Свойства неопределенного интеграла

Если $F'(x) = f(x)$, то

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \text{ где } C = const.$$

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x); \qquad d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$$

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx, \text{ где } k = const;$$

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx;$$

$$\int (f(x) - g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx;$$

Интегрирование по частям

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

или

$$\int udv = uv - \int vdu\,.$$

Замена переменной

$$\text{Вычислить интеграл } \int f(x)dx.$$

Подстановка $x = \varphi(t)$.

Тогда $dx = \varphi'(t)dt$.

Формула интегрирования заменой переменной (подстановкой):

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt.$$

Свойства определенного интеграла

Формула Ньютона - Лейбница

Если $F'(x) = f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx; \qquad \int_a^a f(x)dx = 0;$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx;$$

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx, \text{ где } k = const;$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx;$$

$$\int_a^b (f(x) - g(x))dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx;$$

Если $f(x) \le g(x)$ на $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx\,.$$

Интегрирование по частям

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)u'(x)dx$$

или

$$\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu\,.$$

Замена переменной

Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)dx$.

Подстановка $x = \varphi(t)$.

Тогда $dx = \varphi'(t)dt,\ \varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b$.

Формула интегрирования заменой переменной (подстановкой):

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt.$$

Таблица интегралов

$\int 0dx = C$	$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C =$
$\int adx = ax + C$	$\int \cos x\, dx = \sin x + C$	$= -\operatorname{arcctg} x + C$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$	$\int \sec x\, dx =$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	$= \ln\lvert \sec x + \operatorname{tg} x\rvert + C$	$\int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos x + C$
$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert \frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$	$\int \operatorname{tg} xdx =$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} =$
$\int \ln xdx = x\ln x - x + C$	$= -\ln\lvert \cos x\rvert + C$	$= \ln\lvert x + \sqrt{x^2 \pm 1}\rvert + C$
$\int \frac{dx}{x\ln x} = \ln\ln\lvert x\rvert + C$	$\int \operatorname{cosec} x\, dx =$	$\int \arcsin x\, dx =$
$\int \log_b xdx =$	$= -\ln\lvert \operatorname{cosec} x + \operatorname{ctg} x\rvert + C$	$= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$
$= x\log_b x - x\log_b e + C =$	$\int \operatorname{ctg} x\, dx =$	$\int \arccos x\, dx =$
$= x\frac{\ln x - 1}{\ln b} + C$	$= \ln\lvert \sin x\rvert + C$	$= x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	$\int \operatorname{arctg} x\, dx =$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$	$= x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$
$\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C$	$\int \operatorname{th} x\, dx = \ln\lvert \operatorname{ch} x\rvert + C$	$\int \operatorname{arcctg} x\, dx =$
$\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C$	$\int \operatorname{cth} x\, dx = \ln\lvert \operatorname{sh} x\rvert + C$	$= x\operatorname{arcctg} x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$
$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$	$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$	