифракционных явлений не требуется вводить никаких новых принципов. В рамках электромагнитной теории света задача сводится к нахождению решения уравнений Максвелла при определенных граничных условиях. Однако решение такой задачи представляет большие математические трудности. Поэтому в большинстве случаев, представляющих практический интерес, вполне достаточным оказывается приближенный метод решения задачи о распределении интенсивности света, основанный на принципе Гюйгенса-Френеля. Именно этот принцип и основанные на нем простые и наглядные методы расчета мы и возьмем за основу дальнейшего изложения.

Принцип Гюйгенса—Френеля. Этот принцип является основным постулатом волновой теории, описывающим и объясняющим механизм распространения волн, в частности световых. В чем его суть?

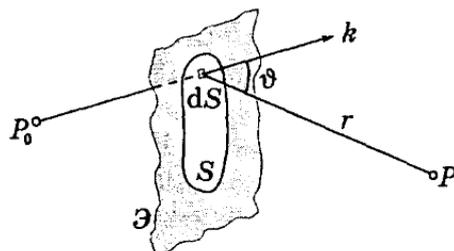


Рис. 43

Рассмотрим экран Э с некоторым отверстием, через которое проходит свет от точечного монохроматического источника P_0 (рис. 43). Задача состоит в определении напряженности E в любой точке P за экраном.

В методе Френеля предполагается, что напряженность E в точках отверстия такова, как и при отсутствии экрана, и что в точках непосредственно за экраном $E = 0$. Т. е. считается, что существенна только форма отверстия экрана, но не сам экран. Это предположение, как показал опыт, справедливо, когда размеры отверстия и расстояния до источника и точки наблюдения P значительно больше длины волны λ , т. е. когда отклонения от геометрической оптики довольно малы. Оно нарушается для отверстия, например, щели, ширина которой значительно меньше λ .

Закроем мысленно отверстие в экране произвольной поверхностью S . Разобьем эту поверхность на элементарные участки dS . По предположению Френеля каждый из этих участков становится источником вторичной сферической волны. Амплитуда вторичной световой волны, достигающей интересующей нас точки P , должна быть пропорциональна амплитуде E_m первичной волны, приходящей к элементу dS , а также площади самого элемента dS , и обратно пропорциональна расстоянию r от элемента dS до точки P .

Для определения результирующей амплитуды колебаний в точке P , т. е. суммы элементарных амплитуд, необходимо еще учесть, что колебания от разных элементов dS достигают точки P с разными фазами. Это приводит к появлению в выражении для результирующей амплитуды множителя $\cos(kr + \alpha)$, где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, а α — дополнительная фаза, равная фазе первичной волны в элементе dS (для разных элементов она в общем случае не одинакова).

Таким образом, результирующая амплитуда напряженности E_m в точке P может быть представлена как суперпозиция элементарных амплитуд с учетом их взаимных фазовых соотношений:

$$E_m = \int_s K(\vartheta) \frac{a_0}{r} \cos(kr + \alpha) dS \quad (0.6.175)$$

где интегрирование проводится по выбранной нами поверхности S .

В интеграле (0.6.175) a_0 — величина, определяемая амплитудой световой волны в месте нахождения элемента dS ; $K(\vartheta)$ — некоторый коэффициент, зависящий от угла ϑ между первоначальным направлением световой волны в данной точке — волновым вектором \mathbf{k} —

и направлением на точку P . Естественно предположить, что коэффициент K монотонно убывает с ростом угла ϑ . Многие практически важные дифракционные задачи можно, как мы увидим далее, решить при весьма общих предположениях относительно $K(\vartheta)$, не уточняя конкретного вида зависимости его от угла ϑ .

В дальнейшем мы будем рассматривать ситуации, позволяющие в качестве поверхности S брать *волновую* поверхность падающей волны, что значительно упрощает расчеты. В этом случае угол ϑ в коэффициенте $K(\vartheta)$ представляет собой угол между нормалью \mathbf{n} к элементу поверхности dS и направлением от dS к точке P , а дополнительную фазу α в (0.6.175) можно считать равной нулю, $\alpha = 0$. Интеграл (0.6.175) выражает собой математическую формулировку **принципа Гюйгенса-Френеля**. Суть этого принципа в следующем: *для определения амплитуды колебания в точке P , лежащей перед некоторой поверхностью S , надо найти амплитуды колебаний, приходящих в эту точку от всех элементов dS поверхности S и затем сложить их с учетом амплитуд и фаз*. При этом предполагается, что все элементы поверхности S взаимно когерентны — это необходимое условие для интерференции вторичных волн.

Принцип Гюйгенса-Френеля можно представить в простой и наглядной форме с помощью векторной (фазовой) диаграммы (рис. 44).

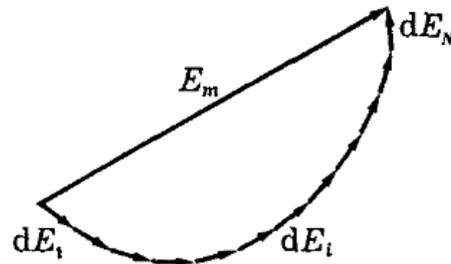


Рис. 44

Использование подобных диаграмм в дальнейшем позволит значительно упростить многие рассуждения и расчеты. На этой диаграмме результирующая амплитуда — вектор \vec{E}_m — представлена как векторная сумма амплитуд $d\vec{E}$ колебаний в точке P от различных элементов dS поверхности S с учетом их фаз, т. е. углов между ними.

0.6.2 Дифракция Френеля на круглом отверстии

Зоны Френеля. Суммирование (интегрирование) амплитуд элементарных колебаний, приходящих в точку P , вообще говоря, весьма сложно. Но в простейших случаях, обладающих определенной симметрией, интегрирование, как показал Френель, может быть заменено простым алгебраическим или графическим сложением (последнее особенно наглядно).

Суммирование амплитуд колебаний, приходящих от различных элементов волновой поверхности S , Френель предложил делать с помощью разбиения поверхности S на зоны, конфигурация которых зависит от симметрии рассматриваемой задачи.

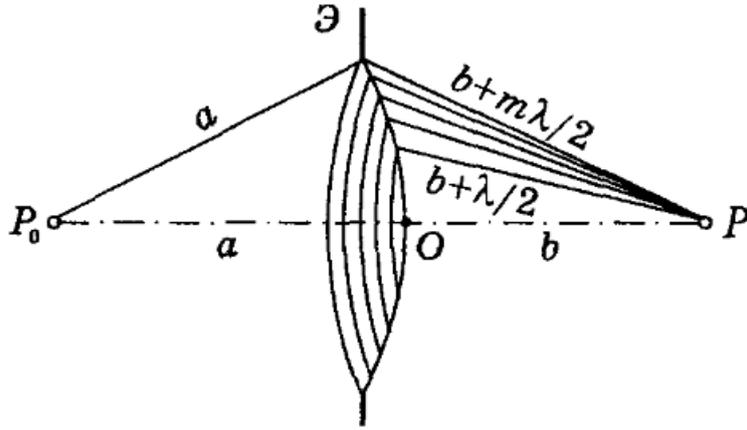


Рис. 45

Пользуясь методом Френеля, определим амплитуду световых колебаний в точке P за круглым отверстием на его оси (рис. 45). Волновая поверхность S , которой мы перекроем отверстие, симметрична относительно прямой P_0P , поэтому ее наиболее целесообразно разбивать на *кольцевые* зоны с центром на оси отверстия. Эти зоны выбираем так, чтобы расстояние от краев каждой зоны до точки P отличалось друг от друга на половину длины волны, $\frac{\lambda}{2}$. Это и есть *зоны Френеля* в данном случае.

Найдем внешний радиус m -й зоны Френеля, r_m . С этой целью воспользуемся рис. 46, из которого видно, что отрезок равен

$$h_a + h_b = m\lambda/2. \quad (0.6.176)$$

Выразим h_a и h_b через r_m и соответствующие радиусы a и $b + m\lambda/2$. Согласно теореме Пифагора, $r_m^2 = a^2 - (a - h_a)^2$.

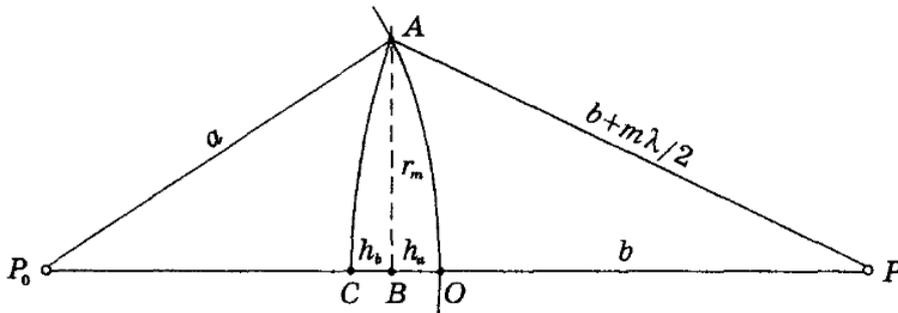


Рис. 46

Преобразовав правую часть этого равенства как разность квадратов, получим $r_m^2 = (2a - h_a)h_a$. Обычно мы будем иметь дело со случаями, когда $h_a \ll 2a$, поэтому предыдущее равенство можно записать так:

$$h_a = \frac{r_m^2}{2a}. \quad (0.6.177)$$

Рассуждая аналогично для правой части рис. 46, получим следующее выражение:

$$r_m^2 = (b + m\lambda/2)^2 - (b + m\lambda/2 - h_b)^2 = (2b + m\lambda - h_b)h_b.$$

Пренебрегая здесь в последней скобке слагаемыми $m\lambda$ и h_b по сравнению с $2b$, приходим к выводу, что

$$h_b = \frac{r_m^2}{2b}. \quad (0.6.178)$$

Остается подставить (0.6.177) и (0.6.178) в исходную формулу (0.6.176), и мы получим, что внешний радиус m -й зоны Френеля

$$r_m = \sqrt{m\lambda \frac{ab}{a+b}}. \quad (0.6.179)$$

Заметим, что если падающая нормально на данное отверстие волна плоская ($a \rightarrow \infty$), то

$$r_m = \sqrt{m\lambda b}. \quad (0.6.180)$$

Если же падающая волна сферическая и сходящаяся в точке, расположенной за отверстием на расстоянии a от него, то a следует считать отрицательным: $a < 0$.

Чтобы иметь некоторое представление о порядках величин, с которыми приходится иметь дело при дифракции света, рассмотрим следующий пример.

Пример. На круглое отверстие радиуса $r = 1,0$ мм нормально падает плоская световая волна с $\lambda = 0,50$ мкм. Определим число зон Френеля, которые укладываются в этом отверстии для точки наблюдения P , расположенной на оси отверстия и отстоящей от него на расстоянии $b = 80$ см.

Поскольку падающая волна плоская, следует воспользоваться формулой (0.6.180), откуда находим

$$2m = \frac{r^2}{\lambda b} = \frac{(10^{-3})^2}{0,5 \cdot 10^{-6} \cdot 0,8} = 2,5.$$

т. е. в данном случае в отверстии укладывается две с половиной зоны Френеля.

Площади зон (при достаточно малых m) $\Delta S = \pi r_m^2 - \pi r_{m-1}^2$, или

$$\Delta S = \pi \lambda \frac{ab}{a+b}, \quad (0.6.181)$$

т.е. практически одинаковы. Но амплитуды колебаний, приходящих в точку P от этих зон, монотонно и слабо убывают из-за увеличения расстояния r до точки P от каждой следующей зоны и роста угла ϑ между нормалью к элементам зоны и направлением на точку P .

Фазы колебаний, возбуждаемых в точке P соседними зонами, отличаются на π , поэтому векторы-амплитуды нечетных зон противоположны по направлению векторам-амплитудам от четных зон. И результирующая амплитуда, а значит и интенсивность, зависит от того, четное или нечетное число m зон Френеля уместится в отверстии — для точки наблюдения P . Если число зон нечетное, в точке P наблюдается максимум, если же число зон четное, то — минимум.

Число зон m в отверстии мы можем изменять. Например, для увеличения числа зон надо или расширить отверстие, или приблизить экран к нему, или то и другое вместе. Это непосредственно вытекает из формулы (0.6.179), если под r_m понимать радиус отверстия.

Спираль Френеля. Рассмотрим графический метод сложения амплитуд. В этом простом и наглядном методе волновую поверхность мысленно разбивают на весьма узкие кольцевые зоны. Амплитуду колебаний, создаваемых каждой из таких зон, изобразим вектором $d\mathbf{A}$. Вследствие увеличения расстояния r и уменьшения коэффициента K амплитуда колебаний, создаваемых каждой следующей узкой кольцевой зоной, будет убывать по модулю и отставать по фазе от колебаний, создаваемых предыдущей зоной. Изобразив отставание по фазе поворотом каждого вектора $d\mathbf{A}$ против часовой стрелки на соответствующий угол, получим цепочку векторов, векторная сумма которых и есть результирующая амплитуда колебаний в точке P .

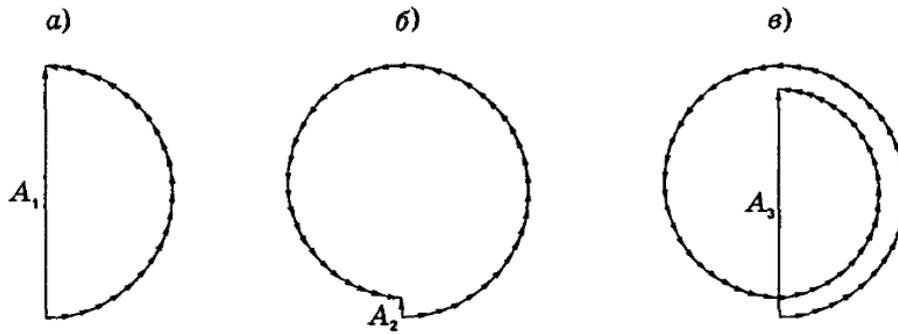


Рис. 47

На (рис. 47, а) показан результат действия 1-й зоны Френеля. Здесь амплитуда колебаний dA_N от узкого кольца, прилегающего к границе 1-й зоны Френеля, отстает по фазе на π от амплитуды колебаний, приходящих в точку P из центра 1-й зоны — от dA_1 , поэтому соответствующие этим амплитудам векторы взаимно противоположны по направлению.

Продолжая построение, получим векторную диаграмму для результирующей амплитуды колебаний в точке P от действия первых двух зон Френеля (рис. 47, б), затем от первых трех зон Френеля (рис. 47, в), и т. д. Цепочка по мере увеличения числа узких кольцевых зон будет «закручиваться» в спираль, и в результате амплитуда от действия всех зон (всей волновой поверхности) будет равна A_∞ (рис. 48). Эту спираль назовем *спиралью Френеля* (в отличие от другой спирали, с которой мы встретимся в следующем параграфе).

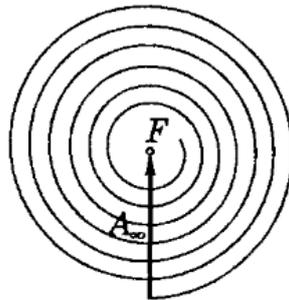


Рис. 48

Забегая вперед, отметим, что дифракция Френеля связана с действием лишь нескольких первых витков спирали (более подробно об этом поговорим позднее).

Таким образом, амплитуда колебаний и интенсивность света в точке P (см. рис. 45) по мере увеличения радиуса отверстия в экране изменяется не монотонно. Пока открывается первая зона Френеля, амплитуда в точке P увеличивается и достигает максимума при полностью открытой зоне (см. рис. 47, а). Но по мере открывания второй зоны Френеля амплитуда колебаний в точке P убывает, и при полностью открытых двух первых зонах уменьшается почти до нуля (см. рис. 47, б). Затем амплитуда увеличивается снова (рис. 47, в) и т. д.

То же самое будет наблюдаться, если вместо увеличения отверстия приближать к нему точку наблюдения P вдоль прямой P_0P (см. рис. 45). Это легко понять из данного рисунка: при этом число открываемых зон Френеля в отверстии экрана \mathcal{E} будет увеличиваться.

На первый взгляд эти результаты, предсказанные на основе принципа Гюйгенса-Френеля, выглядят парадоксальными. Однако они хорошо подтверждаются опытом. В то же время согласно геометрической оптике интенсивность света в точке не должна зависеть от радиуса отверстия.

Итак, амплитуда колебаний в точке P от полностью открытой волновой поверхности, согласно представлениям Френеля, равна $A_\infty = \frac{A_1}{2}$, т. е. интенсивность ($I \sim A^2$) в четыре раза меньше, чем при наличии экрана с круглым отверстием, открывающим только 1-ю зону Френеля. Особенно неожиданным в методе Френеля представляется тот удивительный вывод, что при отверстии в экране, открывающем для точки P две зоны Френеля,

интенсивность в этой точке падает практически до нуля, хотя световой поток через отверстие оказывается вдвое больше.

Пятно Пуассона. Не менее неожиданно и то, что за круглым непрозрачным диском в центре его геометрической тени интенсивность не равна нулю. Если диск перекрывает лишь несколько зон Френеля, то интенсивность в центре геометрической тени почти такая же, как при отсутствии диска. Это непосредственно следует из спирали Френеля (рис. 49), поскольку если диск закрывает, скажем, 1,5 зоны Френеля, то результирующий вектор \vec{A}_∞ при полностью открытой волновой поверхности можно представить как сумму двух векторов: $\vec{A}_\infty = \vec{A}_{1,5} + \vec{A}_{\text{ост}}$. Так как первые полторы зоны закрыты, то остается только вектор $\vec{A}_{\text{ост}}$ — от всех остальных зон. Этот вектор по модулю лишь немного меньше вектора \vec{A}_∞ .

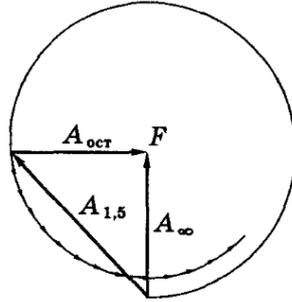


Рис. 49

Это светлое пятно в центре геометрической тени называют *пятном Пуассона*. Рассматривая в свое время метод Френеля, Пуассон пришел к выводу, что в центре тени от диска должно быть светлое пятно, но счел этот вывод столь абсурдным, что выдвинул его как убедительное возражение против волновой теории, разиваемой Френелем. Однако это «абсурдное» предсказание было экспериментально подтверждено Арагоном. Волновая теория Френеля восторжествовала.

Зонная пластинка. Если в экране открыть только нечетные зоны Френеля (1-ю, 3-ю, ...), то векторы-амплитуды от этих зон будут сонаправлены и в сумме дадут вектор, во много раз превосходящий по модулю векторы \vec{A}_∞ и \vec{A}_1 . Такой экран называют *зонной пластинкой*. Аналогично можно изготовить зонную пластинку, где открыты только четные зоны Френеля.

Зонная пластинка, содержащая n открытых зон, создает в точке P интенсивность приблизительно в n^2 раз большую, чем отверстие в первую зону Френеля.

Усиление интенсивности света зонной пластинкой эквивалентно фокусирующему действию линзы. Расстояния от зонной пластинки до источника P_0 и его «изображения» P связаны таким же соотношением, как и соответствующие расстояния для линзы. Чтобы в этом убедиться, достаточно переписать формулу (0.6.179) в виде

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{m\lambda}{r_m^2}, \quad (0.6.182)$$

где выражение в правой части равенства можно рассматривать как $\frac{1}{f}$, f — фокусное расстояние: $f = \frac{r_m^2}{m\lambda} = \frac{r_1^2}{\lambda}$, поскольку $r_m^2 \sim m$. Но в отличие от линзы, зонная пластинка — система не таутохронная: колебания, приходящие в фокус F от соседних открытых зон, различаются по фазе на 2π (разность хода λ). Кроме этого фокуса (основного), зонная пластинка имеет и другие, а именно те точки F' , в которые колебания от соседних открытых зон приходят с разностью хода $2\lambda, 3\lambda$ и т. д. Эти другие фокусы оказываются более слабыми по сравнению с основным.

Интенсивность света в главном фокусе F зонной пластинки можно увеличить еще в четыре раза, если изменить на π фазы вторичных волн, исходящих из всех зон Френеля с четными (или нечетными) номерами. Тогда векторы-амплитуды от всех зон будут

сонаправлены и результирующая амплитуда возрастет еще вдвое. Такая пластинка была изготовлена Вудом путем травления в соответствующих зонах тонкого лакового покрытия. Ее действие вполне эквивалентно действию линзы, так как в обоих случаях вторичные волны от всех точек волновой поверхности приходят в точку F в одинаковых фазах.

Дополнительные замечания. Они касаются как самой спирали Френеля в качестве рабочего инструмента, так и вида дифракционной картины в зависимости от радиуса отверстия.

1. При решении некоторых вопросов, если дело ограничивается первым витком спирали Френеля, т. е. первой зоной, и мы не претендуем на особую точность результатов, то вполне достаточно первый виток принимать за окружность. Погрешность будет при этом для многих случаев несущественной.

Пример. Плоская световая волна интенсивности I_0 падает нормально на экран, в котором для точки наблюдения P открыты только внутренняя половина 1-й зоны Френеля и вторая (внешняя) половина 2-й зоны Френеля. Найдем интенсивность света в точке P . Принимая первый виток спирали Френеля за окружность, построим соответствующие векторы \vec{A}_1 и \vec{A}_2 (рис. 50),

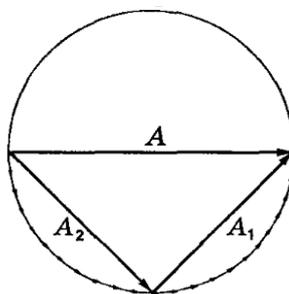


Рис. 50

и ответ очевиден: $A = 2A_\infty$, откуда $I = 4I_0$.

2. Метод зон Френеля позволяет сравнительно просто найти интенсивность света только в точке P , лежащей на оси круглого отверстия в экране. Расчет же распределения интенсивности для всей дифракционной картины значительно сложнее. Вся картина обладает круговой симметрией и представляет собой чередующиеся светлые и темные кольца, плавно переходящие друг в друга.

Если в отверстии экрана укладывается 1-я зона Френеля или ее часть, то интенсивность максимальна в центре картины (т. е. в точке P) и монотонно убывает при удалении от точки P . Если отверстие в экране открывает две первые зоны Френеля, то в окрестности точки P возникает темное круглое пятно, а вокруг него — светлое кольцо. С увеличением числа m открытых зон в отверстии экрана увеличивается и число светлых и темных колец. На рис. 51 показано распределение интенсивности I от расстояния r до центра дифракционной картины при различном числе m открытых зон Френеля.

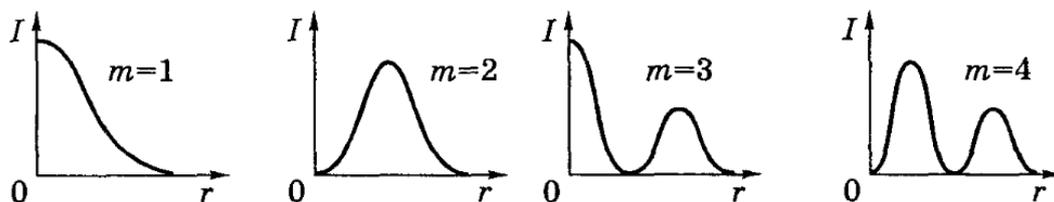


Рис. 51

Когда же в отверстии укладывается большое число зон Френеля, интенсивность вблизи точки P оказывается почти равномерной и лишь у краев геометрической тени отверстия наблюдается чередование весьма узких светлых и темных кольцевых полос.

Продемонстрируем на конкретном примере возможности спирали Френеля (см. рис. 48) при дифракции от некоторых объектов, не обладающих круговой симметрией.

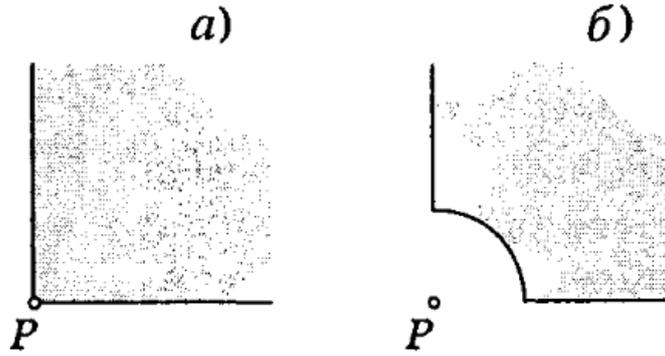


Рис. 52

Пример. Плоская световая волна интенсивности I_0 падает нормально на экраны, показанные на рис. 52. Найдем интенсивность света в точке P , расположенной за экранами, если в случае а) открыто $\frac{3}{4}$ волновой поверхности, а в случае б) закругленная часть экрана является границей 1-й зоны Френеля для точки P . Прежде всего ясно, что в этих случаях дифракционная картина (чередующиеся светлые и темные полосы) не будет обладать круговой симметрией, она значительно сложнее. Но расчет для указанной точки P оказывается достаточно простым. Действительно, в случае а) от каждой зоны Френеля будет действовать только $\frac{3}{4}$ ее части, следовательно, амплитуда в точке P будет $A = \left(\frac{3}{4}\right) A_\infty$ и интенсивность $I = \left(\frac{3}{4}\right)^2 I_0$. В случае же б) результирующая амплитуда A в точке P будет равна разности амплитуды от первой зоны Френеля A_1 и амплитуды от всех остальных зон $\left(\frac{3}{4}\right) A_{\text{ост}}$, где $A_{\text{ост}} \approx A_\infty$. Подчеркнем: именно разности, поскольку обеим амплитудам на спирали Френеля (см. рис. 48) соответствуют векторы, противоположно направленные, т. е. имеющие разность фаз π . Итак, результирующая амплитуда в точке P равна

$$A = A_1 - \left(\frac{3}{4}\right) A_{\text{ост}} = 2A_\infty - \left(\frac{3}{4}\right) A_\infty = \left(\frac{5}{4}\right) A_\infty.$$

$$\text{Отсюда интенсивность } I = \left(\frac{5}{4}\right)^2 I_0.$$

Замечания о методе Френеля. Вычисления, выполненные на основе принципа Гюйгенса — Френеля, дают, как показывает опыт, правильное распределение интенсивности при дифракции, т. е. позволяют найти правильное значение амплитуды результирующей волны в любой точке экрана, если размеры отверстий или препятствий не оказываются слишком малыми (сравнимыми с длиной волны λ), другими словами, при не очень больших углах дифракции.

При этом, однако, в методе расчета Френеля есть принципиальные неясности. Главные из них заключаются в следующем.

1. При вычислении результатов интерференции элементарных волн приходится считать, что амплитуда колебаний от элементов dS волновой поверхности зависит от угла ϑ между нормалью к элементу dS и направлением на точку P , для которой ведется расчет. Амплитуда максимальна при $\vartheta = 0$ и монотонно убывает до нуля при стремлении ϑ к $\frac{\pi}{2}$, т. е. нет «обратной» волны. Это обстоятельство остается не обоснованным в теории Френеля.
2. Расчет по методу Френеля дает неправильное значение фазы результирующего колебания. Для полностью открытой волновой поверхности она отличается на $\frac{\pi}{2}$ от действительной. Это видно из рис. 48. Направление спирали Френеля в ее начале дает в точке наблюдения фазу колебаний от центрального элемента первой зоны. Это и есть то значение фазы, которое соответствует действительности. Результирующий

же вектор от полностью открытой волновой поверхности повернут на $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки, т. е. отстает по фазе на $\frac{\pi}{2}$. Таким образом, постулат Френеля, правильно задавая амплитуды вспомогательных источников, неудачно определяет их фазы.

Для большинства задач вопрос о фазе не имеет значения, ибо нас интересует интенсивность результирующей волны, которая пропорциональна квадрату амплитуды. Значение же последней метод Френеля дает правильное.

Итак, несмотря на некоторые недостатки, метод Френеля в вопросах расчета интенсивности волн для многих случаев является весьма плодотворным⁶.

0.6.3 Дифракция Френеля на полуплоскости и щели

В предыдущем параграфе мы рассматривали с помощью принципа Гюйгенса-Френеля дифракцию сферической волны от круглого отверстия. Осевая симметрия задачи подсказывала выбор конфигурации зон, на которые мы разбивали открытую часть волновой поверхности — в виде *круговых* колец. Теперь перейдем к случаю, когда волновая поверхность плоская и характер препятствия (полуплоскость, щель) предписывает разбивать открытую часть волновой поверхности на зоны в виде *прямолинейных* полосок.

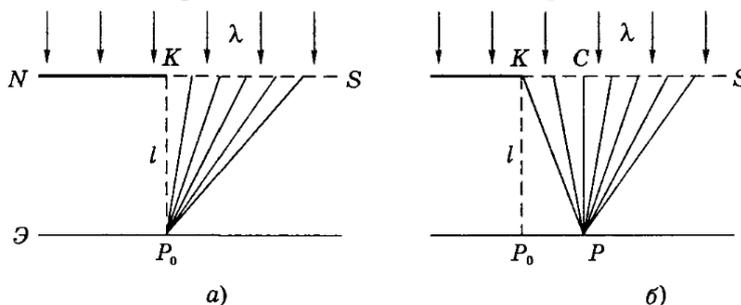


Рис. 53

Дифракция от прямолинейного края полуплоскости. Пусть на экран Э падает нормально плоская монохроматическая волна длины λ . Расположим перед экраном на расстоянии l от него непрозрачную полуплоскость N с прямолинейным краем (рис. 53). Если бы свет распространялся прямолинейно, то на экране Э мы наблюдали бы резкую тень от края этой полуплоскости (точка P_0 на рисунке). В действительности же из-за волнового характера света на экране Э образуется сложная дифракционная картина.

Для расчета этой картины воспользуемся принципом Гюйгенса-Френеля. В данном случае в качестве интересующей нас волновой поверхности S возьмем ту открытую ее часть, которая продолжает непрозрачную полуплоскость. Соответствующие расчеты были проведены аналитически Френелем, получены результаты в виде так называемых *интегралов Френеля*, и задача, таким образом, была решена. Мы не будем воспроизводить здесь этот расчет и ограничимся лишь интерпретацией его и полученного результата с помощью векторной диаграммы. Это наиболее простой и наглядный метод, открывающий к тому же весьма эффективные практические применения.

Из соображений симметрии ясно, что дифракционная картина на экране Э будет зависеть только от расстояния до границы геометрической тени — точки P_0 на рис. 53, т. е. светлые и темные полосы должны быть параллельны прямолинейному краю K непрозрачной полуплоскости N . Говоря далее об амплитуде колебаний в точке P на экране, мы будем иметь в виду, что это относится ко всем точкам *прямой*, проходящей через точку P и параллельной краю полуплоскости.

Сначала найдем амплитуду колебаний в точке P_0 , которая находится на краю геометрической тени (рис. 53, а). Для этой точки (и только для нее) мы могли бы использовать

⁶Впоследствии Кирхгоф дал более строгую формулировку принципу Гюйгенса-Френеля, устраняющую формально почти все недостатки теории Френеля

разбиение открытой части волновой поверхности на полукольца — полузоны Френеля. Но поскольку нам предстоит определять амплитуду колебаний и в других точках экрана, то в соответствии с симметрией данной задачи разобьем мысленно открытую часть волновой поверхности S на весьма узкие одинаковой ширины прямолинейные полосы (зоны), параллельные краю полуплоскости.

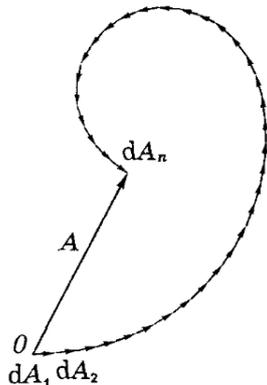


Рис. 54

Амплитуду колебаний, приходящих в точку P_0 от первой зоны-полоски изобразим вектором $d\vec{A}_1$ (рис. 54). Амплитуду колебаний от следующей полоски — вектором $d\vec{A}_2$, повернутым на очень небольшой угол *против* часовой стрелки, так как эти колебания проходят до точки P_0 несколько большее расстояние и, значит, отстают по фазе.

В дальнейшем угол между соседними векторами-амплитудами становится все больше, поскольку запаздывание по фазе колебаний, приходящих в точку P_0 от последующих зон-полосок растет все больше. Модули же векторов $d\vec{A}_i$ будут уменьшаться (из-за увеличения расстояния до P_0 и угла ϑ между нормалью к полоске и направлением на точку P_0). Результирующая амплитуда колебаний в точке P_0 от достаточно широкой полосы волновой поверхности S изобразится суммой (цепочкой) векторов $d\vec{A}_i$ от всех укладываемых на этой полосе элементарных зон-полосок. Это вектор \vec{A} на рис. 54.

Спираль Корню. В пределе, когда ширина полосы стремится к бесконечности, т. е. превращается в полуплоскость, и ширина каждой элементарной зоны-полоски стремится к нулю, цепочка векторов превращается в плавную кривую, являющуюся правой половиной спирали Корню (рис. 55).

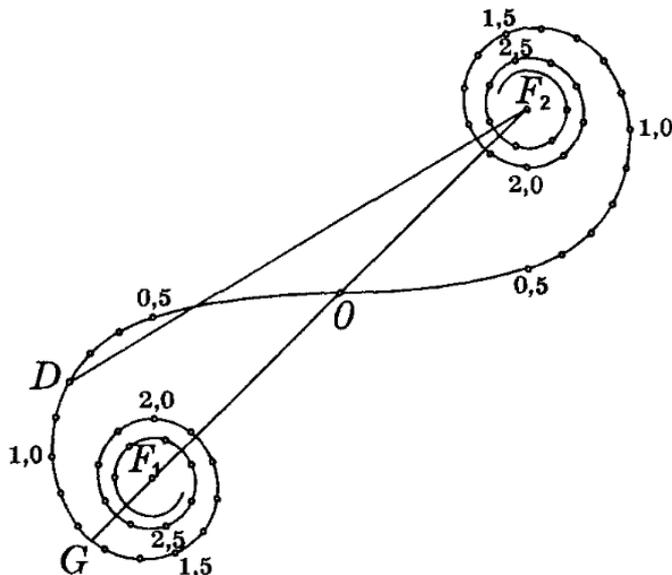


Рис. 55

Эта спираль состоит из двух симметричных ветвей, закручивающихся вокруг фокусов F_1 и F_2 . Ее левая половина описывает действие колебаний, приходящих в точку P_0 от

участков волновой поверхности (если бы они были открыты), лежащих левее края K непрозрачной полуплоскости (см. рис. 53, а).

Амплитуда колебаний в точке P_0 от волновой поверхности, лежащей правее края K непрозрачной полуплоскости, изобразится вектором, проведенным из точки O в фокус F_2 спирали Корню. Амплитуда же колебаний в точке P_0 от полностью открытой волновой поверхности — вектором, проведенным из фокуса F_1 в фокус F_2 .

Для нахождения вектора-амплитуды колебаний в точке P , лежащей, например, правее точки P_0 (см. рис. 53, б), от какой-либо полосы волновой поверхности, лежащей между координатами x_1 и x_2 , нужно построить вектор, который замыкает соответствующий этой полосе участок спирали Корню.

Это делается так. Каждой точке спирали Корню соответствует определенное значение некоторого параметра s (он пропорционален длине дуги спирали, отсчитываемой от точки O на рис. 55). Значения параметра указаны вдоль кривой. Из аналитического расчета следует, что параметр s связан с расстоянием x , отсчитываемым от точки C до интересующей нас точки D волновой поверхности S (рис. 56) формулой

$$s = x \sqrt{\frac{2}{\ell \lambda}}, \quad (0.6.183)$$

где λ — длина волны света, ℓ — расстояние между экраном \mathcal{E} и волновой поверхностью S , в плоскости которой расположено то или иное препятствие на пути световой волны.

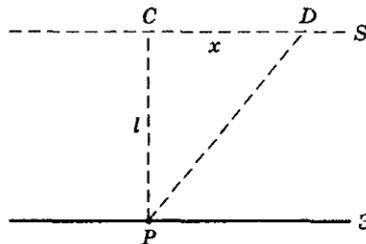


Рис. 56

Обратим внимание на то, что параметр s пропорционален расстоянию x . Значит, $x \sim s \sim$ длине дуги спирали Корню, отсчитываемой от точки O (см. рис. 55) в соответствующую сторону (вправо или влево).

Теперь покажем как с помощью спирали Корню получить распределение интенсивности света на экране вблизи края геометрической тени при дифракции плоской волны от прямолинейного края непрозрачной полуплоскости N . Если точка P находится правее точки P_0 (см. рис. 53, б), то правая часть волновой поверхности S (от точки C) полностью открыта, и на спирали Корню амплитуда колебаний в точке P соответствует вектору DF_2 . Конец этого вектора находится в фокусе F_2 , а начало — точка D — в зависимости от положения точки P . Когда P находится на краю геометрической тени (в точке P_0), точка D совпадает с точкой O на спирали Корню (см. рис. 55), и вектор-амплитуда соответствующих колебаний изобразится вектором OF_2 , равным половине вектора F_1F_2 — от полностью открытой волновой поверхности S . Поэтому интенсивность света в точке P_0 в четыре раза меньше интенсивности I_0 в отсутствие непрозрачной полуплоскости.

При перемещении точки P вправо от точки P_0 точка D на спирали Корню (начало вектора DF_2) будет перемещаться по левой ветви спирали, так как слева от точки C будут открываться все новые зоны-полоски. Это приводит к тому, что амплитуда и интенсивность в точке P при удалении ее от P_0 будут последовательно проходить через максимумы и минимумы, различие между которыми постепенно уменьшается и интенсивность приближается к значению I_0 (рис. 57).

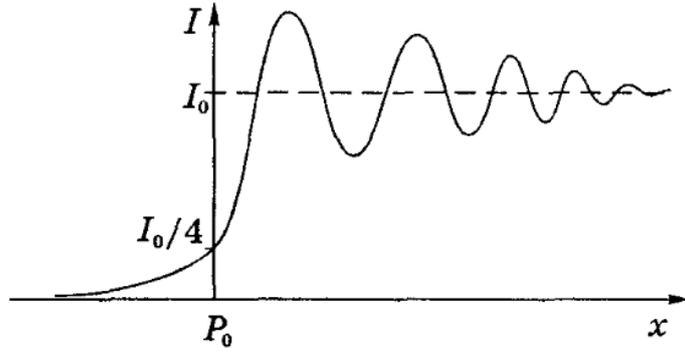


Рис. 57

При перемещении точки P влево от точки P_0 — в область геометрической тени, точка D на спирали Корню перемещается вправо от точки O . Легко видеть, что длина вектора DF_2 , а значит и интенсивность, будет монотонно уменьшаться до нуля (см. рис. 57).

Теперь покажем на конкретном примере как просто с помощью спирали Корню и формулы (0.6.183) решаются вопросы, связанные с распределением интенсивности при дифракции света от края непрозрачной полуплоскости.

Пример. Дифракцию плоской волны от края непрозрачной полуплоскости наблюдают на экране \mathcal{E} , отстоящем от полуплоскости N на расстояние $\ell = 100$ см. Длина волны света $\lambda = 500$ нм. Найдём расстояние Δx между первыми двумя максимумами на экране \mathcal{E} и интенсивность первого максимума, если интенсивность падающего света равна I_0 . Согласно формуле (0.6.183)

$$\Delta x = x_2 - x_1 = (s_2 - s_1) \sqrt{\frac{\ell \lambda}{2}} = (2,3 - 1,2) \sqrt{\frac{1 \cdot 500 \cdot 10^{-9}}{2}} = 5,5 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,55 \text{ мм.}$$

С помощью рис. 55 и линейки находим, что отношение амплитуды 1-го максимума, т. е. расстояния между точками G и F_2 , к амплитуде падающего света $F_1 F_2$ равно $\eta \approx 1,175$. Следовательно, интенсивность 1-го максимума

$$I_1 = \eta^2 I_0 = 1,37 I_0.$$

Следует отметить, что обычно точка наблюдения P в лабораторных установках находится за непрозрачной полуплоскостью на расстоянии, не превышающем порядка одного метра. При этом для определения амплитуды результирующего колебания играет роль сравнительно небольшой участок волновой поверхности S , лежащий вблизи края полуплоскости. В таких условиях край практически любого препятствия можно считать прямолинейным и для расчета дифракционной картины успешно пользоваться спиралью Корню.

Дифракция от щели. Таким же образом — с помощью спирали Корню и формулы (0.6.183) — можно рассчитать распределение интенсивности в дифракционной картине от бесконечно длинной прямолинейной щели. Сама дифракционная картина на экране имеет симметричный относительно середины вид чередующихся светлых и темных полос, параллельных щели (предполагается, что плоская световая волна падает на щель нормально).

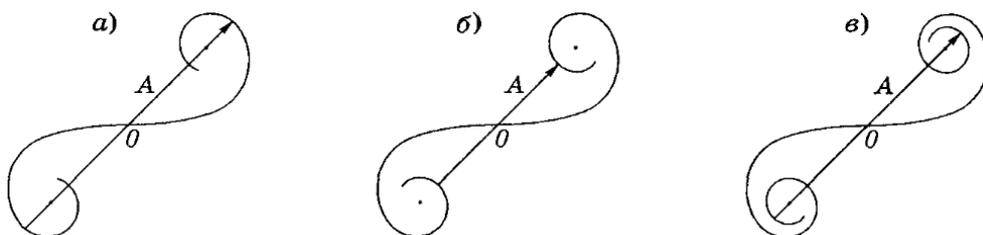


Рис. 58

С помощью той же спирали Корню легко убедиться в том, что при постепенном увеличении ширины щели интенсивность в середине дифракционной картины будет сначала иметь максимум, затем минимум, потом опять максимум и т. д. (рис. 58, а, б, в). Таким образом, мы будем наблюдать при этом последовательное чередование максимумов и минимумов (в середине картины), разность между которыми будет постепенно уменьшаться, стремясь к интенсивности I_0 падающего на щель света. Сама же дифракционная картина будет постепенно локализовываться только вблизи геометрической тени от краев щели.

Пример. На прямолинейную щель в непрозрачной преграде падает нормально плоская световая волна (рис. 59).

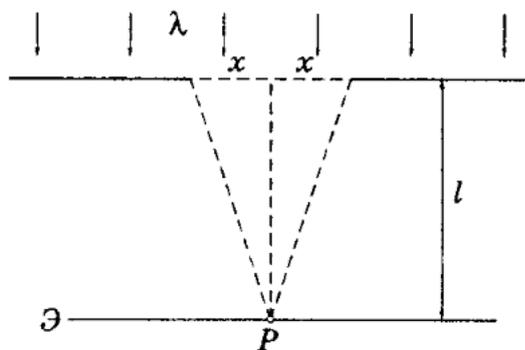


Рис. 59

Длина волны $\lambda = 0,60$ мкм. Расстояние от щели до экрана Э равно $\ell = 50$ см. Найдем минимальную ширину b щели, при которой в точке P интенсивность будет максимальной. Это означает, что амплитуда колебаний в точке P должна быть максимальной, т. е. соответствующей рис. 58, а. При этом параметр s должен быть равным (см. рис. 55) $s \approx 1,3$. Согласно формуле (0.6.183) этому значению параметра s отвечает расстояние $x = s\sqrt{\frac{\ell\lambda}{2}} = 0,5$ мм. Значит, искомая ширина щели $b = 2x = 1$ мм.

Отметим, что в отличие от спирали Френеля, которая давала возможность решать вопросы об интенсивности только в одной точке дифракционной картины, спираль Корню позволяет в ряде случаев находить распределение интенсивности во всех точках дифракционной картины.

0.6.4 Дифракция Фраунгофера

Дифракция Фраунгофера. Фраунгофер предложил иной способ наблюдения дифракции, получивший значительно большее практическое применение в оптике, поскольку приводит к более простым закономерностям (формулам). В этом способе на дифракционный объект (отверстие, щель и др.) направляют параллельный пучок света (плоскую волну) и дифракционную картину наблюдают на достаточно большом расстоянии, т. е. практически в параллельных лучах. Это и есть *дифракция Фраунгофера* или *дифракция в параллельных лучах*.

Есть критерий, позволяющий судить, с каким видом дифракции — френелевой или фраунгоферовой — мы имеем дело в каждом конкретном случае. Чтобы его получить, воспользуемся формулой (0.6.180), т. е. $r_m = \sqrt{m\lambda b}$. Напомним, эта формула относится к случаю, когда на отверстие радиуса r_m падает нормально плоская световая волна, причем m означает число зон Френеля, которые укладываются в данном отверстии для точки наблюдения P , отстоящей от отверстия на расстояние b . Из этой формулы следует, что $m = \frac{r_m^2}{\lambda b}$. Там же было отмечено, что характер дифракционной картины определяется только числом m открытых зон Френеля, и ничем другим. Значит, последнее выражение для m и можно взять в качестве интересующего нас параметра p , заменив в этом выражении r_m на некоторый характерный размер h отверстия в преграде и b на ℓ .

Таким образом, безразмерный параметр p определяется следующим выражением:

$$p = \frac{h^2}{\ell\lambda} \quad (0.6.184)$$

где h — некоторый характерный размер: радиус или диаметр (это не существенно) круглого отверстия, или, например, ширина щели и т. п.

Значение именно этого безразмерного параметра и определяет характер дифракции:

$$\begin{aligned} p \ll 1 & \text{ — дифракция Фраунгофера,} \\ p \sim 1 & \text{ — дифракция Френеля,} \\ p \gg 1 & \text{ — приближение геометрической оптики.} \end{aligned} \quad (0.6.185)$$

Пример. Выясним, с каким видом дифракции (френелевой или фраунгоферовой) мы имеем дело, если параллельный пучок света с длиной волны $\lambda = 0,6$ мкм падает нормально на круглое отверстие диаметром $D = 1,0$ мм, образуя дифракционную картину на экране, отстоящем от отверстия на расстояние $\ell = 50$ см. В этом случае параметр

$$p = \frac{D^2}{\ell\lambda} = \frac{(10^{-3})^2}{0,5 \cdot 0,6 \cdot 10^{-6}} \approx 3$$

Согласно критерию (0.6.185) это соответствует дифракции Френеля. И расчет дифракционной картины будет правильным, если его проводить по формулам дифракции Френеля.

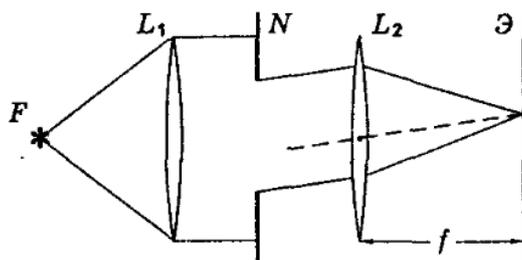


Рис. 60

Практически дифракцию Фраунгофера наблюдают с помощью схемы, показанной на рис. 60. Точечный источник света S располагают в фокусе F линзы L_1 . Из линзы выходит параллельный пучок лучей, на пути которого находится некоторая преграда N с тем или иным отверстием. Дифрагированные лучи проходят линзу L_2 и падают на экран \mathcal{E} , расположенный в фокальной плоскости линзы L_2 (на фокусном расстоянии f). Таким образом, в каждую точку экрана падают только те лучи, которые до линзы L_2 были параллельны друг другу.

Вид дифракционной картины на экране зависит от формы и размеров отверстия и длины волны падающего света. Наша задача — найти распределение интенсивности в дифракционной картине. В общем случае произвольной формы отверстия решение этой задачи — процедура весьма трудная в техническом отношении и, вообще говоря, не представляет особого интереса.

Практически наибольший интерес имеют три случая:

- 1) дифракция на круглом отверстии,
- 2) дифракция на узкой прямолинейной щели,
- 3) дифракция на регулярной системе щелей (дифракционная решетка).

Рассмотрим эти случаи подробнее.

0.6.5 Дифракция Фраунгофера на круглом отверстии

Дифракция Фраунгофера на круглом отверстии представляет большой практический интерес, поскольку в оптических приборах оправы линз и объективов, а также диафрагмы имеют обычно круглую форму.

Дифракционную картину Фраунгофера от круглого отверстия в преграде N можно наблюдать на экране \mathcal{E} в фокальной плоскости линзы L , направив на отверстие нормально плоскую световую волну (рис. 61).

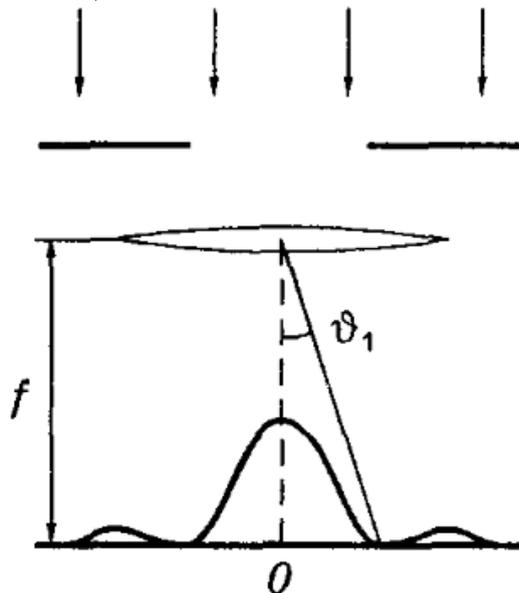


Рис. 61

Эта картина имеет вид центрального светлого пятна, окруженного чередующимися темными и светлыми кольцами. Соответствующий расчет (он представляет большие трудности, и мы не будем его приводить) дает, что минимум первого темного кольца отстает от центра дифракционной картины на угловое расстояние

$$\vartheta_1 = 1,22 \frac{\lambda}{D} \quad (0.6.186)$$

— это при условии, что диаметр отверстия $D \gg \lambda$, что чаще всего и бывает.

На рис. 62 показана зависимость интенсивности света I от углового радиуса ϑ (угла дифракции), здесь O — центр дифракционной картины. Из формулы (0.6.186) следует, что размер дифракционной картины тем меньше, чем больше диаметр отверстия D . Подавляющая часть светового потока (84%), проходящего через отверстие, попадает в область центрального светлого пятна. Поэтому в первом приближении дифракционную картину можно считать состоящей из одного лишь светлого пятна с угловым радиусом ϑ_1 , определяемым формулой (0.6.186). И центральное светлое пятно можно рассматривать как изображение удаленного точечного источника, уширенное дифракцией от краев круглого отверстия диаметра D .

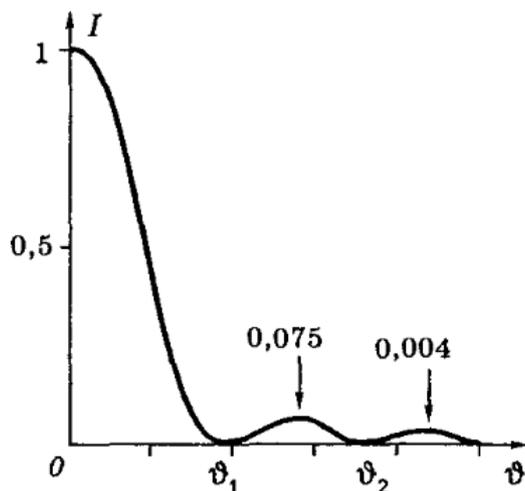


Рис. 62

Пример. Найдем диаметр d в мм центрального светлого пятна на экране, если диаметр отверстия $D = 1,0$ мм, фокусное расстояние $f = 50$ см и длина волны света $\lambda = 0,5$ мкм. Экран находится в фокальной плоскости линзы. Освещенность светлого центрального пятна по мере увеличения угла дифракции ϑ монотонно падает (см. рис. 62) и при визуальном наблюдении по контрасту это пятно кажется меньше. Его «диаметр» d приближенно можно считать равным радиусу первого темного кольца, т. е. $d \approx f\vartheta$. Воспользовавшись формулой (0.6.186), получим

$$d \approx 1,22 \frac{\lambda f}{D} = 1,22 \frac{0,5 \cdot 10^{-6} \cdot 0,5}{10^{-3}} \approx 0,3 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,3 \text{ мм.}$$

Следует обратить внимание на то, что в центре фраунгоферовой дифракционной картины от круглого отверстия *всегда* образуется максимум (в отличие от френелевой дифракции, когда в центре может образоваться как максимум, так и минимум).

Дифракционная расходимость пучка. Полученные результаты можно использовать для оценки дифракционной расходимости пучков света, диаметр которых ограничен, например, в результате прохождения плоской световой волны через отверстие (или диафрагму). Мы отметили, что основная часть светового потока, проходящего через отверстие, приходится на центральный дифракционный максимум, поэтому его ширину можно принять в качестве оценки угловой расходимости $\delta\Theta$ пучка с первоначальным диаметром поперечного сечения D :

$$\delta\Theta \sim \frac{\lambda}{D}. \quad (0.6.187)$$

Это весьма важный вывод: принципиально (из-за дифракции) невозможно создать совершенно параллельный ограниченный в сечении пучок света. Этим уширением можно пренебречь лишь в тех случаях, когда оно мало по сравнению с исходной шириной пучка.

Пример. Оценим дифракционное уширение «параллельного» лазерного пучка с исходным диаметром $D_0 = 2$ мм на расстоянии $\ell = 100$ м от лазера, если длина волны света $\lambda = 0,60$ мкм. Из-за дифракционной расходимости интересующий нас диаметр пучка оказывается равным

$$D \approx \ell \delta\Theta \approx \frac{\ell \lambda}{D_0} = \frac{100 \cdot 0,6 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-3}} = 30 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 30 \text{ мм.}$$

Как видно, дифракционное уширение весьма значительно.

Дифракция от множества отверстий. Важно отметить, что при фраунгоферовой дифракции распределение интенсивности в дифракционной картине определяется только

направлением лучей, а не положением световых пучков. Это означает, что распределение интенсивности не изменится, если отверстие в преграде сместить в сторону без изменения его ориентации.

Особый интерес представляет ситуация, когда в преграде имеется *большое число N одинаковых отверстий*. Здесь возможны два случая:

- 1) отверстия расположены хаотично, беспорядочно;
- 2) отверстия расположены упорядоченно, регулярно.

В первом случае фазовые соотношения между волнами, дифрагированными от отдельных отверстий, имеют случайный характер (волны оказываются *некогерентными*). Поэтому для каждого направления наблюдения происходит простое сложение интенсивностей волн, дифрагированных от всех отверстий. Распределение интенсивности в дифракционной картине от одного отверстия не зависит от его положения. От большого числа N отверстий получается такая же картина, но усиленная по интенсивности в N раз.

Этим приемом, кстати, пользуются, желая усилить освещенность дифракционной картины от «одного» отверстия, если источник света довольно слабый.

Во втором случае, напротив, волны, дифрагированные от соседних отверстий, имеют определенное значение разности фаз, и волны оказываются *когерентными*. Интерференция этих волн существенно изменяет дифракционную картину, образуя резкое увеличение интенсивности в некоторых направлениях. Это обстоятельство имеет большое практическое значение, и более подробно мы рассмотрим этот вопрос на примере дифракционной решетки в § 5.7.

Разрешающая способность объектива. Как мы сейчас увидим, соотношение (0.6.186) играет важную роль в этом вопросе. Вследствие волновой природы света изображение точки, даваемое линзой, имеет вид дифракционного кружка — результат дифракции света на оправе линзы. Так как свыше 80% проходящего через линзу светового потока приходится на центральное светлое пятно, то в дальнейшем на окружающие его кольца можно не обращать внимания.

Теперь рассмотрим два одинаковых некогерентных точечных источника. Если расстояние между центрами их изображений мало по сравнению с размерами центральных светлых пятен, то результирующая картина практически не отличается от изображения одного точечного источника. И тогда говорят, что объектив *не разрешает* рассматриваемые точки.

Начиная с некоторого расстояния между центрами обоих светлых кружков, между ними появляется темный провал, и это будет восприниматься как раздельное изображение двух точек. Объектив, как говорят, будет *разрешать* эти точки.

Количественный критерий разрешающей способности может быть сформулирован по ряду причин лишь условно. Такой условный критерий был предложен Рэлеем. Согласно *критерию Рэля*, два точечных некогерентных источника считаются разрешенными, если центр дифракционного пятна от одного из них совпадает с ближайшим к центру минимумом дифракционной картины от другого. Это соответствует минимальному угловому расстоянию между источниками, определяемому формулой (0.6.186):

$$\vartheta_{\text{мин}} = 1,22 \frac{\lambda}{D}. \quad (0.6.188)$$

Результирующая картина показана на рис. 63, где провал составляет около 25% от максимума интенсивности.

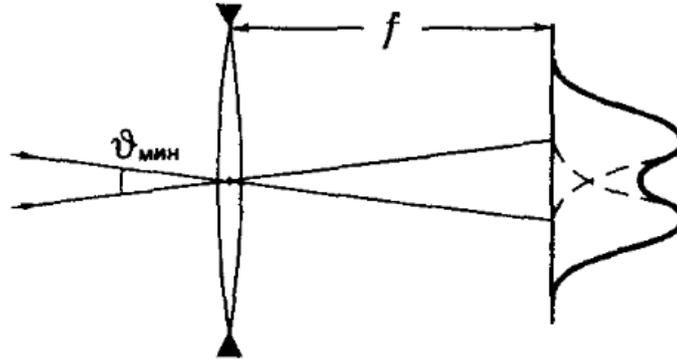


Рис. 63

Величину, обратную предельному углу $\vartheta_{\text{мин}}$, называют *разрешающей способностью* (или разрешающей силой):

$$R = \frac{1}{\vartheta_{\text{мин}}} = \frac{D}{1,22\lambda}. \quad (0.6.189)$$

Рассматриваемый вопрос особенно важен в теории телескопа. Изображение звезды в фокальной плоскости объектива телескопа представляет собой лишь дифракционную картину, образуемую круглой оправой объектива. Как видно из (0.6.189), разрешающая способность объектива телескопа пропорциональна диаметру объектива. Телескоп с диаметром зеркала $D = 5$ м может обеспечить для света с $\lambda = 0,55$ мкм угловое разрешение

$$\vartheta_{\text{мин}} = 1,22 \frac{0,55 \cdot 10^{-6}}{5} \approx 1,3 \cdot 10^{-7} \approx 0,03 \text{ угл. сек}$$

и разрешающую способность $R \sim 10^7$.

Увеличение разрешающей способности телескопов путем сооружения гигантских конструкций имеет естественный предел, обусловленный прочностью конструкционных материалов. Этот предел практически уже достигнут. Принципиально новые возможности повышения разрешающей способности связаны с идеей, суть которой состоит в построении большой оптической системы из множества зеркал сравнительно небольшого размера, которые образуют единую поверхность. Это позволяет существенно снизить массу составного зеркала-отражателя.

Глаз при рассматривании удаленных предметов действует в принципе так же, как объектив. Поэтому формулы (0.6.188) и (0.6.189) применимы и к глазу. Роль величины D играет диаметр d зрачка глаза. Полагая $d \approx 4$ мм, $\lambda = 0,55$ мкм, находим, что разрешаемое угловое расстояние глазом

$$\vartheta_{\text{мин}} = \frac{1,22\lambda}{d} = 1,67 \cdot 10^{-4} = 35 \text{ угл.сек.}$$

Этот результат удивительно хорошо согласуется с физиологической оценкой разрешающей способности глаза, связанной со структурой его сетчатки.

0.6.6 Дифракция Фраунгофера на щели

В отличие от дифракции Фраунгофера от круглого отверстия, расчет дифракции от узкой длинной щели с параллельными краями оказывается значительно проще, и мы воспроизведем его достаточно детально. Соответствующий расчет и здесь будет проведен с помощью принципа Гюйгенса-Френеля.

Рассмотрим случай, когда на щель ширины b падает нормально плоская световая волна (рис. 64).

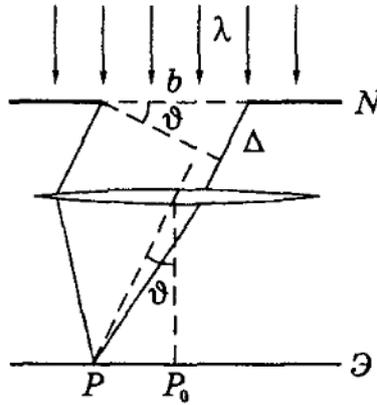


Рис. 64

Разобьем мысленно эту щель — она же открытая часть волновой поверхности — на очень узкие одинаковые по ширине зоны-полоски, параллельные прямолинейным краям щели. Суммирование вторичных волн проведем с помощью векторной диаграммы.

Колебания, приходящие в точку P от каждой такой зоны-полоски имеют *одинаковую* амплитуду dA , поскольку распространяются параллельно друг другу перед линзой и, значит, dA не зависит от пройденного пути до точки P (напомним, что линза — система таутохронная). При этом разность фаз между колебаниями, приходящими в точку P от соседних зон-полосок, будет одинакова.

Отсюда следует, что при графическом изображении мы получим цепочку векторов $d\vec{A}_i$, одинаковых по модулю и повернутых относительно друг друга на один и тот же угол (рис. 65, а). Результирующая амплитуда изобразится вектором \vec{A} — хордой дуги окружности с центром в точке C .

Заметим, что для точки P_0 эта цепочка образует *прямую*, что соответствует максимуму интенсивности.

Условие минимумов. Если разность хода крайних лучей (см. рис. 64) составляет $\Delta = \lambda$, то их разность фаз $\delta = 2\pi m$, цепочка оказывается замкнутой и амплитуда результирующего колебания обращается в нуль (рис. 65, б). Это первый минимум дифракционной картины, представляющей собой симметричную относительно середины систему чередующихся светлых и темных полос, параллельных щели.

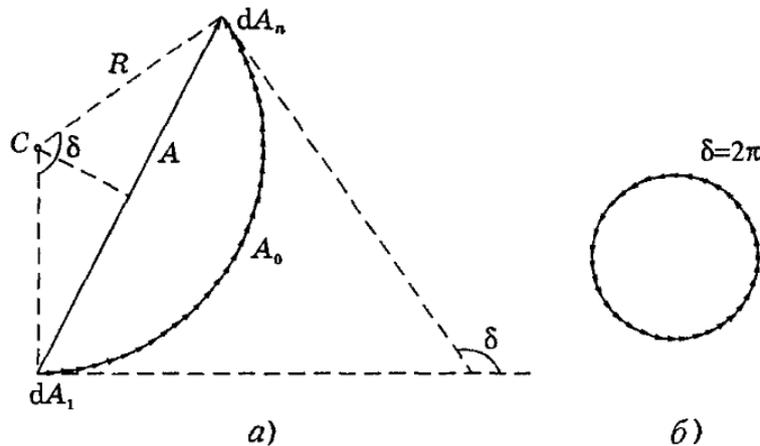


Рис. 65

Результирующая амплитуда обращается в нуль и тогда, когда разность фаз от крайних элементов щели равна $2\pi m$, где $m = 1, 2, \dots$. Цепочка при этом замыкается после m оборотов, практически *не меняя своей длины* A_0 , поскольку угол дифракции ϑ обычно достаточно мал.

Разность фаз δ связана с разностью хода Δ известным соотношением, т. е.

$$\delta = 2\pi \frac{\Delta}{\lambda},$$

где λ — длина волны света.

Так как $\Delta = b \sin \vartheta$ (см. рис. 64) и в минимуме $\delta = 2\pi m$, то из этих трех равенств следует **условие для минимумов**:

$$\boxed{b \sin \vartheta_m = \pm m \lambda}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (0.6.190)$$

Заметим, что $m \neq 0$, поскольку при $m = 0$ образуется *максимум* (цепочка векторов становится прямой). Из этой формулы видно, что уменьшение ширины b щели приводит к расширению дифракционной картины.

Распределение интенсивности. Найдем интенсивность I света на экране в зависимости от угла дифракции ϑ . Это легко сделать с помощью рис. 65, а. Обозначив радиус цепочки-дуги через R , запишем:

$$A = 2R \sin \frac{\delta}{2}, \quad A_0 = R\delta \quad (0.6.191)$$

Остается исключить R из этих двух равенств, и мы получим:

$$A = A_0 \frac{\sin \left(\frac{\delta}{2} \right)}{\frac{\delta}{2}}. \quad (0.6.192)$$

А так как $I \sim A^2$, то искомая зависимость будет иметь вид:

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} \quad (0.6.193)$$

где $\alpha = \frac{\delta}{2} = \pi \frac{\Delta}{\lambda} = \frac{\pi b \sin \vartheta}{\lambda}$. График зависимости I от $\sin \vartheta$ показан на рис. 66.

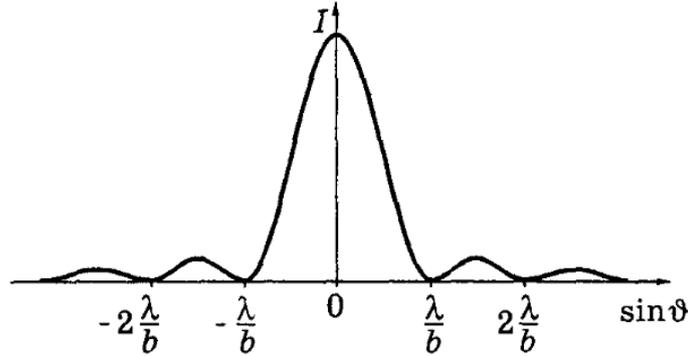


Рис. 66

Интенсивность второго максимума составляет около 4% от интенсивности центрального, поэтому можно считать, что практически весь световой поток, проходящий через щель, сосредоточен в первом (центральном) максимуме, угловая полуширина которого равна $\frac{\lambda}{b}$. Этот результат согласуется с формулой (0.6.187), определяющей дифракционную расходимость «параллельных» световых пучков ограниченного сечения.

Отметим также, что в середине симметричной дифракционной картины, состоящей из чередующихся светлых и темных полос, при дифракции Фраунгофера *всегда* образуется максимум освещенности (в отличие от френелевой дифракции, где центральная полоса может быть как светлой, так и темной).

Если плоская световая волна падает на щель наклонно под углом ϑ_0 к нормали, то разность хода между колебаниями, распространяющимися от краев щели под углом ϑ к нормали, будет равна $\Delta = b(\sin \vartheta - \sin \vartheta_0)$. Это при условии, что оба угла, ϑ и ϑ_0 , отсчитываются от нормали в одну сторону — *по* или *против часовой* стрелки.

Условие дифракционных минимумов в данном случае принимает вид

$$b(\sin \vartheta_m - \sin \vartheta_0) = \pm m \lambda, \quad (0.6.194)$$

Центральный максимум ($m = 0$) будет расположен под углом $\vartheta_m = \vartheta_0$, т. е. в направлении падающей волны, и дифракционная картина будет несимметрична относительно центральной светлой полосы.

Теорема Бабине. Эта полезная теорема касается свойств так называемых *дополнительных экранов*. Например, в нашем случае, когда в непрозрачной преграде имеется щель, то дополнительным к нему экраном будет непрозрачная прямолинейная полоска, ширина которой равна ширине щели.

Согласно теореме Бабине, фраунгоферовы дифракционные картины в фокальной плоскости объектива совершенно одинаковы от дополнительных экранов, за исключением самого фокуса. Эта теорема следует из того, что согласно принципу Гюйгенса-Френеля дифрагированные волны можно представить как сумму вторичных волн, исходящих из каждого элемента площади отверстий экрана. Пусть вектор-амплитуда дифрагированной в некотором направлении волны для данного экрана равна \vec{A}_1 , а для дополнительного к нему экрана в этом же направлении — \vec{A}_2 . В отсутствие обоих экранов амплитуды волн для всех направлений, кроме направления первоначальной волны, равны нулю. Следовательно, по принципу Гюйгенса-Френеля получим $\vec{A}_1 + \vec{A}_2 = 0$, откуда $A_1 = A_2$. Так как интенсивность $I \sim A^2$, то тем самым теорема доказана.

Теорема Бабине позволяет упростить решение многих дифракционных задач, заменяя экраны дополнительными. Например, надо определить толщину человеческого волоса. Для этого получают от него фраунгоферову дифракционную картину, а затем *такую же по размеру картину* — от щели, подбирая ее ширину. Найденная ширина щели и равна диаметру человеческого волоса.

0.6.7 Дифракционная решетка

Дифракционная решетка является важнейшим спектральным прибором, предназначенным для разложения света в спектр и измерения длин волн. Она представляет собой стеклянную или металлическую пластинку, на которых нанесено очень много (иногда до сотен тысяч) прямых равноотстоящих штрихов одинаковой конфигурации.

Рассмотрим простейшую идеализированную решетку, состоящую из одинаковых равноотстоящих щелей в непрозрачном экране. Пусть ширина каждой щели равна b , а период решетки — d . В решетке реализуется многолучевая интерференция когерентных дифрагированных пучков света, исходящих из щелей решетки при ее освещении.

Дифракционную (точнее дифракционно-интерференционную) картину наблюдают по методу Фраунгофера, т. е. в параллельных лучах, а практически — в фокальной плоскости объектива (рис. 67, а).

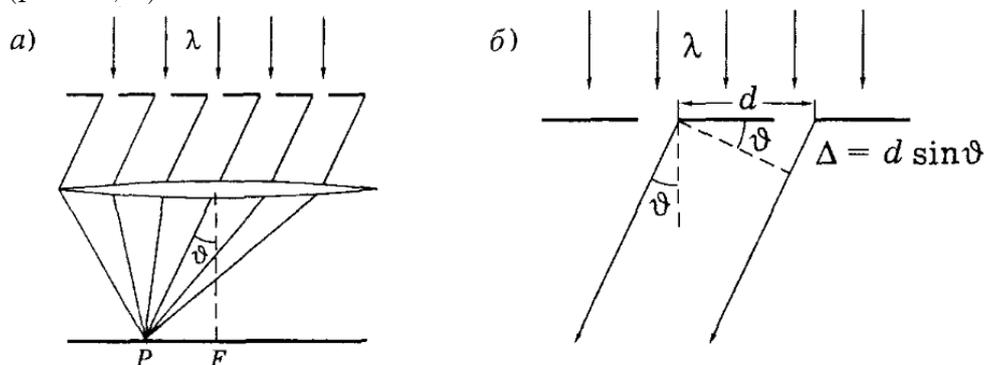


Рис. 67

Пусть плоская монохроматическая световая волна падает на решетку *нормально*. Каждая из щелей в отдельности давала бы в фокальной плоскости объектива дифракционную картину, показанную на рис. 66. И такие картины от всех щелей в отсутствие когерентности точно накладывались бы друг на друга, независимо от их положения. Интенсивности

при этом складывались бы, и мы получили бы при наличии N щелей дифракционную картину как от одной щели, но усиленную в N раз.

При освещении же решетки *когерентным* светом, световые волны от всех щелей интерферируют друг с другом, и дифракционная картина резко меняется. Мы будем наблюдать систему достаточно узких максимумов.

Главные максимумы. В середину дифракционно-интерференционной картины⁷ когерентные колебания от всех щелей приходят в фазе. Это значит, что если амплитуда от одной щели равна A_1 , а число щелей в решетке N , то результирующая амплитуда A и соответствующая ей интенсивность I будут определяться формулами

$$A = A_1 N, \quad I = I_1 N^2.$$

Такой же результат получается и при углах дифракции ϑ , для которых оптическая разность хода Δ колебаний от соседних щелей (см. рис. 67, б) равна целому числу длин волн:

$$\boxed{d \sin \vartheta_m = \pm m \lambda}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (0.6.195)$$

где знаки “ \pm ” следуют из симметрии дифракционной картины относительно нормали к решетке ($\vartheta_0 = 0$): при знаке “ $+$ ” угол $\vartheta_m > 0$, а при знаке “ $-$ ” угол $\vartheta_m < 0$.

В направлениях ϑ_m , определяемых этим уравнением, возникают максимумы, интенсивность которых в N^2 раз превосходит интенсивность от каждой щели в том же направлении. Их называют **главными максимумами** m -го порядка, а уравнение (0.6.195) — *условием главных максимумов*. Именно главные максимумы и представляют особый практический интерес. Как мы увидим далее, они получаются тем более узкими и резкими, чем большее число N штрихов содержит решетка.

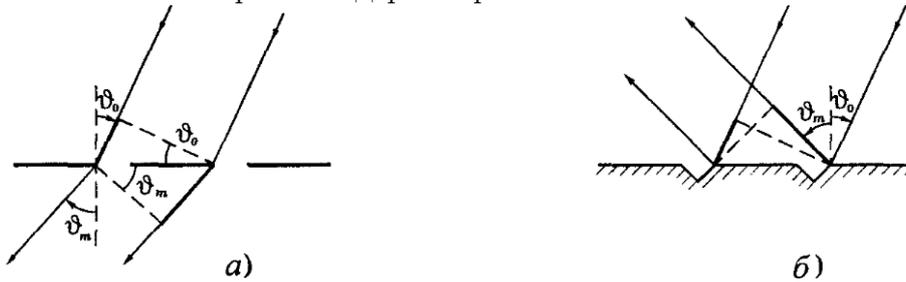


Рис. 68

При наклонном падении плоской волны на решетку — под углом ϑ_0 к нормали (рис. 68, а) разность хода соответствующих лучей от двух соседних штрихов (щелей) равна $\Delta = d(\sin \vartheta - \sin \vartheta_0)$, и направления ϑ_m на главные фраунгоферовы максимумы определяются условием

$$d(\sin \vartheta_m - \sin \vartheta_0) = \pm m \lambda. \quad (0.6.196)$$

с учетом следующего *правила знаков* для углов ϑ_m и ϑ_0 : они должны отсчитываться в *одном* направлении от нормали к решетке, например *по* часовой стрелке (см. рис. 68, а, где ϑ_0 и $\vartheta_m > 0$).

Это же условие (0.6.196) справедливо и для отражательной решетки, если углы ϑ_m и ϑ_0 отсчитывать в *противоположных* направлениях от нормали (см. рис. 68, б, где ϑ_0 и $\vartheta_m > 0$).

Отметим попутно, что форма штрихов решетки не влияет на положение главных фраунгоферовых максимумов, и условия (0.6.195) и (0.6.196) являются универсальными.

Интерференционные минимумы. Для выяснения дальнейших деталей фраунгоферовой дифракционной картины воспользуемся векторной диаграммой, которая позволит легко найти и результирующую амплитуду A колебаний, приходящих в произвольную точку P фокальной плоскости объектива (см. рис. 67).

⁷Далее мы будем называть ее по традиции просто дифракционной.

Векторная диаграмма в нашем случае представляет собой цепочку векторов-амплитуд когерентных колебаний, приходящих в точку P от каждой из N щелей: A_1, A_2, \dots, A_N (рис. 69).

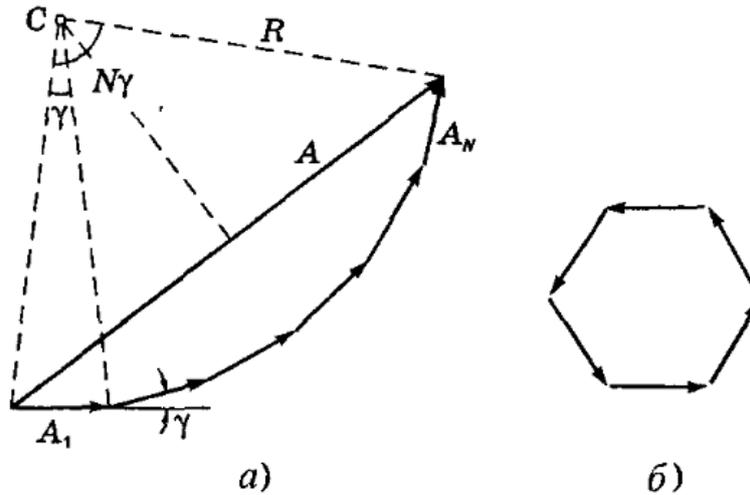


Рис. 69

По модулю эти векторы одинаковы, и каждый следующий отстает от предыдущего (или опережает, это не существенно) по фазе на один и тот же угол γ . Этот угол связан с оптической разностью хода Δ соответствующих лучей от соседних щелей известным соотношением ($\frac{2\pi}{\lambda} \Delta$), т. е. в нашем случае — при нормальном падении света на решетку

$$\gamma = 2\pi \frac{\Delta}{\lambda} = 2\pi \frac{d \sin \vartheta}{\lambda}, \quad (0.6.197)$$

где d — период решетки (см. рис. 67, б).

Теперь проследим, как будет вести себя эта цепочка векторов (а значит и ее замыкающая A) при удалении точки P от фокуса F (см. рис. 67, а), т. е. с ростом угла дифракции ϑ .

Ясно, что при этом будет увеличиваться разность фаз γ между колебаниями от соседних щелей, и цепочка векторов будет постепенно закручиваться. Первый раз она замкнется и вектор \vec{A} обратится в нуль, когда угол $N\gamma$ станет равным 2π — это непосредственно видно из рис. 69, б.

При дальнейшем росте угла ϑ , а значит, разности фаз γ и $N\gamma$, цепочка будет периодически то распрямляться (главные максимумы, $A = \text{макс}$), то замыкаться (интерференционные минимумы, $A = 0$). Последнее будет происходить при значениях угла $N\gamma$ кратных 2π :

$$N\gamma = 2\pi m', \quad (0.6.198)$$

где m' принимает целочисленные значения, кроме $0, N, 2N, \dots$, при которых цепочка распрямляется, и мы получаем главные максимумы.

Подставив в (0.6.198) значение γ из формулы (0.6.197), получим:

$$d \sin \vartheta = \pm \frac{m'}{N} \lambda. \quad (0.6.199)$$

Это выражение представляет собой *условие для интерференционных минимумов* (при целочисленных значениях m' , кроме $0, N, 2N, \dots$). Оно же содержит и условие (0.6.195) для главных максимумов (при $m' = 0, N, 2N, \dots$). Между двумя соседними главными максимумами расположены $N-1$ интерференционных минимумов. А между последними, в свою очередь, — *добавочные максимумы*, интенсивность которых при достаточно большом числе N штрихов решетки пренебрежимо мала (как мы увидим далее, она составляет не более 5% от интенсивности главных максимумов).

В отличие от условия (0.6.195), которое дает только *положения* главных максимумов, соотношение (0.6.199) позволяет определить и их *угловую ширину*. В самом деле, при переходе от главного максимума к соседнему минимуму (рис. 70) m' меняется на единицу, например от N до $N + 1$.

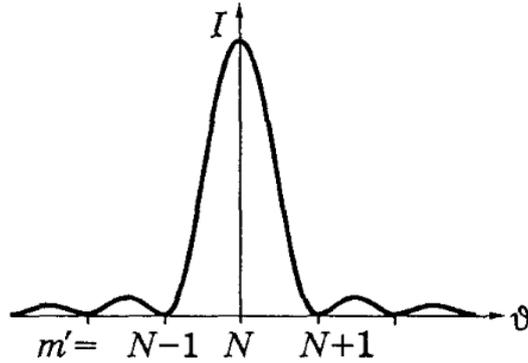


Рис. 70

Тогда при достаточно большом N угловую полуширину $\delta\vartheta$ главного максимума 1-го порядка можно найти, взяв дифференциал уравнения (0.6.199) с учетом того, что m' при этом меняется на единицу ($\delta m' = 1$). Тогда $d \cos \vartheta \delta \vartheta = \frac{\lambda}{N}$, откуда

$$\delta\vartheta = \frac{\lambda}{Nd \cos \vartheta} = \frac{\lambda}{h \cos \vartheta}. \quad (0.6.200)$$

Обращает на себя внимание тот факт, что $\delta\vartheta$ зависит не от d и N в отдельности, а от их произведения, которое есть не что иное как ширина решетки $h = Nd$. С ростом угла дифракции ϑ ширина главных максимумов увеличивается. Главные максимумы будут тем уже, чем больше ширина решетки h и меньше угол дифракции ϑ .

Теперь выясним, что означает утверждение, например, «угловая ширина главного максимума $\delta\vartheta$ мала». По сравнению с чем? Ответ достаточно очевидный: величину $\delta\vartheta$ надо сравнивать с угловой шиной $\Delta\vartheta$ между соседними главными максимумами. Если $\delta\vartheta \ll \Delta\vartheta$, мы говорим, что главные максимумы узкие (резкие). Оценим отношение этих двух величин. Значение $\delta\vartheta$ соответствует изменению m' в (0.6.199) на единицу, но таких значений m' между двумя соседними главными максимумами оказывается N . Считая, что на каждый интервал $\delta m' = 1$ приходится одно и то же значение $\delta\vartheta$ (для оценки), приходим к выводу, что $\delta\vartheta$ в N раз меньше, чем $\Delta\vartheta$. Итак, резкость главных максимумов пропорциональна числу штрихов решетки (более точный расчет приводит к тому же результату).

Таким образом, с помощью условий (0.6.195) и (0.6.199) мы можем установить не только положения главных максимумов, но и их угловую ширину (резкость). Остается решить вопрос об их интенсивности. Рассмотрим его сначала качественно.

Проследившая с помощью рис. 69, как будет вести себя векторная диаграмма по мере увеличения угла дифракции ϑ , мы оставили без внимания тот факт, что при этом каждый вектор цепочки по модулю будет уменьшаться, ибо он определяется дифракцией от каждой щели. В соответствии же с рис. 65 результирующий вектор при закручивании цепочки будет сначала уменьшаться и в дальнейшем вести себя аналогично тому, как показано на рис. 66.

Следовательно, кроме интерференционных минимумов, необходимо иметь в виду и *дифракционные минимумы*, определяемые условием (0.6.189), т. е.

$$b \sin \vartheta_m = \pm m\lambda, \quad m = 1, 2, \dots,$$

где b — ширина каждой щели.

При этом условии *все* векторы цепочки обращаются в нуль, значит и результирующая интенсивность в *этих* направлениях всегда должна быть равна нулю. Даже в том случае, если этому направлению соответствует главный максимум m -го порядка.

Пример. Найдем отношение периода решетки к ширине щели, $\frac{d}{b}$, при котором пропадает главный максимум 3-го порядка. В этом направлении — под углом дифракции ϑ — должны выполняться два условия:

$$d \sin \vartheta_x = \pm 3\lambda, \quad b \sin \vartheta_x = \pm \lambda.$$

Из отношения этих двух равенств находим: $\frac{d}{b} = 3$. Это значит, что в пределах основного дифракционного максимума мы будем наблюдать два главных максимума. Третий попадет на дифракционный минимум и, значит, пропадет.

Интенсивность главных максимумов. Распределение интенсивности в дифракционно-интерференционной картине проще всего получить с помощью векторной диаграммы (см. рис. 69). Из этой диаграммы видно, что результирующую амплитуду A при интерференции N волн можно записать так:

$$A = 2R \sin \left(N \frac{\gamma}{2} \right),$$

где R — вспомогательный радиус дуги окружности, описанной вокруг данной цепочки векторов. Кроме того, амплитуда A_1 колебаний от каждой щели, как видно из этого же рисунка,

$$A_1 = 2R \sin \left(\frac{\gamma}{2} \right).$$

Исключив $2R$ из последних двух формул, получим:

$$A = A_1 \frac{\sin \left(N \frac{\gamma}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\gamma}{2} \right)}.$$

Учитывая, что A_1 определяется формулой (0.6.192) и интенсивность $I \sim A^2$, приходим к следующему (искомому) выражению:

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \left(\frac{\delta}{2} \right)}{\left(\frac{\delta}{2} \right)^2} \cdot \frac{\sin^2 \left(N \frac{\gamma}{2} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\gamma}{2} \right)}. \quad (0.6.201)$$

где, напомним,

$$\delta = 2\pi \frac{b \sin \vartheta}{\lambda}, \quad \gamma = 2\pi \frac{d \sin \vartheta}{\lambda}. \quad (0.6.202)$$

Полученный результат (0.6.201) графически представлен на рис. 71 как зависимость интенсивности дифракционной картины от угла дифракции ϑ , точнее от $\sin \vartheta$. Как видим, интерференция многих пучков привела к резкому перераспределению интенсивности света, обусловленному дифракцией от каждой щели.

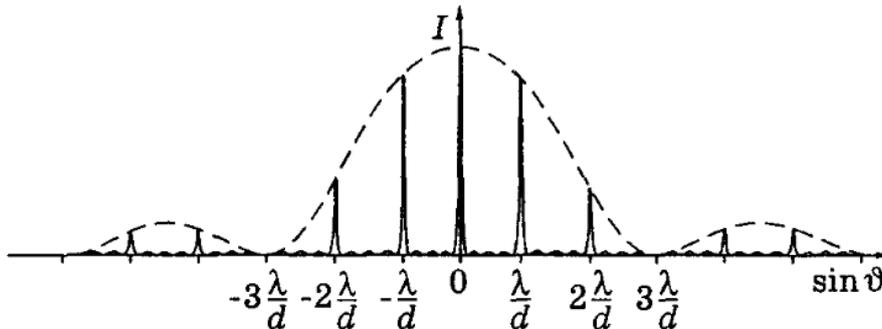


Рис. 71

Первая дробь в выражении (0.6.201) представляет собой плавную функцию от $\sin \vartheta$ (она показана пунктиром на рис. 71 и отражает дифракционное распределение интенсивности

от каждой щели). Эта плавная функция модулирует многолучевую интерференционную картину от N щелей, которую описывает вторая дробь в формуле (0.6.201).

Практически наиболее важными являются главные максимумы, попадающие в центральный дифракционный максимум от каждой щели — они являются наиболее интенсивными.⁸

0.6.8 Дифракционная решетка как спектральный прибор

Из формулы (0.6.195), определяющей направления на главные фраунгоферовы максимумы, видно, что эти направления ϑ_m зависят от длины световой волны λ (за исключением максимума нулевого порядка, $m = 0$). Поэтому решетка в каждом порядке $m \neq 0$ разложит падающий на нее свет в *спектр* различных порядков. Причем наибольшее отклонение в каждом порядке испытывает красная часть спектра (более длинноволновая).

Основными характеристиками любого спектрального прибора являются *угловая дисперсия, разрешающая способность и область дисперсии*.

1. **Угловая дисперсия D** характеризует степень пространственного (углового) разделения волн с различными длинами λ . По определению,

$$D = \frac{d\vartheta}{d\lambda}. \quad (0.6.203)$$

Дифференцируя формулу (0.6.195) при данном m находим для решетки $d \cos \vartheta d\vartheta = m d\lambda$, откуда

$$\boxed{\frac{d\vartheta}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos \vartheta}}. \quad (0.6.204)$$

Видно, что для заданного порядка m спектра угловая дисперсия тем больше, чем меньше период d решетки. Кроме того, $\frac{d\vartheta}{d\lambda}$ растет с увеличением угла дифракции ϑ .

2. **Разрешающая способность R** . По определению,

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}, \quad (0.6.205)$$

где $\delta\lambda$ — наименьшая разность длин волн спектральных линий, при которой эти линии воспринимаются еще раздельно, т. е. *разрешаются*. Величина $\delta\lambda$ не может быть по ряду причин определена точно, а лишь ориентировочно (условно). Такой условный критерий был предложен Рэлеем (аналогично тому, как это было рассмотрено при решении вопроса о разрешающей способности объектива, см. **0.6.5**, в конце). Согласно **критерию Рэля**, спектральные линии с разными длинами волн, но *одинаковой* интенсивности, считаются разрешенными, если главный максимум одной спектральной линии совпадает с первым минимумом другой (рис. 72). В этом случае между двумя максимумами возникает провал, составляющий около 20% от интенсивности в максимумах, и линии еще воспринимаются раздельно.

Итак, согласно критерию Рэля и формуле (0.6.200), необходимо, чтобы максимум m -го порядка ($m' = mN$) линии с длиной волны $\lambda + \delta\lambda$ (см. рис. 72) совпадал по направлению с первым минимумом линии λ ($m' = mN + 1$), т. е.

$$d \sin \vartheta_m = m(\lambda + \delta\lambda) = \left(m + \frac{1}{N}\right) \lambda.$$

⁸Заметим, что распределение $I(\vartheta)$, показанное на рис. 71, справедливо для простой щелевой решетки. Если же коэффициент прозрачности (или отражения) меняется в решетке, например, по синусоидальному закону, то возникают главные максимумы только нулевого и первого порядков: $m = 0$ и $m = \pm 1$

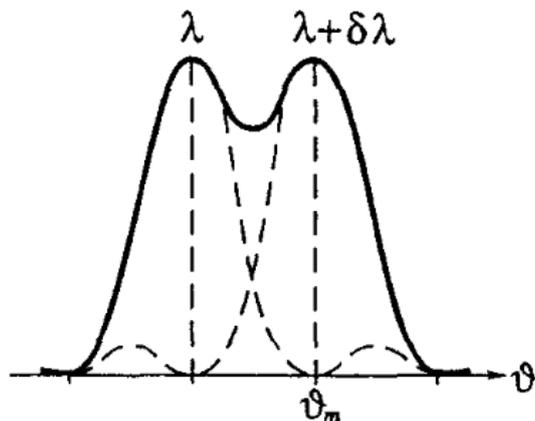


Рис. 72

Отсюда следует, что

$$\boxed{\frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN.} \quad (0.6.206)$$

Это и есть искомая формула для *разрешающей способности* дифракционной решетки. Данная формула дает верхний предел разрешающей способности. Она справедлива при выполнении следующих условий:

1. Интенсивность обоих максимумов должна быть одинаковой.
2. Расширение линий должно быть обусловлено только дифракцией.
3. Необходимо, чтобы падающий на решетку свет имел ширину когерентности, превышающую размер решетки. Только в этом случае все N штрихов решетки будут «работать» согласованно (когерентно), и мы достигнем желаемого результата.

Для повышения разрешающей способности спектральных приборов можно, как показывает формула (0.6.206), либо увеличивать число N когерентных пучков, либо повышать порядок интерференции m . Первое используется в дифракционных решетках (число N доходит до 200 000), второе — в интерференционных спектральных приборах (например, в интерферометре Фабри-Перо число N интерферирующих волн невелико, порядка нескольких десятков, а порядки интерференции $m \sim 10^6$ и более).

3. Область дисперсии $\Delta\lambda$ — это ширина спектрального интервала, при которой еще нет перекрытия спектров соседних порядков. Если спектры соседних порядков перекрываются, то спектральный аппарат становится *непригодным* для исследования соответствующего участка спектра.

Длинноволновый конец спектра m -го порядка совпадает с коротковолновым концом спектра $(m + 1)$ -го порядка, если $m(\lambda + \Delta\lambda) = (m + 1)\lambda$, откуда следует, что область дисперсии

$$\boxed{\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m}.} \quad (0.6.207)$$

Значит, область дисперсии $\Delta\lambda$ обратно пропорциональна порядку спектра m . При работе со спектрами низких порядков (обычно второго или третьего) дифракционная решетка пригодна для исследования излучения, занимающего достаточно широкий спектральный интервал. В этом главное преимущество дифракционных решеток перед интерференционными спектральными приборами, например, интерферометром Фабри-Перо, у которого из-за высоких порядков m область дисперсии очень мала.

Еще о дифракционных решетках. Дифракционная решетка является одним из важнейших спектральных приборов, которому наука обязана многими фундаментальными открытиями. Спектр — это по существу код, который будучи расшифрован с помощью того или иного математического аппарата дает возможность получить ценнейшую информацию о свойствах атомов и внутриатомных процессов.

Для адекватного решения этой задачи спектр должен быть неискаженным и четко различимым — в этом суть той сложнейшей научно-технической проблемы, которую пришлось решить, чтобы наконец добиться получения высококачественных дифракционных решеток.

Технология изготовления дифракционных решеток в настоящее время доведена до высокой степени совершенства. Первые высококачественные отражательные решетки были созданы в конце прошлого столетия Роулендом⁹ (США). О технической сложности решаемой проблемы говорит хотя бы уже такой факт, что необходимая для этой цели делительная машина создавалась в течение 20 лет!

Современные полностью автоматизированные делительные машины позволяют с помощью алмазного резца изготавливать решетки с почти строго эквидистантным расположением штрихов. Трудно даже представить, что алмазный резец при этом прочерчивает десятки километров, практически не изменяя свой профиль, — а это принципиально важно. Размеры уникальных решеток достигают 40×40 см! (Такие решетки используют в основном в астрофизике.)

В зависимости от области спектра решетки имеют различное число штрихов на 1 мм: от нескольких штрихов, начиная с инфракрасной области, до 3600 — для ультрафиолетовой. В видимой области спектра 600 — 1200 штрих/мм. Ясно, что обращение с гравированной поверхностью таких решеток требует предельной осторожности.

Вследствие высокой стоимости оригинальных гравированных решеток получили распространение *реплики*, т. е. отпечатки гравированных решеток на специальных пластмассах, покрытых тонким отражательным слоем. По качеству реплики почти не уступают оригиналам.

В 1970-х годах был разработан новый, голографический метод изготовления дифракционных решеток. В этом методе плоская подложка со светочувствительным слоем освещается двумя плоскими наклонными пучками когерентных лазерных излучений с определенной длиной волны. В области пересечения пучков образуется стационарная интерференционная картина с синусоидальным распределением интенсивности. После соответствующей обработки светочувствительного слоя получается качественная дифракционная решетка.

Отметим в заключение, что, кроме прозрачных и отражательных решеток, существуют еще и *фазовые*. Они влияют не на амплитуду световой волны, а вносят периодические изменения в ее фазу. По этой причине их и называют фазовыми. Примером фазовой решетки может служить пластмассовая кювета с прозрачной жидкостью, в которой возбуждена плоская стоячая ультразвуковая волна. Это приводит к периодическому изменению плотности жидкости, а значит ее показателя преломления и оптической разности хода. Такая структура меняет не амплитуду проходящего поперек волны света, а только фазу. Фазовые решетки также находят многочисленные практические применения.

Одномерная решетка вибраторов. Аналогично дифракционной решетке ведет себя в радиодиапазоне система из N параллельных друг другу вибраторов-антенн. Если они действуют синфазно, то нулевой (основной) максимум излучения направлен нормально к решетке в ее экваториальной плоскости. И здесь возникает интересная в практическом отношении возможность. Если создать режим, при котором колебания каждой следующей антенны будут, например, отставать по фазе от колебаний предыдущей на одну и ту же величину φ , то нулевой максимум не будет совпадать с нормалью к решетке. Изменяя же φ во времени по определенному закону, мы получаем систему, у которой направление главного максимума будет изменяться в пространстве. Таким образом мы приходим к возможности радиолокационного обзора местности с помощью неподвижной системы антенн.

⁹Его дело продолжили Андерсен, Вуд и другие знаменитые экспериментаторы.

0.6.9 Дифракция на пространственной решетке

Пример пространственной дифракционной решетки — это кристаллическая решетка твердого тела. Частицы, образующие эту решетку, играют роль упорядоченно расположенных центров, когерентно рассеивающих падающую на них волну.

Рассмотрение дифракции на упорядоченных структурах проще всего начать с дифракции монохроматического излучения на прямолинейной цепочке, состоящей из одинаковых равноотстоящих частиц (например, атомов). Пусть расстояние между соседними частицами (*период структуры*) равно d и параллельный пучок излучения с длиной волны λ падает на такую цепочку под углом скольжения α_0 (рис. 73).

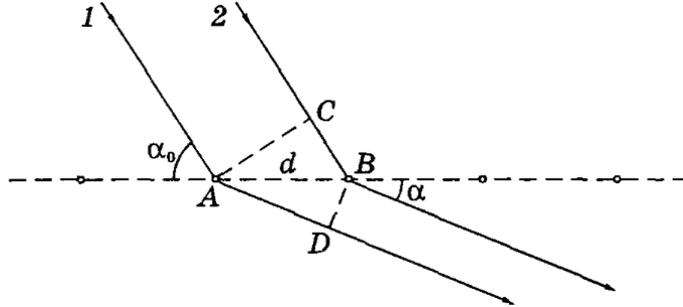


Рис. 73

Разность хода между лучами 1 и 2, рассеянными соседними частицами под углом α , равна, как видно из этого рисунка, $\Delta = AD - CB = d(\cos \alpha - \cos \alpha_0)$. Углы $\alpha = \alpha_m$, под которыми образуются фраунгоферовы максимумы m -го порядка, определяются условием, при котором эта разность хода равна целому числу длин волн:

$$d(\cos \alpha_m - \cos \alpha_0) = \pm m\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Условия Лауэ. Рассмотрим для простоты прямоугольную решетку, периоды которой вдоль осей координат X , Y , Z , параллельных трем ребрам решетки, равны d_1 , d_2 , d_3 . Тогда при фраунгоферовой дифракции главные максимумы должны удовлетворять трем соотношениям, аналогичным только что приведенному для дифракционных максимумов при наклонном падении излучения на прямолинейную цепочку. Эти соотношения — **условия Лауэ** — имеют вид:

$$\begin{aligned} d_1(\cos \alpha - \cos \alpha_0) &= \pm m_1\lambda, \\ d_2(\cos \beta - \cos \beta_0) &= \pm m_2\lambda, \\ d_3(\cos \gamma - \cos \gamma_0) &= \pm m_3\lambda, \end{aligned} \quad (0.6.208)$$

где $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ и α, β, γ — углы между осями координат X, Y, Z и направлениями распространения падающего и дифрагированного пучков; m_1, m_2, m_3 — целые числа, определяющие порядок максимума (0, 1, 2, ...).

Углы α, β, γ не являются независимыми. В случае прямоугольной системы координат они связаны соотношением

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (0.6.209)$$

При одновременном выполнении этих четырех уравнений (а это оказывается возможным лишь для некоторых, вполне определенных длин волн λ) каждому такому значению λ соответствует свой максимум (и направления α, β, γ на него).

И еще одно важное обстоятельство. Если длина волны λ больше максимальной разности хода колебаний от соседних узлов решетки ($\lambda > 2d$), то должны отсутствовать все дифракционные максимумы, кроме нулевого. Излучение с такими длинами волн распространяется в среде, не испытывая дифракции (рассеяния).

Постоянные кристаллических решеток значительно меньше длины волны видимого света ($d \sim 0,5$ нм, $\lambda \sim 500$ нм), поэтому для видимого света кристаллы являются оптически однородными средами (не рассеивающими). Для рентгеновского же излучения, наоборот, кристаллы представляют естественные дифракционные решетки.

Формула Брэгга—Вульфа. Условия Лауэ (0.6.208) выражают физическую сущность явления дифракции на пространственной структуре. Но мы не будем более подробно останавливаться на анализе результатов, которые можно получить с помощью этих условий, поскольку существует более простой метод расчета дифракции рентгеновского излучения в кристалле. Этот метод был предложен Брэггом и Вульфом: дифракцию рентгеновского излучения в кристалле можно рассматривать как результат *зеркального* отражения от системы параллельных кристаллических *плоскостей*, т. е. плоскостей, в которых лежат узлы кристаллической решетки. Вторичные волны, отразившись от разных атомных плоскостей, когерентны и будут интерферировать между собой. Показатель преломления всех веществ для рентгеновских лучей близок к единице, поэтому разность хода двух волн, отразившихся зеркально от соседних кристаллических плоскостей, равна, как видно из рис. 74,

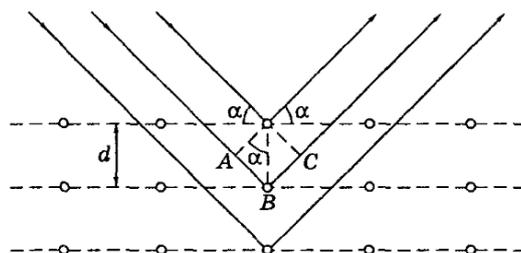


Рис. 74

$ABC = 2d \sin \alpha$, где d — межплоскостное расстояние, α — угол скольжения. При этом направления, в которых возникают фраунгоферовы дифракционные максимумы, определяются **формулой Брэгга-Вульфа**:

$$\boxed{2d \sin \alpha = \pm m \lambda}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (0.6.210)$$

В кристалле можно провести множество систем атомных плоскостей в различных направлениях (рис. 75).

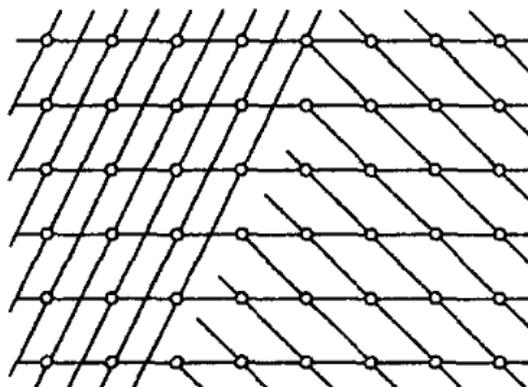


Рис. 75

Каждая система плоскостей может дать дифракционный максимум, если для нее будет выполнено условие (0.6.210). Однако эффективными являются только такие плоскости, в которых атомы расположены наиболее плотно.

Заметим, что формула (0.6.210) может быть получена как следствие условий Лауэ (0.6.208).

Применения дифракции рентгеновских лучей. Дифракция рентгеновских лучей от кристаллов получила развитие в двух направлениях: *рентгеновская спектроскопия* (исследование спектрального состава этого излучения) и *рентгеноструктурный анализ* (изучение структуры кристаллов).

Спектральный состав излучения, т. е. измерение его длин волн, можно определить с помощью формулы (0.6.210), найдя направления на максимумы при дифракции на кристалле с известной структурой.

В рентгеноструктурном анализе разработаны два метода:

1. **Метод Лауэ**, в котором узкий пучок рентгеновского излучения направляется на исследуемый монокристалл. Для каждой системы кристаллических плоскостей в излучении находится длина волны, при которой выполняется условие (0.6.210). В результате на помещенной за кристаллом фотопластинке получается система пятен-максимумов, так называемая *лауэграмма*. Взаимное расположение пятен отражает симметрию кристалла. А по расстояниям между максимумами и их интенсивности можно расшифровать структуру данного кристалла.

2. Метод Дебая-Шерера, в котором используется узкий пучок монохроматического рентгеновского излучения и образец в виде поликристалла. Исследуемый кристалл предварительно измельчают в порошок (очень мелкие кристаллики), и из него прессуется образец в виде стерженька. В большом количестве беспорядочно ориентированных кристалликов найдется множество таких, для которых условие (0.6.210) окажется выполненным, и дифрагированный пучок будет образовывать конус направлений — свой для каждой системы межплоскостных расстояний d и порядка дифракции m .

Рентгенограмма образца, полученная по этому методу — *дебайграмма* — имеет вид системы концентрических колец. Ее расшифровка также позволяет определить структуру кристалла.

0.6.10 О голографии

Голографией называют способ записи и последующего восстановления структуры световых волн, основанный на явлениях дифракции и интерференции когерентных световых пучков. В отличие от обычной фотографии, голография — это принципиально новый метод получения объемных изображений предметов.

В этом методе регистрируется не оптическое изображение предмета, а интерференционная картина, возникающая при наложении световой волны, рассеянной предметом, и когерентной с ней опорной волны. Эта интерференционная картина фиксирует информацию о распределении не только амплитуд, но и фаз в предметной волне. Таким способом можно получить и зарегистрировать на фотопластинке значительно более полную информацию об объекте, нежели путем обычного фотографирования.

Идеи, лежащие в основе голографии, были высказаны и продемонстрированы на опыте Габором в 1947-48 гг. Для практической реализации голографии необходимы источники света с высокой степенью временной и пространственной когерентности. Поэтому широкое распространение она получила после создания лазеров.

Суть этого метода (голографии) можно пояснить с помощью рис. 76, а.

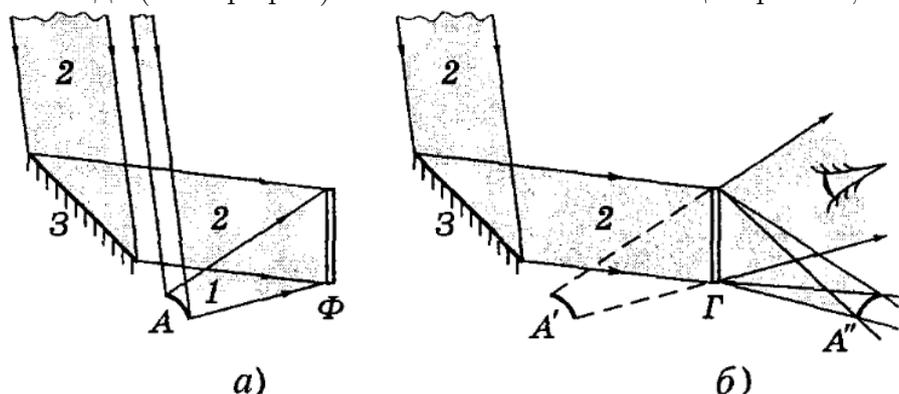


Рис. 76

Фотопластинка Φ регистрирует интерференционную картину, возникающую при наложении отраженной *предметной* волны 1, рассеянной объектом A , и когерентной с ней *опорной* волны 2. Волна 2 испускается тем же источником света, который освещает объект A , и после отражения от зеркала 3 падает непосредственно на фотопластинку Φ . Интерфе-

ренционную картину, зафиксированную на фотопластинке после ее проявления, называют *голограммой*. В отличие от обычной фотографии, голограмма представляет собой мелкий и замысловатый узор из чередующихся областей различного почернения фотоэмульсии.

Голограмма в закодированной форме содержит полную информацию об амплитудах и фазах рассеянной предметной волны.

Восстановление (декодирование) изображения предмета показано на рис. 76, б. Голограмму Г просвечивают как диапозитив той же опорной волной 2, которая использовалась для ее получения, причем при той же ориентации голограммы по отношению к опорной волне. Эта световая волна дифрагирует на голограмме, в результате чего наблюдаются два объемных изображения объекта. Мнимое изображение A' находится в том месте, где был объект A при съемке. Оно видно сквозь голограмму как через окно. Действительное изображение A'' расположено по другую сторону голограммы. Оно как бы висит в воздухе перед голограммой и является зеркальным изображением объекта.

Обычно пользуются мнимым изображением A' , которое по зрительному восприятию практически тождественно самому объекту.

Чтобы понять принцип голографии, рассмотрим один из простейших объектов — светящуюся прямую нить A , которая испускает цилиндрическую волну. На рис. 77 (для наглядности он сильно деформирован) показана слева стадия записи голограммы, нить A перпендикулярна плоскости рисунка.

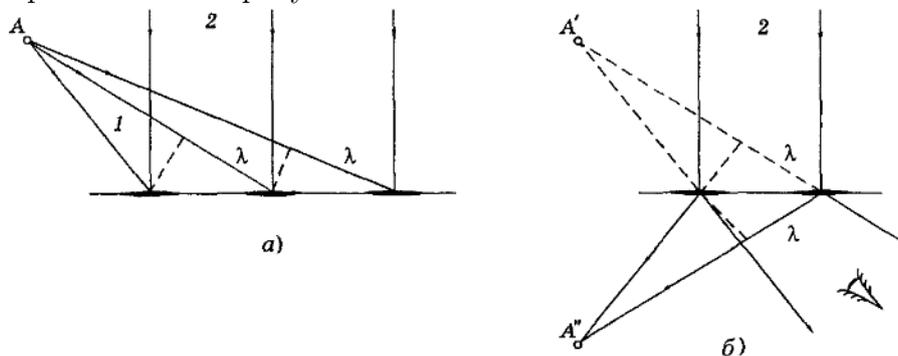


Рис. 77

Пусть плоская опорная волна 2 падает нормально на фотопластинку. Предметная же волна 1, когерентная с опорной, падает на пластинку так, что ее лучи наклонны (см. рис. 77, а). Колебания опорной волны достигают пластинки все в одной фазе. Колебания же предметной волны — с разными фазами.

Ясно, что вследствие интерференции в тех местах, куда колебания придут в одной и той же фазе с колебаниями опорной волны, возникнут максимумы интенсивности, а значит и максимумы почернения. После химической обработки полученная голограмма будет иметь вид чередующихся светлых и темных прямых полос, представляющих по существу зонную пластинку Френеля, только с другой формой зон.

На стадии восстановления изображения голограмму освещают только той же опорной волной 2 (см. рис. 77, б). Голограмма для этой волны играет роль зонной пластинки: в результате дифракции максимально усиливать друг друга будут только те лучи (колебания), разность хода между которыми от соседних зон равна длине волны λ . А здесь есть две возможности выполнения этого условия: или в направлении продолжения лучей падавшей предметной волны, или симметрично относительно нормали. В первом случае мы будем наблюдать мнимое изображение A' , во втором — действительное A'' . Наибольший интерес для голографии играет волна, дающая мнимое изображение предмета.

Отличительной особенностью этой зонной пластинки является то, что ее пропускательная способность изменяется в направлении, перпендикулярном интерференционным полосам (зонам) не скачком, а практически по синусоидальному закону (между соседними максимумами). Это приводит к тому, что возникающие интерференционные максимумы

соответствуют разности хода между колебаниями от соседних полос (зон) только в *одну* длину волны λ . Интенсивность максимумов более высокого порядка практически равна нулю.

Нетрудно заметить, что изменение положения нити A приводит к изменению не только интенсивности интерференционных максимумов, но и к расстоянию между ними. Расстояние же между максимумами характеризует определенную разность хода, или разность фаз.

Поэтому и говорят, что голограмма содержит информацию об амплитуде волны и ее фазе. Этого достаточно, чтобы восстановить предметную волну в том виде, в каком она была в действительности в месте расположения голограммы. Зафиксированная волна «оживает» с помощью голограммы и создает полную иллюзию реальности наблюдаемых предметов. Изменяя положение глаза, можно видеть предмет в разных ракурсах и даже заглядывать за него.

Интерференционная картина в каждой точке голограммы определяется светом, рассеянным всеми точками объекта. Поэтому каждый участок голограммы содержит информацию обо всем объекте. Если голограмма случайно разбилась, то с помощью даже небольшого ее осколка можно восстановить изображение всего объекта. Отличие будет лишь в том, что уменьшается ее разрешающая способность — менее четко и ярко будет восстанавливаться изображение. С точки зрения надежности хранения информации голограмма значительно превосходит обычный фотонегатив.

Наконец, на одной фотопластинке можно последовательно записать несколько голограмм от разных объектов, причем изображение каждого объекта можно восстановить без помех со стороны других изображений. Это можно сделать, изменяя каждый раз, например, угол падения опорной волны.

В настоящее время голография представляет самостоятельный быстро развивающийся раздел науки и техники. Трудно даже перечислить области, где она нашла эффективное использование (включая и акустические голограммы).

0.7 Поляризация света

0.7.1 Естественный и поляризованный свет

Напомним, что поляризованным называется свет, в котором направления колебаний светового вектора упорядочены каким-либо образом. В естественном свете колебания различных направлений быстро и беспорядочно сменяют друг друга.

Рассмотрим два взаимно перпендикулярных электрических колебания, совершающихся вдоль осей x и y и различающихся по фазе на δ :

$$E_x = A_1 \cos \omega t, \quad E_y = A_2 \cos(\omega t + \delta). \quad (0.7.211)$$

Результирующая напряженность \vec{E} является векторной суммой напряженностей \vec{E}_x и \vec{E}_y (рис. 78).

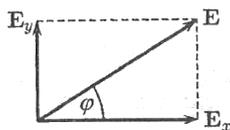


Рис. 78

Угол φ между направлениями векторов \vec{E} и \vec{E}_x определяется выражением

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{E_y}{E_x} = \frac{A_2 \cos(\omega t + \delta)}{A_1 \cos \omega t}. \quad (0.7.212)$$

Если разность фаз δ претерпевает случайные хаотические изменения, то и угол φ , т. е. направление светового вектора \vec{E} , будет испытывать скачкообразные неупорядоченные изменения. В соответствии с этим естественный свет можно представить как наложение двух некогерентных электромагнитных волн, поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях и имеющих одинаковую интенсивность. Такое представление намного упрощает рассмотрение прохождения естественного света через поляризационные устройства.

Допустим, что световые волны E_x и E_y когерентны, причем δ равно нулю или π . Тогда согласно (0.7.212)

$$\operatorname{tg} \varphi = \pm \frac{A_2}{A_1} = \operatorname{const}.$$

Следовательно, результирующее колебание совершается в фиксированном направлении — волна оказывается плоскополяризованной.

В случае, когда $A_1 = A_2$ и $\delta = \pm \frac{\pi}{2}$,

$$\operatorname{tg} \varphi = \mp \operatorname{tg} \omega t$$

$\left(\cos \left(\omega t \pm \frac{\pi}{2} \right) = \mp \sin \omega t \right)$. Отсюда вытекает, что плоскость колебаний поворачивается вокруг направления луча с угловой скоростью, равной частоте колебания ω . Свет в этом случае будет поляризованным по кругу.

Чтобы выяснить характер результирующего колебания в случае произвольного постоянного значения δ , примем во внимание, что величины (0.7.211) представляют собой координаты конца результирующего вектора \vec{E} (рис. 79).

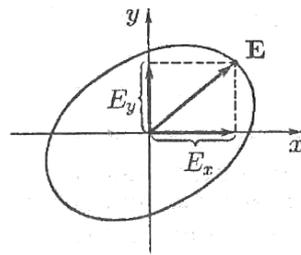


Рис. 79

Из учения о колебаниях (см. Механика. Сложение колебаний.) известно, что два взаимно перпендикулярных гармонических колебания одинаковой частоты при сложении дают в общем случае движение по эллипсу (в частности, может получиться движение по прямой или по окружности). Аналогично точка с координатами, определяемыми выражениями (0.7.211), т. е. конец вектора \vec{E} , движется по эллипсу. Следовательно, две когерентные плоскополяризованные световые волны, плоскости колебаний которых взаимно перпендикулярны, при наложении друг на друга дают эллиптически поляризованную световую волну. При разности фаз δ , равной нулю или π , эллипс вырождается в прямую и получается плоскополяризованный свет. При $\delta = \pm \frac{\pi}{2}$ и равенстве амплитуд складываемых волн эллипс превращается в окружность — получается свет, поляризованный по кругу.

В зависимости от направления вращения вектора \mathbf{E} различают правую и левую эллиптическую и круговую поляризацию. Если по отношению к направлению, противоположному направлению луча, вектор \mathbf{E} вращается по часовой стрелке, поляризация называется *правой*, в противном случае — *левой*.

Плоскость, в которой колеблется световой вектор в плоскополяризованной волне, называют *плоскостью колебаний*. По историческим причинам *плоскостью поляризации* была названа не плоскость, в которой колеблется вектор \mathbf{E} , а перпендикулярная к ней плоскость. В дальнейшем мы будем пользоваться современной терминологией и плоскость колебаний светового вектора называть **плоскостью поляризации**.

Плоскополяризованный свет можно получить из естественного с помощью приборов, называемых *поляризаторами*. Эти приборы свободно пропускают колебания, параллель-

ные плоскости, которую мы будем называть **плоскостью пропускания поляризатора**, и полностью или частично задерживают колебания, перпендикулярные к его плоскости пропускания. Поляризатор, задерживающий перпендикулярные к его плоскости колебания только частично, мы будем называть *несовершенным*. Просто поляризатором мы будем для краткости называть идеальный поляризатор, полностью задерживающий колебания, перпендикулярные к его плоскости, и не ослабляющий колебаний, параллельных плоскости.

На выходе из несовершенного поляризатора получается свет, в котором колебания одного направления преобладают над колебаниями других направлений. Такой свет называется *частично поляризованным*. Его можно рассматривать как смесь естественного и плоскополяризованного света. Частично поляризованный свет, как и естественный, можно представить в виде наложения двух некогерентных плоскополяризованных волн с взаимно перпендикулярными плоскостями колебаний. Отличие заключается в том, что в случае естественного света интенсивность этих волн одинакова, а в случае частично поляризованного — разная.

Если пропустить частично поляризованный свет через поляризатор, то при вращении прибора вокруг направления луча интенсивность прошедшего света будет изменяться в пределах от I_{max} до I_{min} , причем переход от одного из этих значений к другому будет совершаться при повороте на угол, равный $\frac{\pi}{2}$ (за один полный поворот два раза будет достигаться максимальное и два раза минимальное значения интенсивности). Выражение

$$P = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \quad (0.7.213)$$

называется *степенью поляризации*. Для плоскополяризованного света $I_{min} = 0$ и $P = 1$; для естественного света $I_{max} = I_{min}$ и $P = 0$. К эллиптически поляризованному свету понятие степени поляризации не применимо (у такого света колебания полностью упорядочены).

Колебание амплитуды A , совершающееся в плоскости, образующей с плоскостью поляризатора угол φ , можно разложить на два колебания с амплитудами $A_{\parallel} = A \cos \varphi$ и $A_{\perp} = A \sin \varphi$ (рис. 80; луч перпендикулярен к плоскости рисунка).



Рис. 80

Первое колебание пройдет через прибор, второе будет задержано. Интенсивность прошедшей волны пропорциональна $A_{\parallel}^2 = A^2 \cos^2 \varphi$, т. е. равна $I \cos^2 \varphi$, где I — интенсивность колебания с амплитудой A . Следовательно, колебание, параллельное плоскости поляризатора, несет с собой долю интенсивности, равную $\cos^2 \varphi$. В естественном свете все значения φ равновероятны. Поэтому доля света, прошедшего через поляризатор, будет равна среднему значению $\cos^2 \varphi$, т. е. $\frac{1}{2}$. При вращении поляризатора вокруг направления естественного луча интенсивность прошедшего света остается одной и той же, изменяется лишь ориентация плоскости колебаний света, выходящего из прибора.

Пусть на поляризатор падает плоскополяризованный свет амплитуды A_0 и интенсивности I_0 (рис. 81).

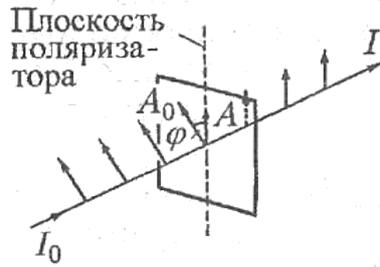


Рис. 81

Сквозь прибор пройдет составляющая колебания с амплитудой $A = A_0 \cos \varphi$, где φ — угол между плоскостью колебаний падающего света и плоскостью поляризатора. Следовательно, интенсивность прошедшего света I определяется выражением

$$I = I_0 \cos^2 \varphi. \quad (0.7.214)$$

Соотношение (0.7.214) носит название *закона Малюса*¹⁰.

Поставим на пути естественного луча два поляризатора, плоскости которых образуют угол φ . Из первого поляризатора выйдет плоскополяризованный свет, интенсивность которого I_0 составит половину интенсивности естественного света $I_{\text{ест}}$. Согласно закону Малюса из второго поляризатора выйдет свет интенсивности $I_0 \cos^2 \varphi$. Таким образом, интенсивность света, прошедшего через два поляризатора, равна

$$I = \frac{1}{2} I_{\text{ест}} \cos^2 \varphi. \quad (0.7.215)$$

Максимальная интенсивность, равная $\frac{I_{\text{ест}}}{2}$ получается при $\varphi = 0$ (поляризаторы параллельны). При $\varphi = \frac{\pi}{2}$ интенсивность равна нулю — скрещенные поляризаторы света не пропускают.

Пусть эллиптически поляризованный свет падает на поляризатор. Прибор пропускает составляющую \vec{E}_{\parallel} вектора \mathbf{E} по направлению плоскости поляризатора (рис. 82).

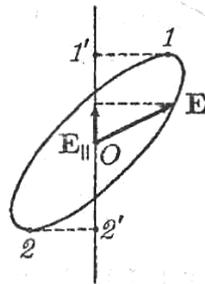


Рис. 82

Максимальное значение этой составляющей достигается в точках 1 и 2. Следовательно, амплитуда вышедшего из прибора плоскополяризованного света равна длине отрезка $O1'$. Вращая поляризатор вокруг направления луча, мы будем наблюдать изменения интенсивности в пределах от I_{max} (получающейся при совпадении плоскости поляризатора с большой полуосью эллипса) до I_{min} (получающейся при совпадении плоскости поляризатора с малой полуосью эллипса). Такой же характер изменения интенсивности света при вращении поляризатора получается в случае частично поляризованного света. В случае света, поляризованного по кругу, вращение поляризатора не сопровождается (как и в случае естественного света) изменением интенсивности света, прошедшего через прибор.

0.7.2 Поляризация при отражении и преломлении

Если угол падения света на границу раздела двух диэлектриков (например, на поверхность стеклянной пластинки) отличен от нуля, отраженный и преломленный лучи оказываются

¹⁰Этьенн Луи Малюс (1775–1812)– французский физик.

частично поляризованными ¹¹. В отраженном луче преобладают колебания, перпендикулярные к плоскости падения (на рис. 83 эти колебания обозначены точками), в преломленном луче — колебания, параллельные плоскости падения (на рисунке они изображены двусторонними стрелками). Степень поляризации зависит от угла падения.

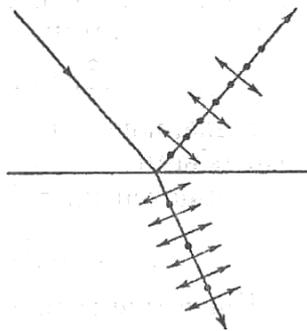


Рис. 83

Обозначим через $\varphi_{\text{Бр}}$ угол, удовлетворяющий условию

$$\operatorname{tg} \varphi_{\text{Бр}} = \frac{n_2}{n_1} = n_{12} \quad (0.7.216)$$

(n_{12} — показатель преломления второй среды относительно первой). При угле падения φ равном $\varphi_{\text{Бр}}$ отраженный луч полностью поляризован (он содержит только колебания, перпендикулярные к плоскости падения). Степень поляризации преломленного луча при угле падения, равном $\varphi_{\text{Бр}}$, достигает наибольшего значения, однако этот луч остается поляризованным только частично.

Соотношение (0.7.216) носит название *закона Брюстера* ¹², а угол $\varphi_{\text{Бр}}$ называют *углом Брюстера*. Легко убедиться в том, что при падении света под углом Брюстера отраженный и преломленный лучи взаимно перпендикулярны. Действительно, при $\varphi + \psi = \frac{\pi}{2}$ и $\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$ (с учетом того, что $\sin \psi = \sin(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \cos \varphi$) из закона преломления $n_1 \sin \varphi = n_2 \sin(\frac{\pi}{2} - \varphi)$ имеем $n_1 \sin \varphi = n_2 \cos \varphi$, откуда $\operatorname{tg} \varphi = \frac{n_2}{n_1} = n_{12}$.

Степень поляризации отраженного и преломленного лучей при различных углах падения можно получить с помощью формул Френеля (0.1.94). Эти формулы вытекают из условий, налагаемых на электромагнитное поле на границе двух диэлектриков ¹³. К числу таких условий принадлежит равенство тангенциальных составляющих векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} , а также равенство нормальных составляющих векторов \mathbf{D} и \mathbf{B} по обе стороны границы раздела (с одной стороны нужно брать сумму соответствующих векторов для падающей и отраженной волн, с другой — вектор для преломленной волны).

При падении естественного света под углом Брюстера на границу раздела двух прозрачных диэлектриков преломленная волна становится частично-поляризованной, причем степень поляризации ее оказывается максимальной. В связи с этим вопросом (углом Брюстера и степенью поляризации) рассмотрим два примера.

Пример 1. Естественный свет падает под углом Брюстера на поверхность воды. При этом ρ часть падающего света отражается. Найдем степень поляризации P преломленного света.

Пусть световой поток падающего света равен Φ_0 . Степень поляризации преломленного света, по определению

$$P = \frac{\Phi_{\text{пол}}}{\Phi_{\text{прел}}} = \frac{\rho \Phi_0}{\Phi_0 - \rho \Phi_0} = \frac{\rho}{1 - \rho},$$

¹¹При отражении от проводящей поверхности (например, от поверхности металла) получается эллиптически поляризованный свет.

¹²Дейвид Брюстер (1781-1868) — шотландский физик.

¹³Френель получил эти формулы на основе представлений о свете как об упругих волнах, распространяющихся в эфире.

где $\Phi_{\text{прел}}$ — световой поток преломленного света.

Пример 2. Частично-поляризованный свет падает под углом Брюстера на поверхность прозрачного диэлектрика так, что ρ -часть света отражается, и преломленный свет оказывается естественным. Найдем степень поляризации падающего света.

Обозначим падающий частично-поляризованный световой поток через Φ_0 . Его степень поляризации можно представить следующим образом:

$$P = \frac{\Phi_{\text{п}}}{\Phi_{\text{чп}}} = \frac{\rho\Phi_0}{\Phi_0} = \rho,$$

где $\Phi_{\text{п}}$ — поляризованная часть падающего светового потока, $\Phi_{\text{чп}}$ — световой поток падающего частично-поляризованного света.

О поляризации преломленного света. Степень поляризации преломленной волны при угле падения, равном углу Брюстера, достигает максимального значения, однако эта волна остается лишь частично-поляризованной.

Так как коэффициент отражения света в данном случае значительно меньше единицы (около 0,15 для границы раздела воздух — стекло), можно использовать преломленный свет, повышая его степень поляризации путем ряда последовательных отражений и преломлений. Это осуществляют с помощью *стопы*, состоящей из нескольких одинаковых и параллельных друг другу пластинок, установленных под углом Брюстера к падающему свету. При достаточно большом числе пластинок проходящий через эту систему свет будет практически полностью линейно-поляризованным. И интенсивность прошедшего через такую стопу света (в отсутствие поглощения) будет равна половине интенсивности падающего на стопу естественного света.

Эта идея нашла высокоэффективное использование в газовых лазерах, где торцы разрядной трубки представляют собой плоскопараллельные стеклянные пластинки, расположенные под углом Брюстера к оси трубки (рис. 84).

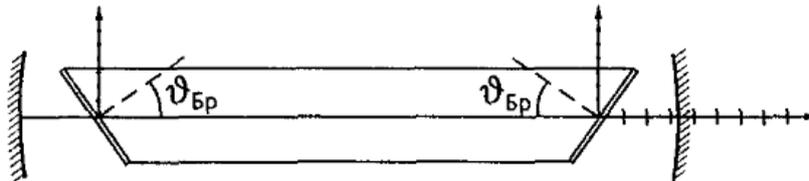


Рис. 84

Поэтому излучение, распространяющееся вдоль оси трубки между зеркалами и поляризованное в плоскости падения на пластинки, многократно проходит сквозь них практически беспрепятственно, не испытывая отражения. В результате из лазера выходит луч, поляризованный в этой плоскости, что и показано на рисунке. Другая составляющая излучения, плоскость поляризации которой перпендикулярна плоскости падения, почти полностью удаляется из пучка благодаря отражениям.

Пример. На поверхность прозрачного диэлектрика с показателем преломления n падает под углом Брюстера линейно-поляризованный свет, плоскость поляризации которого а) перпендикулярна плоскости падения; б) лежит в плоскости падения. Найдем коэффициенты отражения света в обоих случаях. Прежде всего представим себе, как будут выглядеть отраженный и преломленный лучи в этих случаях (рис. 85).

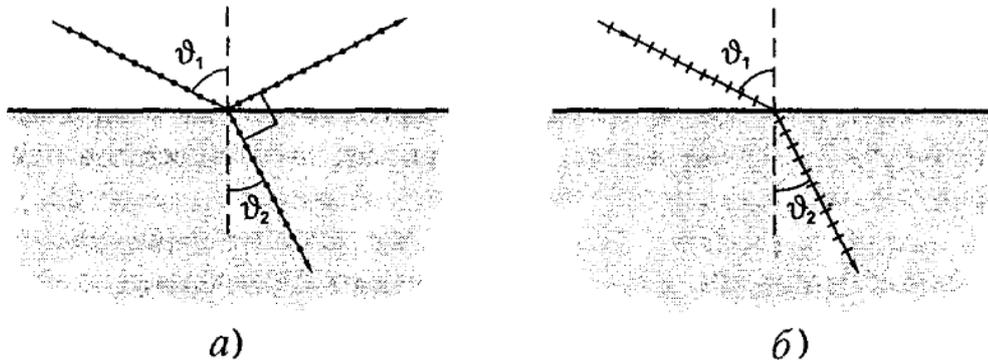


Рис. 85

В случае а) согласно третьей формуле Френеля (0.1.94) коэффициент отражения $\rho_{\perp} = \sin^2(\vartheta_1 - \vartheta_2)$, где ϑ_1 — угол Брюстера, определяемый формулой $\operatorname{tg} \vartheta_1 = n$, а угол ϑ_2 связан с углом ϑ_1 законом преломления: $\sin \vartheta_1 = n \sin \vartheta_2$. Определив ϑ_1 и ϑ_2 , мы найдем и ρ_{\perp} . В случае же б) при падении под углом Брюстера тангенс в знаменателе первой формулы Френеля (0.1.94) обращается в ∞ , поскольку $\vartheta_1 + \vartheta_2 = \frac{\pi}{2}$. Это значит, что в данном случае $\rho_{\parallel} = 0$, т. е. отраженный луч отсутствует (но это только при падении под углом Брюстера).

0.7.3 Поляризация при двойном лучепреломлении

При прохождении света через все прозрачные кристаллы, за исключением принадлежащих к кубической системе, наблюдается явление, заключающееся в том, что упавший на кристалл луч разделяется внутри кристалла на два луча, распространяющихся, вообще говоря, с разными скоростями и в различных направлениях. Это явление, получившее название *двойного лучепреломления*, впервые наблюдалось в 1669 г. Бартолином¹⁴ для исландского шпата (разновидность углекислого кальция (CaCO_3 — кристаллы гексагональной системы)).

Кристаллы, обладающие двойным лучепреломлением, подразделяются на *одноосные* и *двуосные*. У одноосных кристаллов один из преломленных лучей подчиняется обычному закону преломления; в частности, он лежит в одной плоскости с падающим лучом и нормалью к преломляющей поверхности. Этот луч называется *обыкновенным* и обозначается буквой *o*.

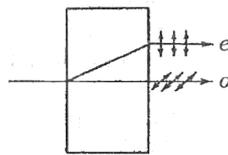


Рис. 86

Для другого луча, называемого *необыкновенным* (его обозначают буквой *e*), отношение синусов угла падения и угла преломления не остается постоянным при изменении угла падения. Даже при нормальном падении света на кристалл необыкновенный луч, вообще говоря, отклоняется от нормали (рис. 86). Кроме того, необыкновенный луч не лежит, как правило, в одной плоскости с падающим лучом и нормалью к преломляющей поверхности. Примерами одноосных кристаллов могут служить исландский шпат, кварц и турмалин. У двуосных кристаллов (слюда, гипс) оба луча необыкновенные — показатели преломления для них зависят от направления в кристалле. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только одноосных кристаллов.

У одноосных кристаллов имеется направление, вдоль которого обыкновенный и необыкновенный лучи распространяются не разделяясь и с одинаковой скоростью¹⁵. Это направ-

¹⁴Эразм Бартолин (1625-1698) — датский физик и математик.

¹⁵У двуосных кристаллов имеется два таких направления.

ление называется *оптической осью* кристалла. Следует иметь в виду, что оптическая ось — это не прямая линия, проходящая через какую-то точку кристалла, а определенное направление в кристалле. Любая прямая, параллельная данному направлению, является оптической осью кристалла. Любая плоскость, проходящая через оптическую ось, называется *главным сечением* или *главной плоскостью* кристалла. Обычно пользуются главным сечением, проходящим через световой луч.

Исследование обыкновенного и необыкновенного лучей показывает, что оба луча полностью поляризованы во взаимно перпендикулярных направлениях (см. рис. 86). Плоскость колебаний обыкновенного луча перпендикулярна к главному сечению кристалла. В необыкновенном луче колебания светового вектора совершаются в плоскости, совпадающей с главным сечением. По выходе из кристалла оба луча отличаются друг от друга только направлением поляризации, так что название «обыкновенный» и «необыкновенный» луч имеют смысл только внутри кристалла.

В некоторых кристаллах один из лучей поглощается сильнее другого. Это явление называется дихроизмом. Очень сильным дихроизмом в видимых лучах обладает кристалл турмалина (минерала сложного состава). В нем обыкновенный луч практически полностью поглощается на длине 1 мм. В кристаллах сульфата йодистого хинина один из лучей поглощается на пути примерно 0,1 мм. Это обстоятельство использовано для изготовления поляризационного устройства, называемого поляроидом. Оно представляет собой целлулоидную пленку, в которую введено большое количество одинаково ориентированных кристалликов сульфата йодистого хинина. Двойное лучепреломление объясняется анизотропией кристаллов. В кристаллах некубической системы диэлектрическая проницаемость ϵ оказывается зависящей от направления. В одноосных кристаллах ϵ в направлении оптической оси и в направлениях, перпендикулярных к ней имеет различные значения ϵ_{\parallel} и ϵ_{\perp} . В других направлениях ϵ имеет промежуточные значения, согласно формуле $n = \sqrt{\epsilon}$. Следовательно, из анизотропии ϵ вытекает, что электромагнитным волнам с различными направлениями колебаний вектора \mathbf{E} соответствуют разные значения показателя преломления n . Поэтому скорость световых волн зависит от направления колебаний светового вектора \mathbf{E} . В обыкновенном луче колебания светового вектора происходят в направлении, перпендикулярном к главному сечению кристалла (на рис. 87 эти колебания изображены точками на соответствующем луче).

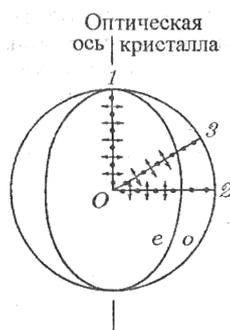


Рис. 87

Поэтому при любом направлении обыкновенного луча (на рисунке указаны три направления: 1, 2 и 3) вектор \mathbf{E} образует с оптической осью кристалла прямой угол, и скорость световой волны будет одна и та же, равная $v_0 = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{\perp}}}$. Изображая скорость обыкновенного луча в виде отрезков, отложенных по разным направлениям, мы получим сферическую поверхность. На рис. 87 показано пересечение этой поверхности с плоскостью чертежа. Такая картина, как на рисунке, наблюдается в любом главном сечении, т. е. в любой плоскости, проходящей через оптическую ось. Представим себе, что в точке O внутри кристалла помещается точечный источник света. Тогда построенная нами сфера будет волновой поверхностью обыкновенных лучей.

Колебания в необыкновенном луче совершаются в главном сечении. Поэтому для раз-

ных лучей направления колебаний вектора \mathbf{E} (на рис. 87 эти направления изображены двусторонними стрелками) образуют с оптической осью разные углы α . Для луча 1 угол α равен $\frac{\pi}{2}$, вследствие чего скорость имеет значение $v_0 = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{\perp}}}$, для луча 2 угол $\alpha = 0$ и скорость равна $v_e = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{\parallel}}}$. Для луча 3 скорость имеет промежуточное значение. Можно доказать, что волновая поверхность необыкновенных лучей представляет собой эллипсоид вращения. В местах пересечения с оптической осью кристалла этот эллипсоид и сфера, построенная для обыкновенных лучей, соприкасаются.

Одноосные кристаллы характеризуют *показателем преломления обыкновенного луча*, равным $n_0 = \frac{c}{v_0}$, и *показателем преломления необыкновенного луча*, перпендикулярного к оптической оси, равным $n_e = \frac{c}{v_e}$. Последнюю величину называют просто *показателем преломления необыкновенного луча*.

В зависимости от того, какая из скоростей, v_0 или v_e , больше, различают *положительные и отрицательные* одноосные кристаллы (рис. 88).

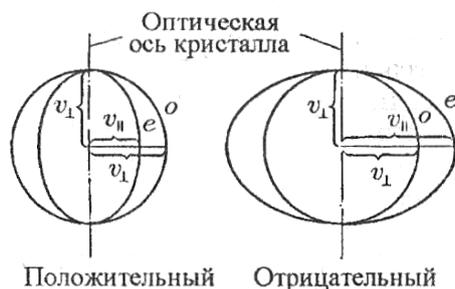


Рис. 88

У положительных кристаллов $v_e < v_0$ (это означает, что $n_e > n_0$). У отрицательных кристаллов $v_e > v_0$ ($n_e < n_0$). Легко запомнить, какие кристаллы называются положительными, а какие отрицательными. У положительных кристаллов эллипсоид скоростей v_e вытянут вдоль оптической оси, ассоциируясь с вертикальным штрихом в знаке «+»; у отрицательных кристаллов эллипсоид скоростей v_e растянут в направлении, перпендикулярном к оптической оси, ассоциируясь со знаком «-».

Ход обыкновенного и необыкновенного лучей в кристалле можно определить с помощью принципа Гюйгенса.

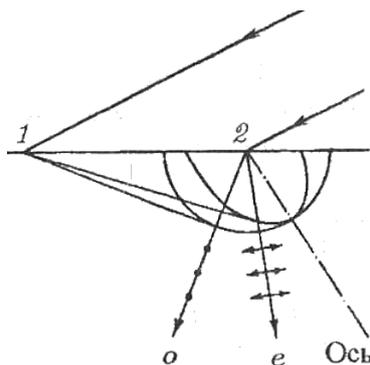


Рис. 89

На рис. 89 построены волновые поверхности обыкновенного и необыкновенного лучей с центром в точке 2, лежащей на поверхности кристалла. Построение выполнено для момента времени, когда волновой фронт падающей волны достигает точки 1. Огибающие всех вторичных волн (волны, центры которых лежат в промежутке между точками 1 и 2, на рисунке не показаны) для обыкновенного и необыкновенного лучей, очевидно, представляют собой плоскости. Преломленный луч, o или e , выходящий из точки 2, проходит через точку касания огибающей с соответствующей волновой поверхностью.

Напомним, что лучами называются линии, вдоль которых распространяется энергия

световой волны (см. §3.1). Из рис. 89 следует, что обыкновенный луч o совпадает с нормалью к соответствующей волновой поверхности. Необыкновенный же луч e заметно отклоняется от нормали к волновой поверхности.

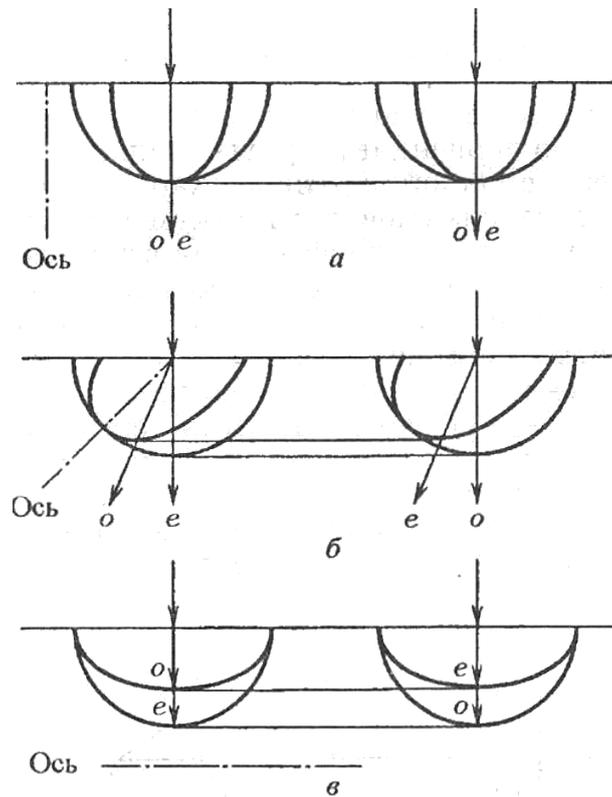


Рис. 90

На рис. 90 изображены три случая нормального падения света на поверхность кристалла, различающиеся направлением оптической оси. В случае рис. 90 а лучи o и e распространяются вдоль оптической оси и поэтому идут не разделяясь. Из рис. 90 б видно, что даже при нормальном падении света на преломляющую поверхность необыкновенный луч может отклониться от нормали к этой поверхности. На рис. 90 в оптическая ось кристалла параллельна преломляющей поверхности. В этом случае при нормальном падении света обыкновенный и необыкновенный лучи идут по одному и тому же направлению, но распространяются с разной скоростью, вследствие чего между ними возникает все возрастающая разность фаз. Характер поляризации обыкновенного и необыкновенного лучей таков же, как для лучей, изображенных на рис. 89.

0.7.4 Интерференция поляризованных лучей

При наложении двух когерентных лучей, поляризованных во взаимно перпендикулярных направлениях, никакой интерференционной картины с характерным для нее чередованием максимумов и минимумов интенсивности получить не может. Интерференция возникает только в том случае, если колебания во взаимодействующих лучах совершаются вдоль одного и того же направления. Колебания в двух лучах, первоначально поляризованных во взаимно перпендикулярных направлениях, можно свести в одну плоскость, пропустив эти лучи через поляризатор, установленный так, чтобы его плоскость не совпадала с плоскостью колебаний ни одного из лучей.

Рассмотрим, что получается при наложении вышедших из кристаллической пластинки обыкновенного и необыкновенного лучей.

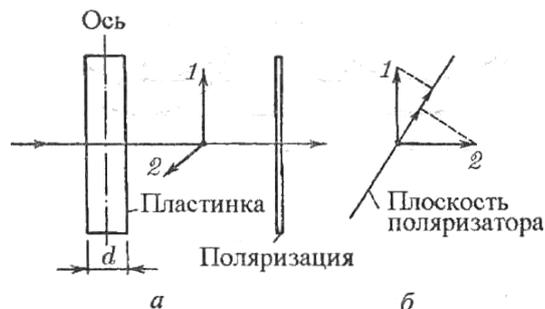


Рис. 91

Пусть пластинка вырезана параллельно оптической оси (рис. 91). При нормальном падении света на пластинку обыкновенный и необыкновенный лучи будут распространяться не разделяясь, но с различной скоростью (см. рис. 90 в). За время прохождения через пластинку между лучами возникнет разность хода

$$\Delta = (n_0 - n_e)d \quad (0.7.217)$$

или разность фаз

$$\delta = \frac{(n_0 - n_e)d}{\lambda_0} \cdot 2\pi \quad (0.7.218)$$

(d — толщина пластинки, λ_0 — длина волны в вакууме).

Таким образом, если пропустить естественный свет через вырезанную параллельно оптической оси кристаллическую пластинку (рис. 91 а), из пластинки выйдут два поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях луча 1 и 2 ¹⁶, между которыми будет существовать разность фаз, определяемая формулой (0.7.218). Поставим на пути этих лучей поляризатор. Колебания обоих лучей после прохождения через поляризатор будут лежать в одной плоскости. Амплитуды их будут равны составляющим амплитуд лучей 1 и 2 в направлении плоскости поляризатора (рис. 91 б).

Вышедшие из поляризатора лучи возникают в результате разделения света, полученного от одного источника. Поэтому они, казалось бы, должны интерферировать. Однако если лучи 1 и 2 возникают за счет прохождения через пластинку естественного света, они не дают интерференции. Это объясняется весьма просто. Хотя обыкновенный и необыкновенный лучи порождены одним и тем же источником света, они содержат в основном колебания, принадлежащие разным цугам волн, испускаемых отдельными атомами. В обыкновенном луче колебания обусловлены преимущественно цугами, плоскости колебаний которых близки к одному направлению в пространстве, в необыкновенном луче — цугами, плоскости колебаний которых близки к другому, перпендикулярному к первому направлению. Поскольку отдельные цуги некогерентны, возникающие из естественного света обыкновенный и необыкновенный лучи, а следовательно, и лучи 1 и 2, также оказываются некогерентными.

Иначе обстоит дело, если на кристаллическую пластинку падает плоскополяризованный свет. В этом случае колебания каждого цуга разделяются между обыкновенным и необыкновенным лучами в одинаковой пропорции (зависящей от ориентации оптической оси пластинки относительно плоскости колебаний в падающем луче). Поэтому лучи o и e , а следовательно, и лучи 1 и 2, оказываются когерентными и будут интерферировать.

¹⁶В кристалле луч 1 был необыкновенным и мог быть обозначен буквой e , луч 2 был обыкновенный (o). По выходе из кристалла эти лучи утратили право называться обыкновенным и необыкновенным.

0.7.5 Прохождение плоскополяризованного света через кристаллическую пластинку

Рассмотрим кристаллическую пластинку, вырезанную параллельно оптической оси. В предыдущем параграфе мы выяснили, что при падении на такую пластинку плоскополяризованного света обыкновенный и необыкновенный лучи оказываются когерентными. На входе в пластинку разность фаз δ этих лучей равна нулю, на выходе из пластинки

$$\delta = \frac{\Delta}{\lambda_0} \cdot 2\pi = \frac{(n_0 - n_e)d}{\lambda_0} \cdot 2\pi \quad (0.7.219)$$

(см. (0.7.217) и (0.7.218); мы предполагаем, что свет падает на пластинку нормально).

Вырезанная параллельно оптической оси пластинка, для которой

$$(n_0 - n_e)d = m\lambda_0 + \frac{\lambda_0}{4}$$

(m — любое целое число либо нуль), называется *пластинкой в четверть волны*. При прохождении через такую пластинку обыкновенный и необыкновенный лучи приобретают разность фаз, равную $\frac{\pi}{2}$ (напомним, что разность фаз определяется с точностью до $2\pi m$). Пластинка, для которой

$$(n_0 - n_e)d = m\lambda_0 + \frac{\lambda_0}{2},$$

называется *пластинкой в полволны*, и т. д.

Рассмотрим прохождение плоскополяризованного света через пластинку в полволны. Колебание \mathbf{E} в падающем луче, совершающееся в плоскости P , возбуждет при входе в кристалл колебание \mathbf{E}_0 обыкновенного луча и колебание \mathbf{E}_e необыкновенного луча (рис. 92).

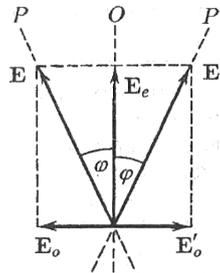


Рис. 92

За время прохождения через пластинку разность фаз между колебаниями \mathbf{E}_0 и \mathbf{E}_e изменяется на π . Поэтому на выходе из пластинки фазовое соотношение между обыкновенным и необыкновенным лучами будет соответствовать взаимному расположению векторов \mathbf{E}_e и \mathbf{E}'_0 (на входе в пластинку оно соответствовало взаимному расположению векторов \mathbf{E}_e и \mathbf{E}_0). Следовательно, свет, вышедший из пластинки, будет поляризован в плоскости P' . Плоскости P и P' расположены симметрично относительно оптической оси пластинки O . Таким образом, пластинка в полволны поворачивает плоскость колебаний прошедшего через нее света на угол 2φ (φ угол между плоскостью колебаний в падающем луче и осью пластинки).

Теперь пропустим плоскополяризованный свет через пластинку в четверть волны (рис. 93).

Если расположить пластинку так, чтобы угол φ между плоскостью колебаний P в падающем луче и осью пластинки O равнялся 45° , амплитуды обоих лучей, вышедших из пластинки, будут одинаковы (предполагается, что дихроизма нет). Сдвиг по фазе между колебаниями в этих лучах составит $\frac{\pi}{2}$. Следовательно, свет, вышедший из пластинки, будет поляризован по кругу. При ином значении угла φ амплитуды вышедших из пластинки

лучей будут неодинаковыми. Поэтому при наложении эти лучи образуют свет, поляризованный по эллипсу, одна из осей которого совпадает с осью пластинки O .

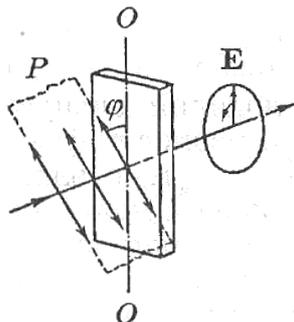


Рис. 93

При пропускании плоскополяризованного света через пластинку в не совпадающее с $m + \frac{1}{4}$ или $m + \frac{1}{2}$ дробное число волн из пластинки выйдут две когерентные, поляризованные во взаимно перпендикулярных плоскостях световые волны, разность фаз которых отличается от $\frac{\pi}{2}$ и от π . Следовательно, при любом отношении амплитуд этих волн, зависящем от угла φ (см. рис. 93), на выходе из пластинки получится эллиптически поляризованный свет, причем ни одна из осей эллипса не будет совпадать с осью пластинки O . Ориентация осей эллипса относительно оси O определяется разностью фаз δ , а также отношением амплитуд, т. е. углом φ между плоскостью колебаний в падающей волне и осью пластинки O .

Отметим, что, независимо от толщины пластинки, при φ , равном нулю или $\frac{\pi}{2}$, в пластинке будет распространяться только один луч (в первом случае необыкновенный, во втором — обыкновенный), так что на выходе из пластинки свет останется плоскополяризованным с плоскостью колебаний, совпадающей с P .

Если на пути эллиптически поляризованного света поставить пластинку в четверть волны, расположив ее оптической осью вдоль одной из осей эллипса, то пластинка внесет дополнительную разность фаз, равную $\frac{\pi}{2}$. В результате разность фаз двух плоскополяризованных волн, дающих в сумме эллиптически поляризованную волну, станет равной нулю или π , так что наложение этих волн даст плоскополяризованную волну. Следовательно, надлежащим образом повернутая пластинка в четверть волны превращает эллиптически поляризованный свет в плоскополяризованный. На этом основывается метод, с помощью которого можно отличить эллиптически поляризованный свет от частично поляризованного или свет, поляризованный по кругу, от естественного. Исследуемый свет пропускается через пластинку в четверть волны и помещенный за ней поляризатор. Если исследуемый луч является эллиптически поляризованным (или поляризованным по кругу), то, вращая пластинку и поляризатор вокруг направления луча, удастся добиться полного затемнения поля зрения. Если же свет является частично поляризованным (или естественным), то ни при каком положении пластинки и поляризатора невозможно получить погашения исследуемого луча.

0.7.6 Кристаллическая пластинка между двумя поляризаторами

Поместим между поляризаторами ¹⁷ P и P' пластинку из одноосного кристалла, вырезанную параллельно оптической оси O (рис. 94). Из поляризатора P выйдет плоскополяризованный свет интенсивности I . Пройдя через пластинку, свет станет в общем случае эллиптически поляризованным. По выходе из поляризатора P' свет снова будет плоскополяризованным.

¹⁷Второй по ходу луча поляризатор P' называют также *анализатором*.

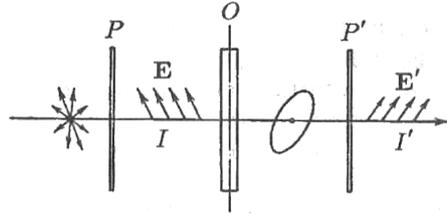


Рис. 94

Его интенсивность I' зависит от взаимной ориентации плоскостей поляризаторов P и P' и оптической оси пластинки, а также от разности фаз δ , приобретаемой обыкновенным и необыкновенным лучами при прохождении через пластинку.

Предположим, что угол φ между плоскостью поляризатора P и осью пластинки O равен $\frac{\pi}{4}$. Рассмотрим два частных случая: поляризаторы параллельны (рис. 95 а) и поляризаторы скрещены (рис. 95 б).

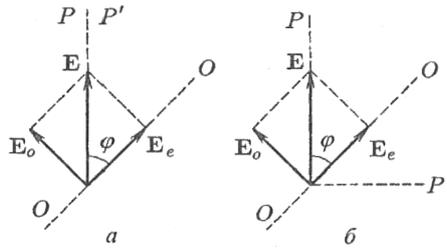


Рис. 95

Световое колебание, вышедшее из поляризатора P , изобразится вектором \mathbf{E} , лежащим в плоскости P . При входе в пластинку колебание \mathbf{E} возбудит два колебания — перпендикулярное к оптической оси колебание \mathbf{E}_0 (обыкновенный луч) и параллельное оси колебание \mathbf{E}_e (необыкновенный луч). Эти колебания будут когерентными; проходя через пластинку, они приобретут разность фаз δ , которая определяется толщиной пластинки и разностью показателей преломления обыкновенного и необыкновенного лучей. Амплитуды этих колебаний одинаковы и равны

$$E_0 = E_e = E \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{E}{\sqrt{2}}, \quad (0.7.220)$$

где E — амплитуда волны, вышедшей из первого поляризатора.

Через второй поляризатор пройдут составляющие колебаний \mathbf{E}_0 и \mathbf{E}_e по направлению плоскости P' . Амплитуды этих составляющих в обоих случаях равны амплитудам (0.7.220), умноженным на $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$, т. е.

$$E'_0 = E'_e = \frac{E}{2}. \quad (0.7.221)$$

В случае параллельных поляризаторов (рис. 95 а) разность фаз волн, вышедших из поляризатора P' , равна δ , т. е. разности фаз, приобретенной при прохождении через пластинку. В случае скрещенных поляризаторов (рис. 95 б) проекции векторов \mathbf{E}_0 и \mathbf{E}_e на направление P' имеют разные знаки. Это означает, что в дополнение к разности фаз δ возникает дополнительная разность фаз, равная π .

Волны, вышедшие из второго поляризатора, будут интерферировать. Амплитуда E_{\parallel} результирующей волны в случае параллельных поляризаторов определяется соотношением

$$E_{\parallel}^2 = E_0'^2 + E_e'^2 + 2E_0'E_e' \cos \delta,$$

а в случае скрещенных поляризаторов — соотношением

$$E_{\perp}^2 = E_0'^2 + E_e'^2 + 2E_0'E_e' \cos(\delta + \pi).$$

Приняв во внимание (0.7.221), можно написать, что

$$E_{\parallel}^2 = \frac{1}{4}E^2 + \frac{1}{4}E^2 + \frac{1}{2}\cos\delta = \frac{1}{2}E^2(1 + \cos\delta) = E^2 \cos^2 \frac{\delta}{2},$$

$$E_{\perp}^2 = \frac{1}{4}E^2 + \frac{1}{4}E^2 + \frac{1}{2}E^2 \cos(\delta + \pi) = \frac{1}{2}E^2(1 - \cos\delta) = E^2 \sin^2 \frac{\delta}{2}.$$

Интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды. Следовательно,

$$I'_{\parallel} = I \cos^2 \frac{\delta}{2}, \quad I'_{\perp} = I \sin^2 \frac{\delta}{2}. \quad (0.7.222)$$

Здесь I'_{\parallel} — интенсивность света, вышедшего из второго поляризатора в случае, когда поляризаторы параллельны, I'_{\perp} — та же интенсивность в случае, когда поляризаторы скрещены, I — интенсивность света, прошедшего через первый поляризатор.

Из формул (0.7.222) следует, что интенсивности I'_{\parallel} и I'_{\perp} оказываются «дополнительными» — в сумме они дают интенсивность I . В частности, при

$$\delta = 2m\pi \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (0.7.223)$$

интенсивность I'_{\parallel} будет равна I , а интенсивность I'_{\perp} обращается в нуль. При значениях же

$$\delta = (2m + 1)\pi \quad (m = 0, 1, \dots) \quad (0.7.224)$$

интенсивность I'_{\parallel} становится равной нулю, а интенсивность I'_{\perp} достигает значения I .

Разность показателей преломления $n_o - n_e$ зависит от длины волны света λ_0 . Кроме того, λ_0 входит непосредственно в выражение (0.7.219) для δ . Пусть свет, падающий на поляризатор P , состоит из излучения двух длин волн λ_1 и λ_2 , таких, что δ для λ_1 удовлетворяет условию (0.7.223), а для λ_2 — условию (0.7.224). В этом случае при параллельных поляризаторах через систему, изображенную на рис. 94, пройдет беспрепятственно свет с длиной волны λ_1 и полностью будет задержан свет с длиной волны λ_2 . При скрещенных поляризаторах пройдет беспрепятственно свет с длиной волны λ_2 и полностью будет задержан свет с длиной волны λ_1 . Следовательно, при одном расположении поляризаторов окраска прошедшего через систему света будет соответствовать длине волны λ_1 , при другом расположении — длине волны λ_2 . Такие две окраски называются *дополнительными*. При вращении одного из поляризаторов окраска непрерывно меняется, переходя за каждую четверть оборота от одного дополнительного цвета к другому. Смена окраски наблюдается и при φ , отличном от $\frac{\pi}{4}$ (но не равном нулю или $\frac{\pi}{2}$), только цвета оказываются менее насыщенными.

Разность фаз δ зависит от толщины пластинки. Поэтому, если двоякопреломляющая прозрачная пластинка, помещенная между поляризаторами, имеет в разных местах неодинаковую толщину, эти места при наблюдении со стороны поляризатора P' будут представляться окрашенными в различные цвета. При вращении поляризатора P' эти цвета изменяются, причем каждый из них переходит в дополнительный цвет. Поясним это следующим примером. На рис. 96 а изображена помещенная между поляризаторами пластинка, у которой нижняя половина толще верхней. Пусть свет, проходящий через пластину, содержит излучение только двух длин волн: λ_1 и λ_2 . На рис. 96 б дан «вид» со стороны поляризатора P' . По выходе из кристаллической пластинки каждая из составляющих излучения будет, вообще говоря, поляризована по эллипсу. Ориентация и эксцентриситет эллипсов для длин волн λ_1 и λ_2 , а также для разных половин пластинки будут различны.

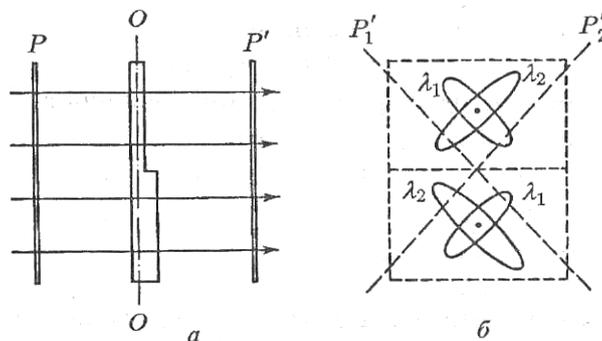


Рис. 96

При установке плоскости поляризатора P' в положение P'_1 в излучении, прошедшем через P' , будет преобладать в верхней половине пластинки длина волны λ_1 , в нижней половине — λ_2 . Поэтому обе половины будут иметь разную окраску. При установке поляризатора P' в положение P'_2 окраска верхней половины будет определяться излучением с длиной волны λ_2 , нижней половины — излучением с длиной волны λ_1 . Таким образом, при повороте поляризатора P' на 90° обе половины пластинки как бы обмениваются окраской. Разумеется, так будет обстоять дело лишь при определенном соотношении толщин обеих частей пластинки.

0.7.7 Искусственное двойное лучепреломление

В прозрачных аморфных телах, а также в кристаллах кубической системы может возникать двойное лучепреломление под влиянием внешних воздействий. В частности, это происходит при механических деформациях тел. Мерой возникающей оптической анизотропии служит разность показателей преломления обыкновенного и необыкновенного лучей. Опыт показывает, что эта разность пропорциональна напряжению σ в данной точке тела (т. е. силе, приходящейся на единицу площади; см. И.В. Савельев. §2.9 кн. 1):

$$n_o - n_e = k\sigma \quad (0.7.225)$$

(k — коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств вещества).

Поместим стеклянную пластинку Q между скрещенными поляризаторами P и P' (рис. 97).

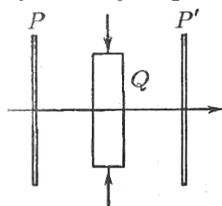


Рис. 97

Пока стекло не деформировано, такая система света не пропускает. Если же пластинку подвергнуть сжатию, свет через систему наминает проходить, причем наблюдаемая в прошедших лучах картина оказывается испещренной цветными полосами. Каждая такая полоса соответствует одинаково деформированным местам пластинки. Следовательно, по расположению полос можно судить о распределении напряжений внутри пластинки. На этом основывается оптический метод исследования напряжений. Изготовленная из прозрачного изотропного материала (например, из плексигласа) модель какой-либо детали или конструкции помещается между скрещенными поляризаторами. Модель подвергается действию нагрузок, подобных тем, какие будет испытывать само изделие. Наблюдаемая при этом в проходящем белом свете картина позволяет определить распределение напряжений, а также судить об их величине.

Возникновение двойного лучепреломления в жидкости и в аморфных твердых телах

под воздействием электрического поля было обнаружено Керром¹⁸ в 1875 г. Это явление получило название *эффекта Керра*. В 1930 г. этот эффект был наблюден также и в газах.

Схема установки для исследования эффекта Керра в жидкостях показана на рис. 98.

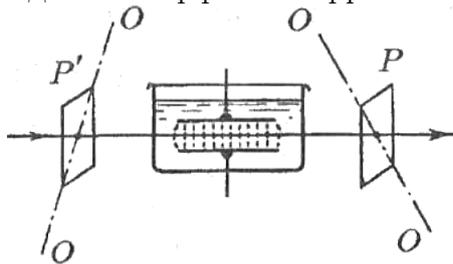


Рис. 98

Установка состоит из *ячейки Керра*, помещенной между скрещенными поляризаторами P и P' . Ячейка Керра представляет собой герметический сосуд с жидкостью, в которую введены пластины конденсатора. При подаче на пластины напряжения между ними возникает практически однородное электрическое поле. Под его действием жидкость приобретает свойства одноосного кристалла с оптической осью, ориентированной вдоль поля.

Возникающая разность показателей преломления n_0 и n_e пропорциональна квадрату напряженности поля E :

$$n_0 - n_e = kE^2. \quad (0.7.226)$$

На пути ℓ между обыкновенным и необыкновенным лучами возникает разность хода

$$\Delta = (n_0 - n_e)\ell = k\ell E^2$$

или разность фаз

$$\delta = \frac{\Delta}{\lambda_0} \cdot 2\pi = 2\pi \frac{k}{\lambda_0} \ell E^2.$$

Это выражение принято записывать в виде

$$\delta = 2\pi B\ell E^2, \quad (0.7.227)$$

где B — характерная для вещества величина, называемая *постоянной Керра*.

Из известных жидкостей наибольшей постоянной Керра обладает нитробензол ($C_6H_5NO_2$). Постоянная Керра зависит от температуры вещества и от длины волны света.

Эффект Керра объясняется различной поляризуемостью молекул по разным направлениям. В отсутствие поля молекулы ориентированы хаотическим образом, поэтому жидкость в целом не обнаруживает анизотропии. Под действием поля молекулы поворачиваются так, чтобы в направлении поля были ориентированы либо их дипольные электрические моменты (у полярных молекул), либо направления наибольшей поляризуемости (у неполярных молекул). В результате жидкость становится оптически анизотропной. Ориентирующему действию поля противится тепловое движение молекул. Этим обуславливается уменьшение постоянной Керра с повышением температуры.

Время, в течение которого устанавливается (при включении поля) или исчезает (при выключении поля) преимущественная ориентация молекул, составляет около 10^{-10} с. Поэтому ячейка Керра, помещенная между скрещенными поляризаторами, может служить практически безынерционным световым затвором. В отсутствие напряжения на пластинах конденсатора затвор будет закрыт. При включении напряжения затвор пропускает значительную часть света, падающего на первый поляризатор.

¹⁸ Джон Керр (1824-1907) — шотландский физик.

0.7.8 Вращение плоскости поляризации

Естественное вращение. Некоторые вещества, называемые *оптически активными*, обладают способностью вызывать вращение плоскости поляризации проходящего через них плоскополяризованного света. К числу таких веществ принадлежат кристаллические тела (например, кварц, киноварь), чистые жидкости (скипидар, никотин) и растворы оптически активных веществ в неактивных растворителях (водные растворы сахара, винной кислоты и др.).

Кристаллические вещества сильнее всего вращают плоскость поляризации в случае, когда свет распространяется вдоль оптической оси кристалла. Угол поворота φ пропорционален пути ℓ , пройденному лучом в кристалле:

$$\varphi = \alpha \ell. \quad (0.7.228)$$

Коэффициент α называют *постоянной вращения*. Эта постоянная зависит от длины волны (дисперсия вращательной способности).

В растворах угол поворота плоскости поляризации пропорционален пути света в растворе ℓ и концентрации активного вещества c :

$$\varphi = [\alpha] c \ell. \quad (0.7.229)$$

Здесь $[\alpha]$ —величина, называемая *удельной постоянной вращения*.

В зависимости от направления вращения плоскости поляризации оптически активные вещества подразделяются на *право-* и *лево-вращающие*. Направление вращения (относительно луча) не зависит от направления луча. Поэтому, если луч, прошедший через оптически активный кристалл вдоль оптической оси, отразить зеркалом и заставить пройти через кристалл еще раз в обратном направлении, то восстанавливается первоначальное положение плоскости поляризации.

Все оптически активные вещества существуют в двух разновидностях — правовращающей и левовращающей. Существуют право- и левовращающий кварц, право- и левовращающий сахар и т. д. Молекулы или кристаллы одной разновидности являются зеркальным отражением молекул или кристаллов другой разновидности (рис. 99).

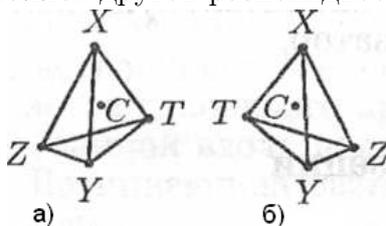


Рис. 99

Буквами C , X , Y , Z и T обозначены отличающиеся друг от друга атомы или группировки атомов (радикалы). Молекула $б$ является зеркальным отражением молекулы $а$. Если смотреть на тетраэдр, изображенный на рис. 99, вдоль направления CX , то при обходе по часовой стрелке будет иметь место чередование $ZYTZ$ для молекулы $а$ и $ZTYZ$ для молекулы $б$. То же самое наблюдается для любого из направлений CY , CZ и CT . Чередование радикалов X, Y, Z, T в молекуле $б$ противоположно их чередованию в молекуле $а$. Поэтому если, например, вещество, образованное молекулами $а$, правовращающее, то вещество, образованное молекулами $б$, будет левовращающим.

Если между двумя скрещенными поляризаторами поместить оптически активное вещество (кристалл кварца, прозрачную кювету с раствором сахара и т. п.), то поле зрения просветляется. Чтобы снова получить темноту, нужно повернуть один из поляризаторов на угол φ , определяемый выражением (0.7.228) или (0.7.229). В случае раствора, зная

удельную постоянную вращения $[\alpha]$ данного вещества и длину ℓ , можно, измерив угол поворота φ , определить по формуле (0.7.229) концентрацию раствора c . Такой способ определения концентрации применяется в производстве различных веществ, в частности в сахароварении (соответствующий прибор называется сахариметром).

Магнитное вращение плоскости поляризации. Оптически неактивные вещества приобретают способность вращать плоскость поляризации под действием магнитного поля. Это явление было обнаружено Фарадеем и поэтому называется иногда *эффектом Фарадея*. Оно наблюдается только при распространении света вдоль направления намагничённости. Поэтому для наблюдения эффекта Фарадея в полюсных наконечниках электромагнита просверливают отверстия, через которые пропускается световой луч. Исследуемое вещество помещается между полюсами электромагнита.

Угол поворота плоскости поляризации φ пропорционален пути ℓ , проходимому светом в веществе, и намагничённости вещества. Намагничённость в свою очередь пропорциональна напряжённости магнитного поля H (в соответствии с формулой $\mathbf{J} = \chi\mathbf{H}$, см. И.В. Савельев “Курс общей физики” кн. 2). Поэтому можно написать, что

$$\varphi = V\ell H. \quad (0.7.230)$$

Коэффициент V называется *постоянной Верде* или *удельным магнитным вращением*. Постоянная V , как и постоянная вращения α , зависит от длины волны.

Направление вращения определяется направлением магнитного поля. От направления луча знак вращения не зависит. Поэтому если, отразив луч зеркалом, заставить его пройти через намагничённое вещество еще раз и обратном направлении, поворот плоскости поляризации удвоится.

Магнитное вращение плоскости поляризации обусловлено возникающей под действием магнитного поля прецессией электронных орбит (см. И.В. Савельев “Курс общей физики”, §7.7 кн. 2).

Оптически активные вещества под действием магнитного поля приобретают дополнительную способность вращать плоскость поляризации, которая складывается с их естественной способностью.

0.8 Взаимодействие света с веществом

0.8.1 Дисперсия света

Дисперсия света — это явления, обусловленные зависимостью показателя преломления вещества от длины волны (или частоты):

$$n = f(\lambda), \quad (0.8.231)$$

где λ — длина волны света в вакууме.

Производную $\frac{dn}{d\lambda}$, называют *дисперсией вещества*. Для прозрачных бесцветных веществ график зависимости $n(\lambda)$ в видимой части спектра имеет вид, показанный на рис. 100.

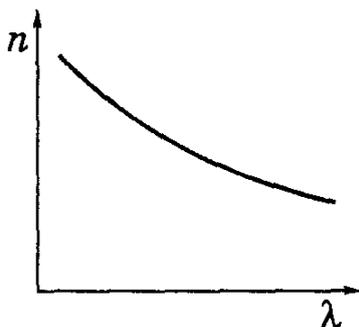


Рис. 100

Интервал длин волн, в котором $\frac{dn}{d\lambda} < 0$ (как на рисунке), соответствует **нормальной дисперсии**. Те же интервалы длин волн, где дисперсия вещества $\frac{dn}{d\lambda} > 0$, соответствуют **аномальной дисперсии**. На рис. 101 показан график зависимости $n(\lambda)$ с участками нормальной и аномальной дисперсии. Заметим, что область аномальной дисперсии совпадает с полосой поглощения $\kappa(\lambda)$.

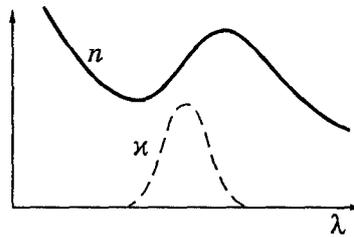


Рис. 101

Все вещества в той или иной степени являются диспергирующими. Вакуум, как показали тщательные исследования, дисперсией не обладает.

Аналитический вид зависимости $n(\lambda)$ в области нормальной дисперсии для не слишком больших интервалов длин волн может быть представлен приближенной формулой

$$n = a + \frac{b}{\lambda^2}, \quad (0.8.232)$$

где a и b положительные постоянные, значения которых для каждого вещества определяются из опыта.

Пример. На рис. 100 и 101 изображены графики зависимости показателя преломления вещества от длины волны $n(\lambda)$. Изобразим соответствующие графики зависимостей $n(\omega)$, где ω — циклическая частота света.

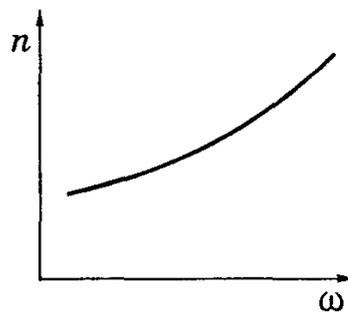


Рис. 102

Поскольку $\omega \sim \frac{1}{\lambda}$, легко проверить, что графики $n(\omega)$, соответствующие указанным рисункам, таковы, как показано на рис. 102 и 103. Причем, в случае графика, приведенного на рис. 102, закон дисперсии в соответствии с формулой (0.8.232) принимает вид

$$n = a + b'\omega^2, \quad \text{где постоянная} \quad b' = \frac{b}{(2\pi c)^2}.$$

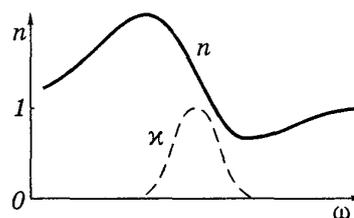


Рис. 103

0.8.2 Классическая теория дисперсии

Дисперсию света можно объяснить на основе электромагнитной теории и электронной теории вещества. Строго говоря, движение (точнее — поведение) электронов в атоме подчиняется законам квантовой физики. Однако для качественного понимания дисперсии света достаточно ограничиться классическими представлениями, которые, как это ни удивительно, приводят к тем же результатам, что и квантовая теория.

Итак, поставим перед собой задачу объяснить ход зависимости $n(\omega)$. Мы знаем, что в изотропной немагнитной среде $n = \sqrt{\varepsilon}$. В свою очередь ε можно найти из соотношения $\varepsilon = 1 + \kappa$, где κ — диэлектрическая восприимчивость, которая является коэффициентом в соотношении $\mathbf{P} = \kappa\varepsilon_0\mathbf{E}$, \mathbf{P} — поляризованность, т. е. дипольный момент единицы объема. Таким образом,

$$\varepsilon = 1 + \frac{P_x(t)}{\varepsilon_0 E_x(t)}. \quad (0.8.233)$$

где P_x — проекция вектора \mathbf{P} на ось X , вдоль которой совершаются колебания вектора \mathbf{E} .

Известно, что $P_x = n_0 p_x$, где n_0 — концентрация диполей, p_x — проекция дипольного момента отдельного диполя. В дальнейшем мы будем рассматривать простейшую модель вещества, состоящего из не взаимодействующих друг с другом атомов. Каждый атом представляет собой ядро, окруженное быстро движущимися электронами, которые в совокупности как бы «размазаны» по сферической симметричной области вокруг ядра. Поэтому принято говорить, что ядро с зарядом q окружено «электронным облаком» с зарядом $-q$.

В отсутствие внешнего поля \mathbf{E} центр электронного облака совпадает с ядром, и дипольный момент атома равен нулю. При наличии же внешнего поля \mathbf{E} электронное облако смещается относительно практически неподвижного ядра, и возникает дипольный момент $\mathbf{p} = q\boldsymbol{\ell}$, где $q > 0$, а $\boldsymbol{\ell}$ — вектор, проведенный из центра «облака» к ядру. Проекция вектора \mathbf{p} на ось X равна

$$p_x = q\ell_x = q(-x) = -qx, \quad (0.8.234)$$

здесь x — смещение центра «облака» из положения равновесия, т. е. относительно ядра. Заметим, что центр «облака» ведет себя как точечный заряд $-q$.

С учетом (0.8.234) выражение (0.8.233) можно представить так:

$$\varepsilon = 1 + \frac{n_0(-qx)}{\varepsilon_0 E_x}. \quad (0.8.235)$$

Как видно, задача сводится к определению $x(t)$ под действием $E_x(t)$.

Для этого запишем уравнение движения электронного облака как

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + qE_m \cos \omega t, \quad (0.8.236)$$

где m — масса электронного облака, а справа записаны проекции на ось X квазиупругой силы, силы «сопротивления», обусловленной чем-то вроде «трения» облака о ядро, и вынуждающей силы со стороны гармонической электромагнитной волны частоты ω . Магнитной составляющей этой силы мы пренебрегаем, поскольку в нерелятивистском случае она ничтожно мала. Разделив уравнение (0.8.236) на m , приведем его к виду

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_m \cos \omega t, \quad (0.8.237)$$

где $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $2\beta = \frac{r}{m}$, $f_m = \frac{qE_m}{m}$.

Для теории дисперсии имеет значение не общее, а только частное (установившееся) решение уравнения (0.8.237):

$$x = a \cos(\omega t - \varphi), \quad (0.8.238)$$

где a — амплитуда колебаний, φ — разность фаз между смещением x и «силой» $f_m \cos \omega t$. Подстановка этого решения в уравнение (0.8.237) позволяет с помощью векторной диаграммы найти значения амплитуды a и разности фаз φ , а именно

$$a = \frac{f_m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (0.8.239)$$

(решение уравнения (0.8.237) подробно рассматривается в теории колебаний).

Ограничимся простейшим случаем, когда $2\beta\omega \ll (\omega_0^2 - \omega^2)$, т. е. когда вынуждающая частота (поля) не очень близка к собственной частоте ω_0 колебаний электронного облака и коэффициент β , характеризующий затухание, достаточно мал. В этом случае, если $\omega < \omega_0$, то

$$x(t) = \frac{f_m}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t. \quad (0.8.240)$$

Такой же результат будет и при $\omega > \omega_0$, когда $\varphi = \pi$.

Остается подставить (0.8.240) в (0.8.235) и учесть, что вынуждающая сила в (0.8.237) $qE_m \cos \omega t = -qE_x$. В результате получим:

$$\varepsilon = 1 + \frac{b}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (0.8.241)$$

где $b = \frac{n_0 q^2}{\varepsilon_0 m} = \frac{N_0 e^2}{\varepsilon_0 m_e}$, N_0 — концентрация электронов (здесь учтено, что $q = Ze$, $m = Zm_e$ и $N_0 = Zn_0$, Z — число электронов в атоме).

Разрыв функции $\varepsilon(\omega)$ при $\omega = \omega_0$ и обращение ее в $\pm\infty$ не имеют физического смысла, это получилось вследствие игнорирования затухания ($\beta \rightarrow 0$). Если же его учесть, то ход кривой будет иным (рис. 104) и достаточно хорошо подтверждается экспериментально (сравните с рис. 103). Зависимость $\kappa(\omega)$ характеризует полосу поглощения. Как раз с ней совпадает область аномальной дисперсии ($\frac{dn}{d\omega} < 0$).

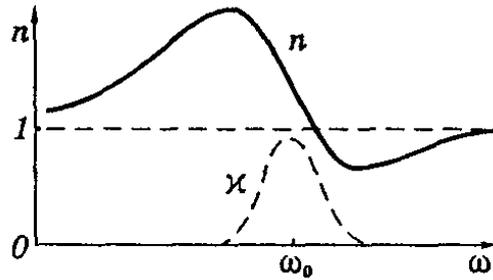


Рис. 104

Заметим, что собственных частот ω_{0i} может быть несколько в атоме, соответственно будет и несколько областей аномальной дисперсии. Кроме того, как видно из рис. 104, при $\omega > \omega_0$ показатель преломления ($n = \sqrt{\varepsilon}$) будет меньше единицы, а это значит, что фазовая скорость электромагнитной волны $v = \frac{c}{n}$ оказывается больше c ! Подобное имеет место в плазме, где $\omega_0 = 0$ (электроны свободные), и для рентгеновского излучения ($\omega \gg \omega_0$). Никакого противоречия с теорией относительности здесь нет. Последняя утверждает, что скорость сигнала (импульса) не может превышать c . Понятие же показателя преломления применимо к монохроматическим электромагнитным волнам, бесконечным в пространстве и во времени. Такие волны не могут служить для передачи сигнала, а кроме того, их в принципе невозможно осуществить.

Из выражения (0.8.241) вытекает и еще одно неожиданное следствие для случая, когда $\omega_0 = 0$ (например, в той же плазме). При этом условии, когда частота электромагнитной

волны $\omega \leq \sqrt{b}$, оказывается, что диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(\omega) \leq 0$, а следовательно, показатель преломления для таких частот ($n = \sqrt{\varepsilon}$) становится *мнимым*, и его можно представить как $n = ik$. Выясним, что это означает.

Запишем уравнение электромагнитной волны в комплексной форме:

$$\hat{E} = E_0 e^{i(kx - \omega t)},$$

где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, λ — длина волны в среде. Если длина волны в вакууме λ_0 , то $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$, и

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_0} n = ik_0 \kappa,$$

где $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$. Подставив это выражение для k в исходное уравнение волны $\hat{E}(x, t)$, получим:

$$\hat{E} = E_0 e^{-\kappa k_0 x} e^{-i\omega t},$$

или для действительной части

$$E = E_0 e^{-\kappa k_0 x} \cos \omega t.$$

Видно, что в рассматриваемом случае мы имеем стоячую волну, амплитуда которой экспоненциально затухает¹⁹. Фактически это означает, что излучение при $\varepsilon < 0$ не может пройти через плазму и происходит полное отражение его в пограничном слое. На этом, кстати, основан метод определения концентрации электронов в плазме.

Пример. При зондировании разреженной плазмы радиоволнами различных частот обнаружили, что радиоволны с частотами, меньшими, чем $\nu_0 = 400$ МГц не проходят через плазму. Найдем концентрацию свободных электронов в этой плазме. Радиоволны не проходят через плазму, а отражаются от нее, как мы выяснили, при мнимом показателе преломления, т. е. при значении диэлектрической проницаемости $\varepsilon \ll 0$. Имея в виду (0.8.241) и учитывая, что для свободных электронов $\omega_0 = 0$, получим:

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{N_0 e^2}{\varepsilon_0 m_e \omega^2} \leq 0.$$

Отсюда находим искомую концентрацию свободных электронов:

$$N_0 = \frac{\varepsilon_0 m_e \omega^2}{e^2} = \frac{4\pi^2 \varepsilon_0 m_e \nu^2}{e^2} = 2,0 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3}.$$

0.8.3 Групповая скорость

Волновой пакет. Строго монохроматическая волна — это идеализация. Таких волн в природе нет. Любая реальная волна, согласно теореме Фурье, может быть представлена как суперпозиция монохроматических волн с различными амплитудами и частотами ω в некотором интервале $\Delta\omega$. Суперпозицию волн, мало отличающихся друг от друга по частотам ($\Delta\omega \ll \omega$), называют *волновым пакетом* или *группой волн*. Вид волнового пакета в некоторый момент времени показан на рис. 105.

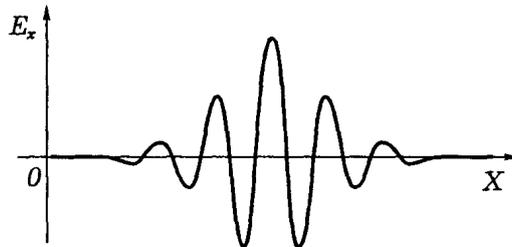


Рис. 105

¹⁹В общем случае вводят *комплексный показатель преломления* $\hat{n} = n + ik$, где n определяет *фазовую скорость* волны $v = \frac{c}{n}$, а мнимую часть k называют *показателем затухания*. Он характеризует затухание волны по мере ее распространения. Затухание не обязательно связано с поглощением электромагнитной волны, примером тому служит разобранный пример.

В его пределах монохроматические составляющие усиливают друг друга, вне пакета практически гасят друг друга.

В вакууме все монохроматические волны, образующие пакет, распространяются, как уже было сказано выше, с одинаковой фазовой скоростью

$$v = \frac{\omega}{k}, \quad (0.8.242)$$

где k — волновое число $\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)$. С такой же скоростью распространяется в вакууме и сам волновой пакет, не изменяя своей формы.

Групповая скорость. В диспергирующей же среде волновой пакет расплывается, поскольку скорости его монохроматических составляющих отличаются друг от друга, и понятие скорости такой волны требует уточнения.

Если дисперсия достаточно мала, расплывание волнового пакета происходит не слишком быстро. В этом случае волновому пакету можно приписать скорость u , с которой перемещается его «центр тяжести». Это так называемая групповая скорость. Соответствующий расчет дает, что групповая скорость определяется как

$$u = \frac{d\omega}{dk}. \quad (0.8.243)$$

Поясним эту формулу на примере суперпозиции двух волн с одинаковой амплитудой и несколько отличными друг от друга длинами волн (и частотами).

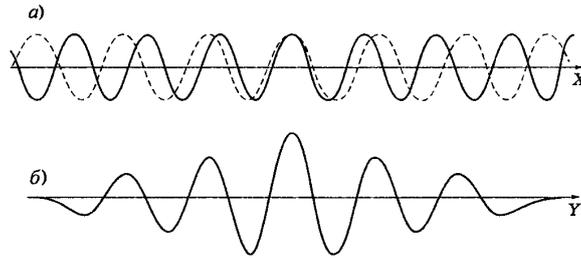


Рис. 106

На рис. 106 *a* показано их относительное расположение в некоторый момент времени, а на рис. 106 *б* — результат их суперпозиции. Нас будет интересовать скорость, с которой перемещается место с максимальной амплитудой — это и будет скорость волнового пакета — групповая скорость. Определим ее величину.

Пусть уравнения этих двух монохроматических волн имеют вид:

$$E_1 = A \cos(\omega t - kx), \quad E_2 = A \cos[(\omega + d\omega)t - (k + dk)x].$$

В результате их наложения образуется суммарная волна

$$E = E_1 + E_2 = 2A \cos \frac{td\omega - xdk}{2} \cos(\omega t - kx). \quad (0.8.244)$$

Это выражение можно рассматривать как уравнение монохроматической волны, амплитуда которой меняется по закону

$$A_0 = \left| 2A \cos \frac{td\omega - xdk}{2} \right|.$$

Отсюда следует, что точки, соответствующие, например, максимуму амплитуды, движутся по закону

$$td\omega - xdk = 0,$$

откуда $x = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)t$. Величина в скобках и есть групповая скорость (0.8.243).

Выражение для групповой скорости можно представить в ином виде. Заменяв ω через vk согласно (0.8.242), получим:

$$u = \frac{d}{dk}(vk) = v + k \frac{dv}{dk}. \quad (0.8.245)$$

Так как $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ и $dk = -\left(\frac{2\pi}{\lambda^2}\right)d\lambda$, то выражение (0.8.245) можно переписать так:

$$\boxed{u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}} \quad (0.8.246)$$

Это так называемая формула Рэлея. В области нормальной дисперсии ($\frac{dv}{d\lambda} > 0$) групповая скорость u оказывается меньше фазовой скорости v . В отсутствие дисперсии $\frac{dv}{d\lambda} = 0$, и групповая скорость совпадает с фазовой (об этом уже говорилось).

Существует простой графический способ нахождения групповой скорости по кривой $v(\lambda)$. Он показан на рис. 107.

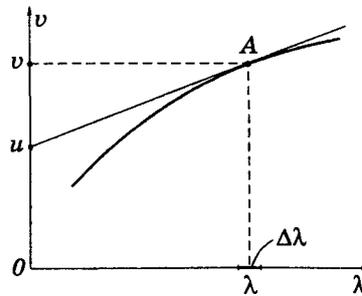


Рис. 107

В случае группы волн роль играет только малый участок кривой $v(\lambda)$ в узком диапазоне $\Delta\lambda$ ($\Delta\lambda \ll \lambda$). Отрезок, который отсекает на оси ординат касательная к кривой $v(\lambda)$, проведенная через точку A , равен $v - \lambda \left(\frac{dv}{d\lambda}\right)$, т. е. групповой скорости при данной длине волны λ .

Пример. Найдем выражение для групповой скорости в среде с известной зависимостью показателя преломления от частоты электромагнитной волны, $n(\omega)$.

Будем исходить из определения групповой скорости — формулы (0.8.243). Принимая во внимание, что фазовая скорость $v = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n}$, получим

$$k = \frac{\omega n}{c}.$$

Теперь возьмем производную $\frac{dk}{d\omega}$:

$$\frac{dk}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\omega n}{c}\right) = \frac{1}{c} \left(n + \omega \frac{dn}{d\omega}\right).$$

Подстановка обратного значения этой величины, т. е. $\frac{d\omega}{dk}$, в (0.8.243) приводит к искомому результату:

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{n + \omega \left(\frac{dn}{d\omega}\right)}.$$

В некоторых случаях групповая скорость, вычисленная по приведенным выше формулам, оказывается больше c — скорости света в вакууме. Так будет, например, в области

аномальной дисперсии. Это не противоречит теории относительности, ибо групповая скорость выражает скорость сигнала лишь тогда, когда волновой импульс в процессе распространения практически не изменяет своей формы. В области же аномальной дисперсии импульс сильно деформируется, и групповая скорость в таких условиях утрачивает определенное физическое содержание.

Групповая скорость и перенос энергии. Рассмотрим вопрос о скорости распространения энергии, переносимой электромагнитной волной. Прежде всего заметим, что фазовая скорость монохроматической волны не имеет ничего общего со скоростью переноса энергии. Фазовая скорость устанавливает только связь между фазами колебаний в различных точках пространства.

Строго монохроматическая волна не может служить для передачи сигнала, поскольку она не имеет ни начала, ни конца во времени и пространстве. Поэтому распространение сигнала связано с перемещением *изменений* амплитуды. И в тех случаях, когда групповая скорость имеет смысл (т. е. электромагнитный импульс распространяется не расплываясь), она совпадает со скоростью переноса энергии.

Итак, в области, далекой от области сильного поглощения, скорость переноса энергии в группе волн совпадает с групповой скоростью.

Прямые измерения скорости света сводятся к измерению расстояния, проходимого световым сигналом (импульсом) за определенный промежуток времени. Этот метод практически дает групповую скорость. То же самое, как показывает подробный анализ, относится ко всем известным косвенным методам измерения скорости света. Фазовую же скорость (точнее, отношение фазовых скоростей в двух различных средах) можно определить по отношению показателей преломления, или воспользовавшись законом преломления.

0.8.4 Поглощение света

Закон Бугера. Прохождение световой волны через вещество сопровождается потерей энергии этой волны, затрачиваемой на возбуждение колебаний электронов (точнее, на изменение их состояния в атоме). Частично эта энергия возвращается излучению в виде вторичных волн, порождаемых колеблющимися электронами; частично же она переходит в другие формы энергии (во внутреннюю энергию вещества).

Поэтому интенсивность света при прохождении через обычное вещество уменьшается — свет поглощается в веществе. Поглощение света можно описать с энергетической точки зрения, не вникая в механизм взаимодействия света с атомами вещества, чем мы и воспользуемся.

Пусть через однородное вещество распространяется параллельный световой пучок. Выделим мысленно в этом веществе бесконечно тонкий плоский слой толщины dx (рис. 108).

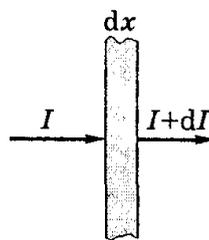


Рис. 108

При прохождении этого слоя интенсивность света уменьшится так, что ее убыль можно представить как $-dI$. Ясно, что эта величина будет пропорциональна интенсивности в данном поглощающем слое и его толщине dx , т. е.

$$-dI = \kappa I dx, \quad (0.8.247)$$

где κ — коэффициент поглощения, он характеризует поглощающие свойства вещества. Разделив переменные, получим: $-\frac{dI}{I} = \kappa dx$.

После интегрирования в пределах от I_0 до I и от 0 до x найдем: $\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = -\kappa x$, откуда

$$\boxed{I = I_0 e^{-\kappa x}}. \quad (0.8.248)$$

Это и есть **закон Бугера**. Таким образом, интенсивность света при прохождении однородного вещества уменьшается по экспоненциальному закону.

Заметим, что в случае точечного источника света, находящегося в однородной поглощающей среде, предыдущие рассуждения следует повторить, но только не для интенсивности I , а для светового потока Φ . И в качестве исходного бесконечно тонкого слоя теперь следует выбрать сферический слой с радиусами от r до $r + dr$. В результате приходим к аналогичному (0.8.248) закону:

$$\Phi = \Phi_0 e^{-\kappa r},$$

где Φ_0 — световая мощность источника (или его световой поток при $r \rightarrow 0$).

О коэффициентах поглощения. Для всех веществ поглощение имеет *селективный* характер, т. е. коэффициент поглощения κ зависит от длины волны света (в вакууме). Для жидких и твердых веществ зависимость $\kappa(\lambda)$ имеет вид, подобный изображенному на рис. 109.

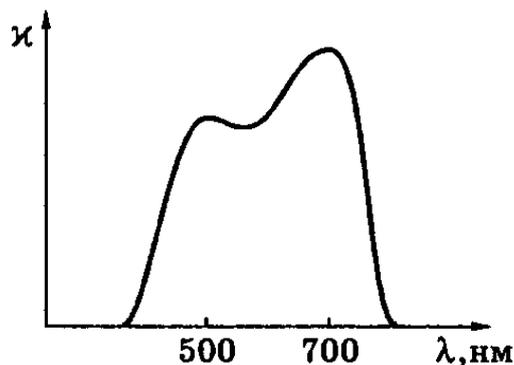


Рис. 109

Т. е. сильное поглощение обнаруживается в достаточно широком интервале длин волн.

Совсем иначе ведет себя коэффициент $\kappa(\lambda)$ в случае газов или паров металлов при невысоком давлении. Здесь для всех длин волн коэффициент $\kappa \approx 0$, и лишь для очень узких спектральных интервалов $\delta\lambda$ (порядка нескольких тысячных нм) обнаруживает резкие максимумы (рис. 110). Эти максимумы соответствуют резонансным частотам колебаний электронов внутри атомов, которые практически не взаимодействуют друг с другом.

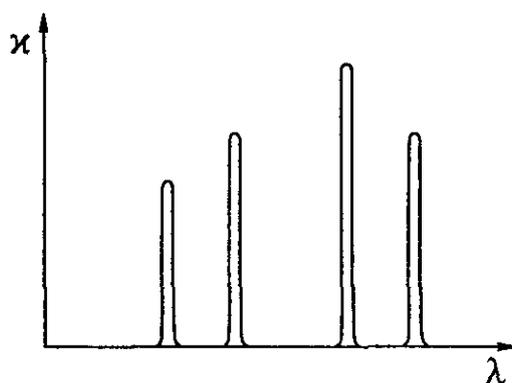


Рис. 110

При повышении же давления максимумы поглощения все больше расширяются, и при высоких давлениях спектр $\kappa(\lambda)$ приближается к спектрам поглощения жидкостей. Это

связано с ростом взаимодействия между атомами.

В заключение отметим, что можно создать такое состояние атомов вещества, при котором коэффициент κ становится отрицательным, и прохождение света через вещество в таком (инверсионном, как говорят) состоянии сопровождается усилением его интенсивности. Именно это и осуществляется в лазерах.

0.8.5 Рассеяние света

Механизм рассеяния света. С классической точки зрения рассеяние света состоит в том, что световая волна, проходящая через вещество, вызывает колебания электронов в атомах (молекулах). Эти электроны возбуждают вторичные волны, распространяющиеся по всем направлениям. При этом вторичные волны оказываются когерентными между собой и поэтому интерферируют.

Теоретический расчет приводит к следующему выводу: в случае однородной среды вторичные волны полностью гасят друг друга во всех направлениях, кроме направления распространения первичной волны (это было показано в конце стр. 81). В силу этого перераспределения света по направлениям, т. е. *рассеяния света в однородной среде, не происходит.*

Иначе обстоит дело при распространении света в *неоднородной* среде. В этом случае световые волны, дифрагируя на мелких неоднородностях среды, дают дифракционную картину в виде довольно равномерного распределения интенсивности по всем направлениям. Это явление и называют *рассеянием света.*

Примерами таких сред с явно выраженной оптической неоднородностью могут служить так называемые *мутные среды*. К их числу относятся аэрозоли (дым, туман), коллоидные растворы, матовые стекла и др., содержащие мелкие частицы, показатель преломления которых отличается от показателя преломления окружающей среды.

Закон Рэлея. Рассеяние света в мутных средах на неоднородностях, размеры которых малы по сравнению с длиной волны λ , можно наблюдать, например, при прохождении яркого светового пучка через слой воздуха с мелкими частичками дыма или через сосуд с водой, в которую добавлено немного молока. Если мутную воду освещать пучком белого света, то при наблюдении сбоку — в рассеянном свете — среда кажется голубой, т. е. обнаруживается преобладание коротковолновой части спектра. В свете же, прошедшем сквозь достаточно толстый слой мутной среды, обнаруживается преобладание длинноволновой части спектра, и среда кажется красноватой.

Причина такого явления состоит в том, что электроны, совершающие вынужденные колебания в атомах электрически изотропной частицы малого размера (не более $\sim 0,1\lambda$), эквивалентны одному колеблющемуся диполю. Этот диполь колеблется с частотой падающей на него световой волны, и согласно (0.1.44) интенсивность излучаемого им света

$$I \sim \omega^4 \sim \frac{1}{\lambda^4}. \quad (0.8.249)$$

Эту зависимость называют **законом Рэлея**. Из него следует, что коротковолновая часть спектра рассеивается значительно более интенсивно, нежели длинноволновая. Голубой свет, частота которого примерно в 1,5 раза больше частоты красного света, рассеивается почти в 5 раз интенсивнее, чем красный. Это и объясняет голубой цвет рассеянного света и красноватый — прошедшего.

Поляризация рассеянного света. При рассеянии естественного света в мутной среде зависимость интенсивности рассеянного света от угла рассеяния ϑ имеет вид

$$I = I_0(1 + \cos^2 \vartheta), \quad (0.8.250)$$

где I_0 — интенсивность света, рассеянного под прямым углом ($\vartheta = \frac{\pi}{2}$) к направлению первичного светового пучка. Если молекулы рассеивающих частичек электрически изотропны (неполярные молекулы), то рассеиваемый свет оказывается частично-поляризованным и под углом $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ — полностью поляризованным. В этом случае его плоскость поляризации (плоскость колебаний вектора \mathbf{E}) перпендикулярна направлению первичного светового пучка.

Если размеры неоднородностей сравнимы с длиной волны света, то электроны в различных местах неоднородности колеблются уже не синфазно. Это усложняет явление рассеяния и приводит к другим закономерностям: закон Рэлея нарушается (интенсивность рассеянного света становится пропорциональной всего лишь квадрату частоты, $I \sim \omega^2 \sim \frac{1}{\lambda^2}$), и свет, рассеянный под углом $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, оказывается поляризованным лишь частично.

Если же размеры неоднородностей значительно больше световой длины волны, то спектральный состав рассеянного света практически совпадает со спектральным составом первичного пучка. Этим объясняется, например, белый цвет облаков.

Молекулярное рассеяние. Даже тщательно очищенные от посторонних примесей и загрязнений жидкости и газы в некоторой степени рассеивают свет. М. Смолуховский (1908) выяснил, что причиной оптических неоднородностей в этом случае являются *флуктуации плотности*. Имеются в виду отклонения в пределах малых объемов плотности от ее среднего значения, возникающие в процессе хаотического теплового движения молекул среды. Рассеяние света, обусловленное этими флуктуациями плотности, называют *молекулярным рассеянием*.

Молекулярным рассеянием объясняется голубой цвет неба. Непрерывно возникающие в атмосфере флуктуации плотности в малых объемах приводят согласно закону Рэлея к тому, что синие и голубые составляющие солнечного света рассеиваются сильнее, чем желтые и красные. При восходе и заходе Солнца прямой солнечный свет проходит через большую толщу атмосферы, и при этом большая доля коротковолновой части спектра теряется на рассеяние. Из прямого света до поверхности Земли доходит преимущественно красная составляющая спектра. Вот почему при восходе и заходе Солнце кажется красным. Аналогично объясняется и красный цвет зари.

Эффект, связанный с молекулярным рассеянием света, зависит от температуры: с ее ростом он увеличивается, и это подтверждает эксперимент.

Ослабление узкого светового пучка. В результате рассеяния интенсивность узкого светового пучка убывает в направлении распространения быстрее, чем в случае одного лишь поглощения. Поэтому для мутной среды в выражении (0.8.248) вместо коэффициента поглощения κ должен стоять коэффициент ослабления

$$\mu = \kappa + \kappa', \quad (0.8.251)$$

где κ' — коэффициент экстинкции, связанный с рассеивающими свойствами среды. Тогда интенсивность пучка будет изменяться с проходным расстоянием x как

$$I = I_0 e^{-\mu x}. \quad (0.8.252)$$

Еще раз отметим, что эта зависимость относится к *узкому* световому пучку.

0.8.6 Эффект Вавилова-Черенкова

В 1934 г. Черенков ²⁰, работавший под руководством Вавилова ²¹ обнаружил особый вид свечения жидкостей под действием γ -лучей радия. Вавилов высказал правильное предположение, что источником излучения служат быстрые электроны, создаваемые γ -лучами.

²⁰Павел Алексеевич Черенков (1904-1990) — советский физик.

²¹Сергей Иванович Вавилов (1891-1951) — советский физик.

Это явление получило название эффекта Вавилова-Черенкова. Его полное теоретическое объяснение было дано в 1937 г. Таммом ²² и Франком ²³. (В 1958 г. работа Черенкова, Тамма и Франка была отмечена Нобелевской премией.)

Согласно электромагнитной теории заряд, движущийся равномерно, не излучает электромагнитных волн (см. И.В. Савельев “Курс общей физики” кн. 2 § 2.6). Однако, как показали Тамм и Франк, это справедливо лишь в том случае, если скорость v заряженной частицы не превышает фазовую скорость $\frac{c}{n}$ электромагнитных волн в той среде, в которой движется частица. При условии, что $v > \frac{c}{n}$, даже двигаясь равномерно, частица излучает электромагнитные волны. В действительности частица теряет энергию на излучение, вследствие чего движется с отрицательным ускорением. Но это ускорение является не причиной (как в случае $v < \frac{c}{n}$), а следствием излучения. Если бы потеря энергии за счет излучения восполнялась каким-либо способом, то частица, движущаяся равномерно со скоростью $v > \frac{c}{n}$, все равно была бы источником излучения.

Эффект Вавилова-Черенкова наблюдался экспериментально для электронов, протонов и мезонов при движении их в жидких и твердых средах.

В излучении Вавилова-Черенкова преобладают короткие волны, поэтому оно имеет голубую окраску. Наиболее характерным свойством этого излучения является то, что оно испускается не по всем направлениям, а лишь вдоль образующих конуса, ось которого совпадает с направлением скорости частицы (рис. 111).

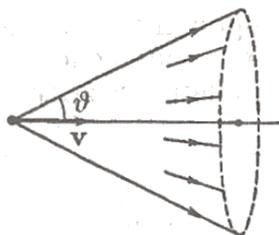


Рис. 111

Угол ϑ между направлениями распространения излучения и вектором скорости частицы определяется соотношением

$$\cos \vartheta = \frac{\frac{c}{n}}{v} = \frac{c}{nv}. \quad (0.8.253)$$

Эффект Вавилова-Черенкова находит широкое применение в экспериментальной технике. В так называемых *счетчиках Черенкова* световая вспышка, порождаемая быстро движущейся заряженной частицей, превращается помощью фотоумножителя ²⁴ в импульс тока. Для того чтобы заставить сработать такой счетчик, энергия частицы должна превысить пороговое значение, определяемое условием $v = \frac{c}{n}$. Поэтому черенковские счетчики позволяют не только регистрировать частицы, но и судить об их энергии. Удастся даже определить угол ϑ между направлением вспышки и скоростью частицы, что дает возможность вычислить по формуле (0.8.253) скорость (а следовательно, и энергию) частицы.

0.9 Оптика движущихся сред

0.9.1 Скорость света

Скорость света в вакууме является одной из фундаментальных физических величин. Установление конечности скорости света имело огромное принципиальное значение. Конеч-

²²Игорь Евгеньевич Тамм (1895-1971) — советский физик.

²³Илья Михайлович Франк (1908-1990) — советский физик.

²⁴Фотоумножителем называют электронный умножитель, первый электрод которого (фотокатод) способен испускать электроны под действием света.

ность скорости передачи сигналов, передачи взаимодействия, лежит в основе теории относительности.

В связи с тем, что числовое значение скорости света очень велико, экспериментальное определение этой скорости представляет собой весьма сложную задачу. Первые определения скорости света были осуществлены на основании астрономических наблюдений. В 1676 г. Рёмер²⁵ определил скорость света из наблюдений за затмениями спутников Юпитера. Он получил значение, равное 215 000 км/с.

Движение Земли по орбите приводит к тому, что видимое положение звезд на небесной сфере изменяется. Это явление, называемое абберацией света, использовал в 1727 г. английский астроном Бредли для определения скорости света.

Предположим, что направление на наблюдаемую в телескоп звезду перпендикулярно к плоскости земной орбиты. Тогда угол между направлением на звезду и вектором скорости Земли v будет в течение всего года равен $\frac{\pi}{2}$ (рис. 112).

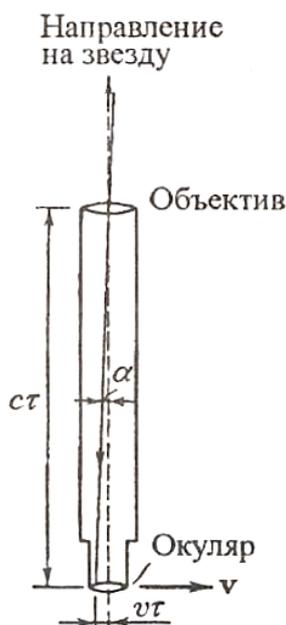


Рис. 112

Направим ось телескопа точно на звезду. За время τ , которое требуется свету, чтобы пройти расстояние от объектива до окуляра, телескоп сместится вместе с Землей в направлении, перпендикулярном к лучу света, на расстояние $v\tau$. В результате изображение звезды окажется не в центре окуляра. Для того чтобы изображение оказалось точно в центре окуляра, нужно повернуть ось телескопа в направлении вектора v на угол α , тангенс которого определяется соотношением

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v}{c}. \quad (0.9.254)$$

(см. рис. 112). Точно так же падающие вертикально капли дождя пролетят сквозь длинную трубу, установленную на движущейся тележке, лишь в том случае, если наклонить ось трубы в направлении движения тележки.

Итак, видимое положение звезды оказывается смещенным относительно истинного на угол α . Вектор скорости Земли все время поворачивается в плоскости орбиты. Поэтому ось телескопа тоже поворачивается, описывая конус вокруг истинного направления на звезду. Соответственно видимое положение звезды на небесной сфере описывает окружность, угловой диаметр которой равен 2α . Если направление на звезду образует с плоскостью земной орбиты угол, отличный от прямого, видимое положение звезды описывает

²⁵Оле Рёмер (1644-1710) — датский астроном.

эллипс, большая ось которого имеет угловой размер 2α . Для звезды, лежащей в плоскости орбиты, эллипс вырождается в прямую.

Из астрономических наблюдений Бредли нашел, что $2\alpha = 40,9''$. Соответствующее значение c , полученное по формуле (0.9.254), оказалось равным 303 000 км/с.

В земных условиях скорость света была впервые измерена Физо²⁶ в 1849 г. Схема опыта дана на рис. 113.

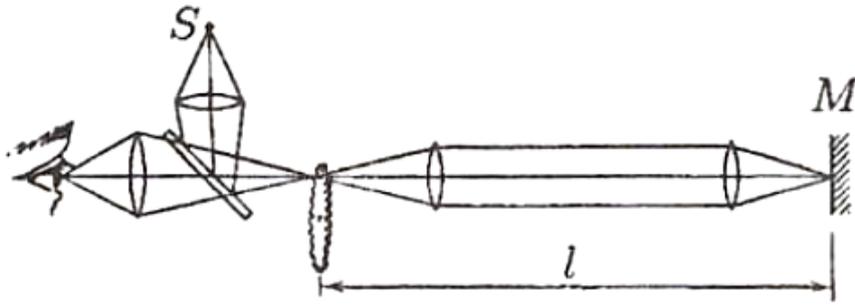


Рис. 113

Свет от источника S падал на полупрозрачное зеркало. Отразившийся от зеркала свет попадал на край быстро вращающегося зубчатого диска. Всякий раз, когда против светового пучка оказывалась прорезь между зубцами, возникал световой импульс, который доходил до зеркала M и отражался обратно. Если в момент, когда свет возвращался к диску, против пучка оказывалась прорезь, отраженный импульс проходил частично через полупрозрачное зеркало и попадал в глаз наблюдателя. Если на пути отраженного импульса оказывался зубец диска, наблюдатель света не видел.

За время $\tau = \frac{2\ell}{c}$, которое свет затрачивал на прохождение пути до зеркала M и обратно, диск успевал повернуться на угол $\Delta\varphi = \omega\tau = \frac{2\ell\omega}{c}$, где ω — угловая скорость вращения диска. Пусть число зубцов диска равно N . Тогда угол между серединами соседних зубцов равен $\alpha = \frac{2\pi}{N}$. Свет не возвращался в глаз наблюдателя при таких скоростях вращения диска, при которых за время τ диск успевал повернуться на углы $\frac{\alpha}{2}, \frac{3\alpha}{2}, \dots, \left(m - \frac{1}{2}\right)\alpha$ и т.д. Следовательно, условие m -го затемнения имеет вид $\Delta\varphi = \left(m - \frac{1}{2}\right)\alpha$ или $\frac{2\ell\omega_m}{c} = \left(m - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2\pi}{N}$. По этой формуле, зная ℓ , N и угловую скорость ω_m , при которой получается m -е затемнение, можно определить c . В опыте Физо ℓ было равно примерно 8,6 км. Для c получилось значение 313 000 км/с.

В 1928 г. для измерения скорости света были использованы ячейки Керра (см. И.В. Савельев “Курс общей физики” кн. 2 § 6.7). С их помощью можно осуществить прерывание светового пучка с гораздо большей частотой ($\sim 10^7$ с⁻¹), чем с помощью зубчатого диска. Это позволило произвести измерения c при ℓ порядка нескольких метров.

Майкельсон произвел несколько измерений скорости света методом вращающейся призмы. В опыте Майкельсона, осуществленном в 1932 г., свет распространялся в трубе длиной 1,6 км, из которой был откачен воздух.

В настоящее время скорость света в вакууме принимается равной

$$c = 299792458 \text{ м/с.} \quad (0.9.255)$$

Отметим, что во всех опытах, в которых осуществлялось прерывание света, определялась не фазовая, а групповая скорость световых волн. В воздухе эти две скорости практически совпадают.

²⁶Арман Ипполит Луи Физо (1819-1896) — французский физик.

0.9.2 Опыт Физо

До сих пор мы предполагали, что источники, приемники и другие тела, относительно которых рассматривалось распространение света, неподвижны. Естественно заинтересоваться вопросом, как скажется на распространении света движение источника световых волн. При этом возникает необходимость указать, относительно чего происходит движение. В §1.11 (И.В. Савельев “Курс общей физики” кн. 1) мы выяснили, что движение источника или приемника звуковых волн относительно среды, в которой эти волны распространяются, оказывает влияние на протекающие акустические явления (эффект Доплера) и, следовательно, может быть обнаружено.

Первоначально волновая теория рассматривала свет как упругие волны, распространяющиеся в некоей гипотетической среде, получившей название мирового эфира. После создания теории Максвелла на смену упругому эфиру пришел эфир — носитель электромагнитных волн и полей. Под этим эфиром подразумевалась особая среда, наполняющая, как и ее предшественник, упругий эфир, все мировое пространство и пронизывающая все тела. Раз эфир представлял собой некую среду, можно было рассчитывать обнаружить движение тел, например источников или приемников света, по отношению к этой среде. В частности, следовало ожидать существования «эфирного ветра», обдувающего Землю при ее движении вокруг Солнца.

В механике был установлен принцип относительности Галилея, согласно которому все инерциальные системы отсчета являются в механическом отношении равноправными. Обнаружение эфира сделало бы возможным выделение (с помощью оптических явлений) особенной (связанной с эфиром), преимущественной, абсолютной системы отсчета. Тогда движение остальных систем можно было бы рассматривать по отношению к этой абсолютной системе.

Таким образом, выяснение вопроса о взаимодействии мирового эфира с движущимися телами играло принципиальную роль. Можно было допустить три возможности: 1) эфир совершенно не возмущается движущимися телами; 2) эфир увлекается движущимися телами частично, приобретая скорость, равную αv , где v — скорость тела относительно абсолютной системы отсчета, α — коэффициент увлечения, меньший единицы; 3) эфир полностью увлекается движущимися телами, например Землей, подобно тому, как тело при своем движении увлекает прилежащие к его поверхности слои газа. Однако последняя возможность опровергается существованием явления абберрации света. В предыдущем параграфе мы выяснили, что изменение видимого положения звезд может быть объяснено движением телескопа относительно системы отсчета (среды), в которой распространяется световая волна.

Для выяснения вопроса о том, увлекается ли эфир движущимися телами, Физо осуществил в 1851 г. следующий опыт. Параллельный пучок света от источника S разделялся посеребренной полупрозрачной пластинкой P на два пучка, обозначенных цифрами 1 и 2 (рис. 114).

За счет отражения от зеркал M_1 , M_2 и M_3 пучки, пройдя в общей сложности одинаковый путь L , снова попадали на пластинку P . Пучок 1 частично проходил через P , пучок 2 частично отражался, в результате чего возникали два когерентных пучка $1'$ и $2'$, которые давали в фокальной плоскости зрительной трубы интерференционную картину в виде полос. На пути пучков 1 и 2 были установлены две трубы, по которым могла пропускаться вода со скоростью u и в направлениях, указанных стрелками. Луч 2 распространялся в обеих трубах навстречу току воды, луч 1 — по течению.

При неподвижной воде пучки 1 и 2 проходят путь L за одинаковое время. Если вода при своем движении хотя бы частично увлекает эфир, то при включении тока воды луч 2, который распространяется против течения, затратит на прохождение пути L большее время, чем луч 1, распространяющийся по течению. В результате между лучами возникнет

некоторая разность хода, и интерференционная картина сместится.

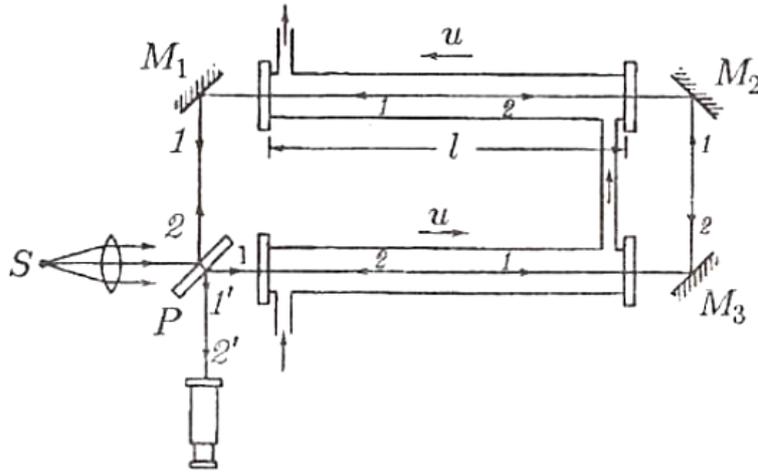


Рис. 114

При неподвижной воде пучки 1 и 2 проходят путь L за одинаковое время. Если вода при своем движении хотя бы частично увлекает эфир, то при включении тока воды луч 2, который распространяется против течения, затратит на прохождение пути L большее время, чем луч 1, распространяющийся по течению. В результате между лучами возникнет некоторая разность хода, и интерференционная картина сместится.

Интересующая нас разность хода возникает лишь на пути лучей, пролегающем в воде. Этот путь имеет длину $2l$. Обозначим скорость света относительно эфира в воде буквой v . Когда эфир не увлекается водой, скорость света относительно установки будет совпадать с v . Предположим, что вода при своем движении частично увлекает эфир, сообщая ему относительно установки скорость αu (u — скорость воды, α — коэффициент увлечения). Тогда скорость света относительно установки будет равна $v + \alpha u$ для луча 1 и $v - \alpha u$ для луча 2. Луч 1 пройдет путь $2l$ за время $t_1 = \frac{2l}{v + \alpha u}$, луч 2 — за время $t_2 = \frac{2l}{v - \alpha u}$. Из формулы $(t = \frac{L}{c})$ вытекает, что оптическая длина пути L , на прохождение которой затрачивается время t , равна ct . Следовательно, разность хода лучей 1 и 2 равна $\Delta = c(t_2 - t_1)$. Разделив Δ на λ_0 , получим число полос, на которое сместится интерференционная картина при включении тока воды:

$$\Delta N = \frac{c(t_1 - t_2)}{\lambda_0} = \frac{c}{\lambda_0} \left(\frac{2l}{v - \alpha u} - \frac{2l}{v + \alpha u} \right) = \frac{4cl\alpha u}{\lambda_0(v^2 - \alpha^2 u^2)}.$$

Физо обнаружил, что интерференционные полосы действительно смещаются. Соответствующее смещению значение коэффициента увлечения оказалось равным

$$\alpha = 1 - \frac{1}{n^2}, \quad (0.9.256)$$

где n — показатель преломления воды. Таким образом, опыт Физо показал, что эфир (если он существует) увлекается движущейся водой только частично.

Легко убедиться в том, что результат опыта Физо объясняется релятивистским законом сложения скоростей. Согласно формуле (6.33) И.В. Савельев “Курс общей физики” кн. 1 скорости v_x и v'_x некоторого тела в системах K и K' связаны соотношением

$$v_x = \frac{v'_x + v_0}{1 + \frac{v_0 v'_x}{c^2}} \quad (0.9.257)$$

(v_0 — скорость системы K' относительно системы K).

Свяжем с прибором Физо систему отсчета K , а с движущейся водой — систему K' . Тогда роль v_0 будет играть скорость течения воды u , роль v'_x — скорость света относительно воды, равная $\frac{c}{n}$, и, наконец, роль v_x — скорость света относительно прибора $v_{\text{приб}}$. Подстановка этих значений в формулу (0.9.257) дает

$$v_{\text{приб}} = \frac{\frac{c}{n} + u}{1 + \frac{u \cdot (\frac{c}{n})}{c^2}} = \frac{\frac{c}{n} + u}{1 + \frac{u}{cn}}$$

Скорость течения воды u много меньше c . Поэтому полученное выражение можно упростить следующим образом:

$$v_{\text{приб}} = \frac{\frac{c}{n} + u}{1 + \frac{u}{cn}} \approx \left(\frac{c}{n} + u\right) \left(1 - \frac{u}{cn}\right) \approx \frac{c}{n} + u \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \quad (0.9.258)$$

(мы пренебрегли членом $\frac{u^2}{cn}$).

Согласно классическим представлениям скорость света относительно прибора $v_{\text{приб}}$ равна сумме скорости света относительно эфира, т. е. $\frac{c}{n}$, и скорости эфира относительно прибора, т. е. αu :

$$v_{\text{приб}} = \frac{c}{n} + \alpha u.$$

Сравнение с формулой (0.9.258) дает для коэффициента увлечения α значение, полученное Физо (см. 0.9.256).

Следует иметь в виду, что одинакова во всех системах отсчета лишь скорость света в вакууме. Скорость света в веществе различна в разных системах отсчета. Значение $\frac{c}{n}$ она имеет в системе отсчета, связанной со средой, в которой происходит распространение света.

0.9.3 Опыт Майкельсона

В 1881 г. Майкельсон осуществил знаменитый опыт, с помощью которого он рассчитывал обнаружить движение Земли относительно эфира (эфирный ветер). В 1887 г. Майкельсон повторил свой опыт совместно с Морли²⁷ на более совершенном приборе. Установка Майкельсона — Морли изображена на рис. 115.

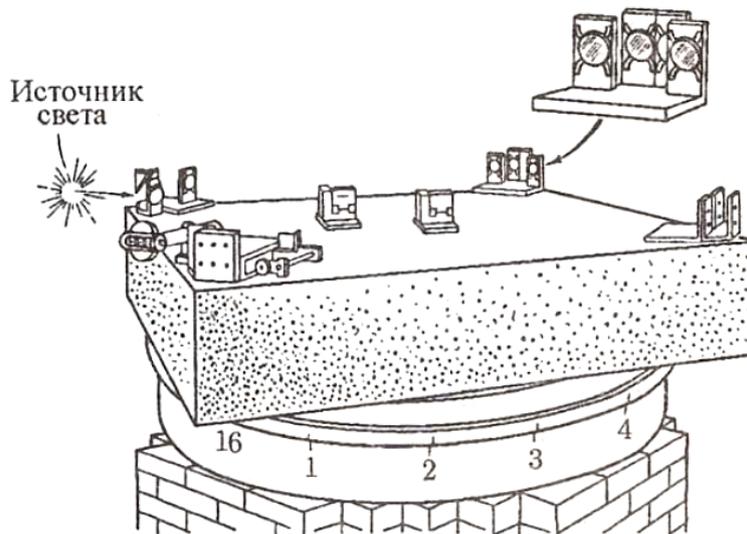


Рис. 115

²⁷Эдвард Морли (1838-1923) — американский химик.

Кирпичное основание поддерживало кольцевой чугунный желоб с ртутью. На ртути плавал деревянный поплавок, имеющий форму нижней половины разрезанного вдоль бублика. На этот поплавок устанавливалась массивная квадратная каменная плита.

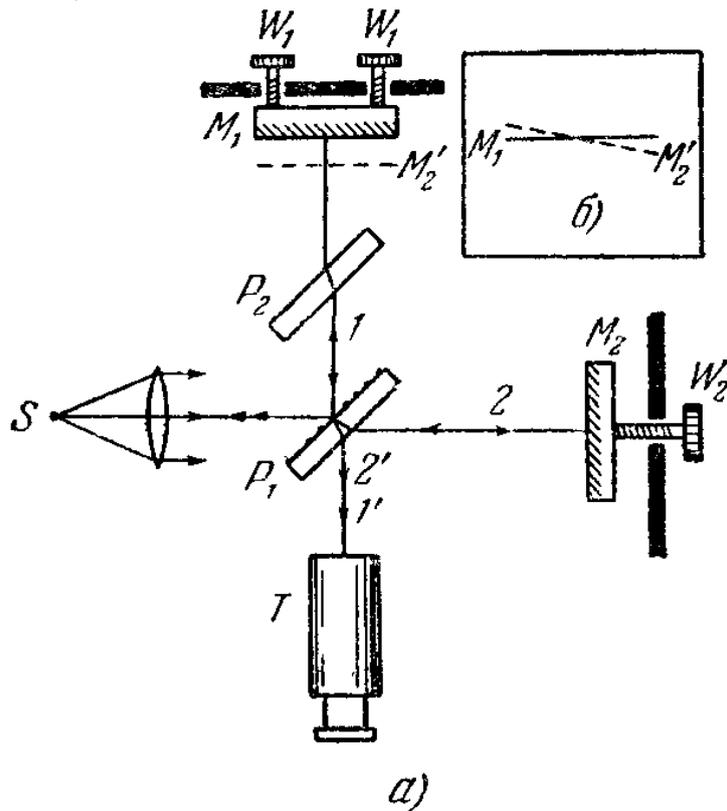


Рис. 116

Такое устройство позволяло плавно поворачивать плиту вокруг вертикальной оси прибора. На плите монтировался интерферометр Майкельсона (см. рис. 116), видоизмененный так, что оба луча, прежде чем вернуться к полупрозрачной пластинке, несколько раз проходили туда и обратно путь, совпадающий с диагональю плиты. Схема хода лучей показана на рис. 117.

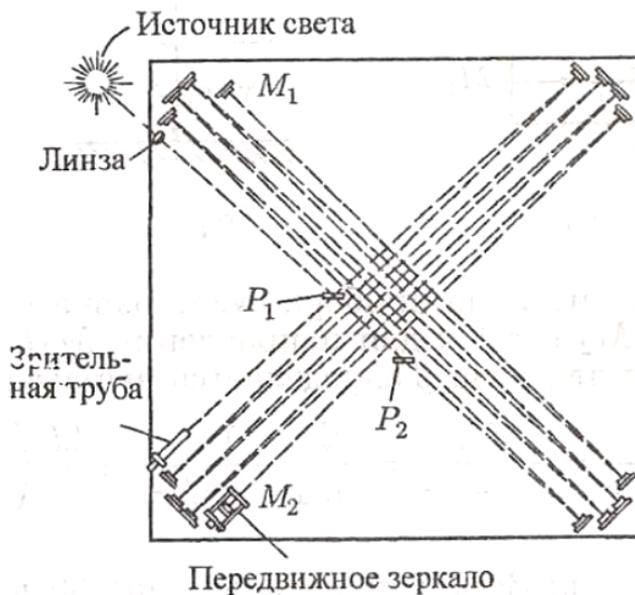


Рис. 117

Обозначения на этом рисунке соответствуют обозначениям на рис. 116.

В основе опыта лежали следующие соображения. Предположим, что плечо PM_2 интерферометра (рис. 118) совпадает с направлением движения Земли относительно эфира.

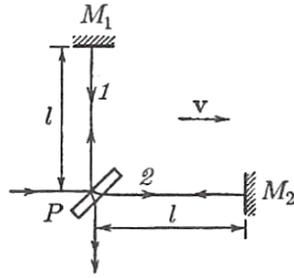


Рис. 118

Тогда время, необходимое лучу 1, чтобы пройти путь до зеркала M_1 и обратно, будет отлично от времени, необходимого для прохождения пути PM_2P лучом 2. В результате даже при равенстве длин обоих плеч лучи 1 и 2 приобретут некоторую разность хода. Если повернуть прибор на 90° , плечи поменяются местами и разность хода изменит знак. Это должно привести к смещению интерференционной картины, величину которого, как показали произведенные Майкельсоном расчеты, вполне можно было бы обнаружить.

Чтобы вычислить ожидаемое смещение интерференционной картины, найдем времена прохождения соответствующих путей лучами 1 и 2. Пусть скорость Земли относительно эфира равна v . Если эфир не увлекается Землей и скорость света относительно эфира равна c (показатель преломления воздуха практически равен единице), то скорость света относительно прибора будет равна $c - v$ для направления PM_2 и $c + v$ для направления M_2P . Следовательно, время для луча 2 определяется выражением

$$t_2 = \frac{l}{c - v} + \frac{l}{c + v} = \frac{2lc}{c^2 - v^2} = \frac{2l}{c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx \frac{2l}{c} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right) \quad (0.9.259)$$

(скорость движения Земли по орбите равна 30 км/с, поэтому $\frac{v^2}{c^2} = 10^{-8} \ll 1$).

Прежде чем приступить к вычислению времени t_1 , рассмотрим следующий пример из механики. Пусть катеру, который развивает скорость c относительно воды, требуется пересечь реку, текущую со скоростью v , в направлении, точно перпендикулярном к ее берегам (рис. 119).

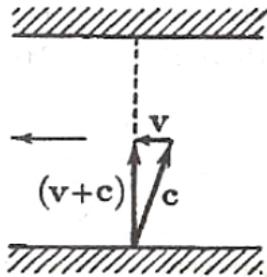


Рис. 119

Для того чтобы катер перемещался в заданном направлении, его скорость относительно воды должна быть направлена так, как показано на рисунке. Поэтому скорость катера относительно берегов будет равна $|c + v| = \sqrt{c^2 - v^2}$. Такова же будет (как предполагал Майкельсон) скорость луча 1 относительно прибора. Следовательно, время для луча 1 равно ²⁸

$$t_1 = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2l}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2} \right). \quad (0.9.260)$$

²⁸Мы воспользовались формулами $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2}$ и $\frac{1}{(1-x)} \approx 1 + x$, справедливыми для малых x .

Подставив в выражение $\Delta = c(t_2 - t_1)$ значения (0.9.259) и (0.9.260) для t_2 и t_1 , получим разность хода лучей 1 и 2:

$$\Delta = 2l \left[\left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right) - \left(2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2} \right) \right] = l \cdot \frac{v^2}{c^2}. \quad (0.9.261)$$

При повороте прибора на 90° разность хода изменит знак. Следовательно, число полос, на которое сместится интерференционная картина, составит

$$\Delta N = \frac{2\Delta}{\lambda_0} = 2 \frac{l}{\lambda_0} \cdot \frac{v^2}{c^2}. \quad (0.9.262)$$

Длина плеча l (учитывая многократные отражения) составляла 11 м. Длина волны света в опыте Майкельсона и Морли равнялась 0,59 мкм. Подстановка этих значений и формулу (0.9.262) дает

$$\Delta N = \frac{2 \cdot 11}{0,59 \cdot 10^{-6}} \cdot 10^{-8} = 0,37 \approx 0,4 \text{ полосы}. \quad (0.9.263)$$

Прибор позволял обнаружить смещение порядка 0,01 полосы. Однако никакого смещения интерференционной картины обнаружено не было. Чтобы исключить возможность того, что в момент измерений плоскость горизонта окажется перпендикулярной к вектору орбитальной скорости Земли, опыт повторялся в различное время суток. В последствии опыт производился многократно в различное время года (за год вектор орбитальной скорости Земли поворачивается в пространстве на 360°) и неизменно давал отрицательные результаты. Обнаружить эфирный ветер не удавалось. Мировой эфир оставался неуловимым.

Было предпринято несколько попыток объяснить отрицательный результат опыта Майкельсона, не отказываясь от гипотезы о мировом эфире. Однако все попытки оказались несостоятельными. Исчерпывающее непротиворечивое объяснение всех опытных фактов, в том числе и результатов опыта Майкельсона, было дано Эйнштейном в 1905 г. Эйнштейн пришел к выводу, что мирового эфира, т. е. особой среды, которая могла бы служить абсолютной системой отсчета, не существует. В соответствии с этим Эйнштейн распространил механический принцип относительности на все без исключения физические явления. Далее Эйнштейн постулировал в соответствии с опытными данными, что скорость света в вакууме одинакова во всех инерциальных системах отсчета и не зависит от движения источников и приемников света.

Принцип относительности и принцип постоянства скорости света образуют основу созданной Эйнштейном специальной теории относительности (см. И.В. Савельев “Курс общей физики” кн. 1 гл. 6).

0.9.4 Эффект Доплера

В акустике изменение частоты, обусловленное эффектом Доплера, определяется скоростями движения источника и приемника по отношению к среде, являющейся носителем звуковых волн (см. формулу (1.78) И.В. Савельев “Курс общей физики” кн. 1). Для световых волн также существует эффект Доплера. Однако особой среды, которая служила бы носителем электромагнитных волн, не существует. Поэтому доплеровское смещение частоты световых волн определяется только относительной скоростью источника и приемника.

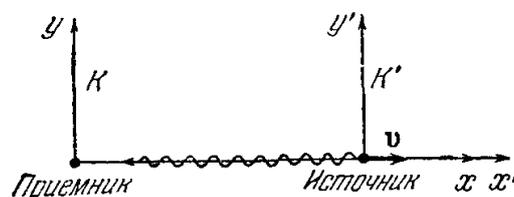


Рис. 120

Свяжем с источником света начало координат системы K , а с приемником — начало координат системы K' (рис. 120). Оси x и x' направим, как обычно, вдоль вектора скорости \mathbf{v} , с которой система K' (т.е. приемник) движется относительно системы K (т.е. источника). Уравнение плоской световой волны, испускаемой источником по направлению к приемнику, будет в системе K иметь вид

$$E(x, t) = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) + \alpha \right]. \quad (0.9.264)$$

Здесь ω — частота волны, фиксируемая в системе отсчета, связанной с источником, т.е. частота, с которой колеблется источник. Мы предполагаем, что световая волна распространяется в вакууме; поэтому фазовая скорость равна c .

Согласно принципу относительности законы природы имеют одинаковый вид во всех инерциальных системах отсчета. Следовательно, в системе K' волна (0.9.264) описывается уравнением

$$E'(x', t') = A' \cos \left[\omega' \left(t' - \frac{x'}{c} \right) + \alpha' \right], \quad (0.9.265)$$

где ω' — частота, фиксируемая в системе отсчета K' , т.е. частота, воспринимаемая приемником. Мы снабдили штрихами все величины, кроме α , которая одинакова во всех системах отсчета.

Уравнение волны в системе K' можно получить из уравнения в системе K , перейдя от x и t к x' и t' с помощью преобразований Лоренца:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y &= y', \\ z &= z', \\ t &= \frac{t + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned} \right\} \quad (0.9.266)$$

Заменив в (0.9.264) x и t согласно формулам (0.9.266), получим

$$E(x', t') = A \cos \left\{ \omega \left[\frac{t' + \left(\frac{v}{c^2}\right)x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{x' + vt'}{c \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right] + \alpha \right\}$$

(роль v_0 играет v). Последнее выражение легко привести к виду

$$E(x', t') = A \cos \left[\omega \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(t' - \frac{x'}{c} \right) + \alpha \right] \quad (0.9.267)$$

Уравнение (0.9.267) описывает в системе K' ту же волну, что и уравнение (0.9.265). Поэтому должно выполняться соотношение

$$\omega' = \omega \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \omega \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}.$$

Изменим обозначения: частоту источника ω обозначим через ω_0 , а частоту приемника ω' — через ω . В результате формула примет вид

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}. \quad (0.9.268)$$

Перейдя от круговой частоты к обычной, получим

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}. \quad (0.9.269)$$

Фигурирующая в формулах (0.9.268) и (0.9.269) скорость v приемника по отношению к источнику есть величина алгебраическая. При удалении приемника $v > 0$ и согласно (0.9.268) $\omega < \omega_0$; при приближении приемника к источнику $v < 0$, так что $\omega > \omega_0$.

В случае, если $v \ll c$, формулу (0.9.268) можно приближенно записать следующим образом:

$$\omega \approx \omega_0 \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{v}{c}}{1 + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{v}{c}} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{v}{2c}\right) \left(1 - \frac{v}{2c}\right).$$

Отсюда, ограничившись членами порядка $\frac{v}{c}$, получим

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{v}{c}\right). \quad (0.9.270)$$

Из этой формулы можно найти относительное изменение частоты:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{v}{c} \quad (0.9.271)$$

(под $\Delta\omega$ подразумевается $\omega - \omega_0$).

Можно показать, что, кроме рассмотренного нами *продольного эффекта*, для световых волн существует также *поперечный эффект Доплера*. Он заключается в уменьшении воспринимаемой приемником частоты, наблюдающемся в том случае, когда вектор относительной скорости направлен перпендикулярно к прямой, проходящей через приемник и источник ²⁹ (когда, например, источник движется по окружности, в центре которой помещается приемник). В этом случае частота ω_0 в системе источника связана с частотой ω в системе приемника соотношением

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) \quad (0.9.272)$$

Относительное изменение частоты при поперечном эффекте Доплера

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{v^2}{2c^2} \quad (0.9.273)$$

пропорционально квадрату отношения $\frac{v}{c}$ и, следовательно, значительно меньше, чем при продольном эффекте, для которого относительное изменение частоты пропорционально первой степени $\frac{v}{c}$.

²⁹Напомним, что для звуковых волн поперечного эффекта Доплера не существует.

Существование поперечного эффекта Доплера было доказано экспериментально Айвсом в 1938 г. В опытах Айвса определялось изменение частоты излучения атомов водорода в каналových лучах (см. И.В. Савельев “Курс общей физики” кн. 2, последний абзац § 12.6). Скорость атомов составляла примерно $2 \cdot 10^6$ м/с. Эти опыты представляют собой непосредственное экспериментальное подтверждение справедливости преобразований Лоренца.

В общем случае вектор относительной скорости можно разложить на две составляющие, одна из которых направлена вдоль луча, а другая — перпендикулярно к лучу. Первая составляющая обусловит продольный, вторая — поперечный эффект Доплера.

Продольный эффект Доплера используется для определения радиальной скорости звезд. Измерив относительное смещение линий в спектрах звезд, можно по формуле (0.9.268) определить v .

Тепловое движение молекул светящегося газа приводит вследствие эффекта Доплера к уширению спектральных линий. Из-за хаотичности теплового движения все направления скоростей молекул относительно спектрографа равновероятны. Поэтому в регистрируемом прибором излучении присутствуют все частоты, заключенные в интервале от $\omega_0 (1 - \frac{v}{c})$ до $\omega_0 (1 + \frac{v}{c})$, где ω_0 — частота, излучаемая молекулами, v — скорость теплового движения (см. формулу 0.9.270). Таким образом, регистрируемая ширина спектральной линии составит $\frac{2\omega_0 v}{c}$. Величину

$$\delta\omega_D = 2\omega_0 \frac{v}{c} \quad (0.9.274)$$

называют *доплеровской шириной спектральной линии* (под v подразумевается наиболее вероятная скорость молекул). По величине доплеровского уширения спектральных линий можно судить о скорости теплового движения молекул, а следовательно, и о температуре светящегося газа.