

Ярославский государственный педагогический
университет им. К. Д. Ушинского

Кафедра общей физики

Примеры решения задач

Примеры решения задач

Содержание

1	Волны	2
1.1	Упругие волны	2
1.2	Электромагнитные волны	3
2	Геометрическая оптика	8
3	Волновая оптика	11
3.1	Интерференция света	11
3.2	Дифракция света	15
3.3	Поляризация	23
3.4	Взаимодействие света с веществом	28
3.5	Теория относительности и оптика движущихся сред	31

Примеры решения задач

1 Волны

1.1 Упругие волны

Задача 1. Волна смещений частиц среды имеет вид $\xi = a \sin(\alpha t - \beta x)$, где a , α , β — положительные постоянные. Найти отношение амплитуды скорости частиц среды к скорости волны.

Решение

Скорость частиц $\partial\xi/\partial t = a\alpha \cos(\alpha t - \beta x)$, где $a\alpha$ — амплитуда скорости (u_m). Скорость волны находим из условия $\alpha t - \beta x = \text{const}$. Продифференцировав это выражение по t , получим: $\dot{x} = \frac{\alpha}{\beta}$. Искомое отношение $\frac{u_m}{\dot{x}} = \alpha\beta$.

Задача 2. Точечный изотропный источник испускает гармонические звуковые колебания. Найти коэффициент затухания γ волны, если амплитуда колебаний частиц среды на расстоянии r от источника в η раз меньше, нежели на расстоянии r_0 .

Решение

Волна, испускаемая точечным источником, сферическая. Ее амплитуда $a = \left(\frac{\alpha}{r}\right) \exp(-\gamma r)$. По условию, $\eta = \frac{a(r_0)}{a(r)} = \left(\frac{r}{r_0}\right) \exp[\gamma(r - r_0)]$. Отсюда

$$\gamma = \frac{\ln\left(\frac{\eta r_0}{r}\right)}{(r - r_0)}.$$

Задача 3. Поток энергии. Точечный изотропный источник звука мощности P находится в центре круглого полого цилиндра радиуса R и высоты h . Найти средний по времени поток энергии, падающей на боковую поверхность цилиндра, полагая, что его стенки полностью поглощают звук, т.е. нет отражений.

Решение

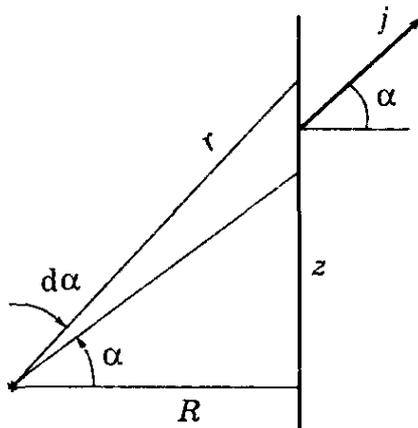


Рис. 1.

Сначала найдем поток энергии $d\Phi$, падающий на бесконечно узкую кольцевую полосу, отстоящую на расстояние z от средней плоскости (рис. 1):

$$d\Phi = j_n dS = j \cos \alpha dS = \left(\frac{P}{4\pi r^2}\right) \cos \alpha \cdot 2\pi R dz. \quad (1)$$

Поскольку $z = R \operatorname{tg} \alpha$, $dz = R d\alpha / \cos^2 \alpha$. Кроме того, $r = R / \cos \alpha$. После подстановки выражений для dz и r в (1) получим:

$$d\Phi = \left(\frac{P}{2}\right) \cos \alpha d\alpha.$$

Остается проинтегрировать это уравнение по α от 0 до α_0 , соответствующего краю цилиндра, и умножить на 2, ибо такой же вклад дает и нижняя половина цилиндра. В итоге:

$$\Phi = P \sin \alpha_0 = \frac{P}{\sqrt{1 + \left(\frac{2R}{h}\right)^2}}.$$

1.2 Электромагнитные волны

Задача 4. Плоская гармоническая электромагнитная волна распространяется в вакууме так, что ее волновой вектор \mathbf{k} перпендикулярен оси Z и составляет угол $\alpha = 60^\circ$ с ортом оси X . Найдем скорость распространения колебаний вдоль оси X .

Решение

Изобразив рисунок, аналогичный рис. 2, найдем, что искомая скорость $v = \frac{c}{\cos \alpha} = 2c$! Полученный результат не противоречит теории относительности: фазовая скорость может быть любой, в отличие от скорости сигнала, которая не может быть больше c – скорости света в вакууме.

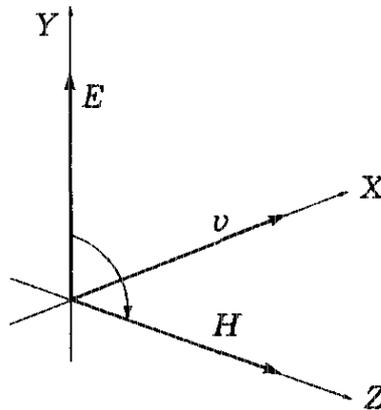


Рис. 2.

Задача 5. В вакууме распространяется гармоническая плоская электромагнитная волна, электрическая составляющая которой имеет вид

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_z E_m \cos(\omega t - \mathbf{k} \mathbf{r}).$$

Найдем вектор – амплитуду магнитной составляющей этой волны \mathbf{H}_m .

Решение

Видно, что данная волна распространяется в направлении вектора \mathbf{k} . Значит, три вектора, \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{k} должны составлять правовинтовую систему (см. рис. 2). Отсюда следует, что вектор \mathbf{H} должен быть сонаправлен с вектором $[\mathbf{k}\mathbf{E}]$, направление которого совпадает с ортом $[\mathbf{n}_k \mathbf{e}_z]$, где орт $\mathbf{n}_k = \frac{\mathbf{k}}{k}$. Остается найти модуль вектора

\mathbf{H} , т. е. воспользоваться формулой (Лекция 1, формула (14))¹:

$$H_m = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cdot E_m.$$

В результате получим:

$$\mathbf{H} = [\mathbf{n}_k \mathbf{e}_z] \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cdot E_m.$$

Задача 6. Плоская электромагнитная волна $\mathbf{E} = \mathbf{E}_m \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})$ распространяется в вакууме. Найти вектор \mathbf{H} как функцию времени в точке с радиусом-вектором $\mathbf{r} = 0$.

Решение

Искомый вектор $\mathbf{H} = \mathbf{H}_m \cos \omega t$, где \mathbf{H}_m можно найти из условия, что векторы \mathbf{E}_m , \mathbf{K}_m и \mathbf{k} составляют правую тройку, откуда $\mathbf{H}_m \uparrow\uparrow [\mathbf{k}\mathbf{E}_m]$. Кроме того, $\sqrt{\varepsilon_0}E_m = \sqrt{\mu_0}H_m$. Поэтому $\mathbf{H}_m = H_m e_H$, где e_H — орт вектора \mathbf{H}_m , равный $\frac{[\mathbf{k}\mathbf{E}_m]}{kE_m}$, и, следовательно,

$$H_m = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_m \cdot \frac{[\mathbf{k}\mathbf{E}_m]}{kE_m}.$$

В результате получим:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} [\mathbf{k}\mathbf{E}_m] \cos \omega t.$$

Задача 7. В вакууме распространяется плоская гармоническая линейно поляризованная электромагнитная волна частоты ω . Интенсивность волны равна I . Найдем амплитудное значение плотности тока смещения в этой волне.

Решение

По определению, плотность тока смещения

$$j_{\text{см}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

где $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$. Пусть

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_m \cos(\omega t - kx),$$

тогда амплитудное значение плотности тока смещения $j_{\text{см макс}} = \varepsilon_0 \omega E$. Остается найти E_m . Это делается с помощью формулы (Лекция 2, формула (25))²:

$$E_m = \sqrt{2I \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}},$$

и мы получим из предыдущих двух формул, что

$$j_{\text{см макс}} = \omega \sqrt{\frac{2\varepsilon_0 I}{c}},$$

где $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$.

1

$$\boxed{\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0} \cdot E_y = \sqrt{\mu \mu_0} \cdot H_z.}$$

(Лекция 1, формула (14))

2

$$I = \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} \cdot \frac{E_m^2}{2}.$$

(Лекция 2, формула (25))

Задача 8. В вакууме вдоль оси X распространяются две плоские электромагнитные волны, электрические составляющие которых изменяются по закону $E_1 = E_0 \cos(\omega t - kx)$ и $E_2 = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)$. Найти среднее значение плотности потока энергии.

Решение

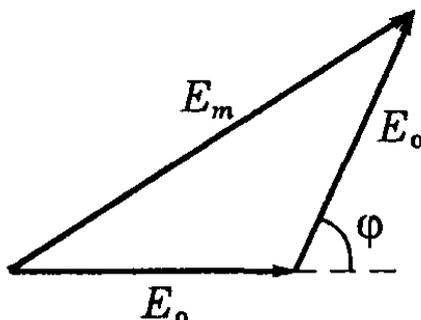


Рис. 3.

Исходим из соотношений $S = EH$ и $\sqrt{\varepsilon_0}E = \sqrt{\mu_0}H$. Отсюда

$$\langle S \rangle = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \langle E^2 \rangle,$$

где в любой точке $E^2 = E_m^2 \cos^2 \omega t$ (начальная фаза не существенна). Найдем E_m^2 . Согласно векторной (или фазовой) диаграмме эта амплитуда вектора \mathbf{E} является суммой векторов \mathbf{E}_0 , разность фаз между которыми равна φ (рис. 3). Из теоремы косинусов имеем $E_m^2 = 2(1 + \cos \varphi)E_0^2$. В результате искомая величина

$$\langle S \rangle = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} (1 + \cos \varphi) E_0^2,$$

где учтено, что $\langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$.

Задача 9. Стоячая волна. Пусть электрическая составляющая стоячей электромагнитной волны имеет вид $E_y = E_m \cos kx \cdot \cos \omega t$. Найти с помощью уравнений (Лекция 1, формула (12))³ выражение для магнитной составляющей этой волны $H_z(x, t)$.

Решение

Согласно второму уравнению (Лекция 1, формула (12)),

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = -\varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} = \varepsilon \varepsilon_0 \omega E_m \cos kx \cdot \sin \omega t.$$

Проинтегрировав это выражение по x , получим:

$$H_z = \varepsilon \varepsilon_0 v E_m \sin kx \cdot \sin \omega t + const,$$

где $v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}}$. Нас интересует только переменное поле, поэтому $const = 0$.

Учитывая связь $E_m \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0} = H_m \sqrt{\mu \mu_0}$ между амплитудами E_m и H_m , найдем:

$$H_z = H_m \sin kx \cdot \sin \omega t,$$

т.е. H_z имеет вид тоже стоячей волны, но сдвинутой в пространстве (по x) на четверть волны и по времени — на четверть периода.

³

$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu \mu_0 \dot{H}_z \quad \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\varepsilon \varepsilon_0 \dot{E}_y$ (Лекция 1, формула (12))

Задача 10. Эффект запаздывания. Источник S , испускающий электромагнитные сигналы с частотой ν_0 , движется с релятивистской скоростью v по прямой, отстоящей на некоторое расстояние от неподвижного наблюдателя P (рис. 4). Найти частоту сигналов, воспринимаемых наблюдателем в момент, когда:

- а) источник окажется в точке 0;
- б) наблюдатель увидит его в точке 0.

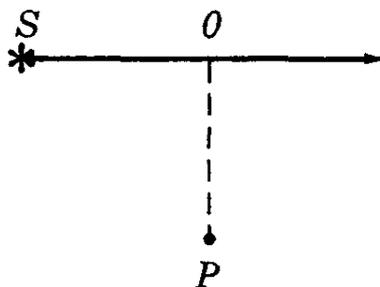


Рис. 4.

Решение

- а) В этот момент в точку P должны прийти сигналы, испущенные источником S левее точки 0, когда его скорость составляла некоторый угол α с прямой SP . Этот угол должен удовлетворять условию

$$\cos \alpha = \frac{v\tau}{c\tau} = \frac{v}{c},$$

где τ — время, за которое источник из точки S достигнет точки 0. За это же время сигналы достигнут P . Тогда, согласно (Лекция 2, формула (34))⁴,

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \left(\frac{v}{c}\right) \cos \alpha} = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cdot \beta} = \frac{\nu_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

- б) В этом случае будет наблюдаться чисто поперечный эффект Доплера:

$$\nu = \nu_0 \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Задача 11. Излучение диполя. Электромагнитная волна, излучаемая диполем, распространяется в вакууме так, что в волновой зоне на луче, перпендикулярном оси диполя, на расстоянии r от него интенсивность равна I_0 . Найти среднюю мощность P излучения диполя.

Решение

Прежде всего найдем мощность dP излучения, проходящего через кольцевую полоску dS на сфере радиуса r (рис. 5). Площадь этой полоски равна произведению ее длины $2\pi r \sin \vartheta$ на ширину $rd\vartheta$. Учитывая, что, согласно (Лекция 3, формула (41))⁵, интенсивность под углом ϑ относится к интенсивности под углом $\vartheta = 90^\circ$ как $\frac{I}{I_0} = \sin^2 \vartheta$, запишем

$$dP = IdS = I_0 \sin^2 \vartheta \cdot 2\pi r \sin \vartheta r d\vartheta.$$

4

$$\nu = \nu_0 \cdot \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - v_x/c} \quad (\text{Лекция 2, формула (34)})$$

5

$$I = \langle S \rangle \sin \vartheta \quad (\text{Лекция 3, формула (41)})$$

Проинтегрировав это выражение по ϑ от 0 до π , получим:

$$P = \left(\frac{8\pi}{3}\right) r^2 I_0.$$

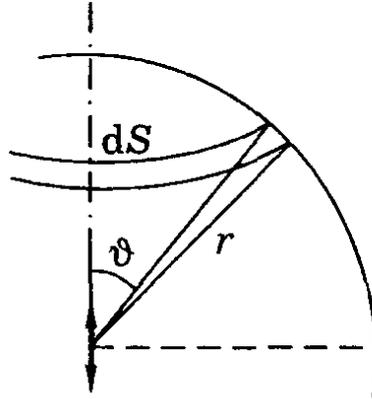


Рис. 5.

Задача 12. Эффект Доплера. Одна из спектральных линий, испускаемых, возбужденными ионами He^+ в состоянии покоя, имеет длину волны λ . Если эту линию наблюдать под углом α к пучку данных ионов, то обнаруживается ее доплеровское смещение $\Delta\lambda < 0$, причем $|\Delta\lambda| \ll \lambda$. Определим скорость ионов в пучке.

Решение

Так как $|\Delta\lambda| \ll \lambda$, то это значит, что ионы движутся с нерелятивистской скоростью и справедливо соотношение (Лекция 2, формула (38))⁶. Условие же $\Delta\lambda < 0$ означает согласно (Лекция 2, формула (38)), что $\cos \alpha > 0$, т. е. угол: $\alpha < \frac{\pi}{2}$. Искомая скорость

$$v = \frac{c|\Delta\lambda|}{\lambda \cos \alpha}.$$

Задача 13. Эффект Доплера. При наблюдении спектральной линии $\alpha = 0,51$ мкм в направлениях на противоположные края солнечного диска на его экваторе обнаружили различие в длинах волн на $\delta\lambda = 8,0$ пм. Найдем период T вращения Солнца вокруг собственной оси.

Решение

Так как данные края диска движутся при вращении Солнца в противоположных направлениях с одинаковой скоростью v , то доплеровское смещение этой линии будет одинаково по модулю, но противоположно по знаку. Поэтому суммарная разность, смещенных длин волн равна удвоенному доплеровскому смещению:

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = 2\frac{v}{c} = 2\frac{\omega R}{c} = \frac{2}{c} \cdot \frac{2\pi R}{T},$$

где ω – угловая скорость Солнца, R – его радиус ($\pm 7 \cdot 10^8$ м). Отсюда следует, что период вращения Солнца

$$T = \frac{4\pi R\lambda}{c\delta\lambda} = 25 \text{ суток}.$$

6

$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = -\frac{v_x}{c} = -\frac{v}{c} \cos \alpha$ (Лекция 2, формула (38))

2 Геометрическая оптика

Задача 14. Показать, что при преломлении в призме с малым преломляющим углом θ луч отклоняется от своего первоначального направления на угол $\alpha = (n - 1)\theta$ независимо от угла падения, если он также мал.

Решение

Вследствие малости углов падения (и преломления) синусы в законе Снелла⁷ можно опустить. Тогда условия преломления на передней и задней поверхностях призмы (рис.6) примут вид:

$$\vartheta_1 = n\vartheta'_1, \quad n\vartheta_2 = \vartheta'_2, \quad \vartheta'_1 + \vartheta_2 = \theta. \quad (2)$$

Искомый угол α , как видно из рисунка, равен

$$\alpha = (\vartheta_1 - \vartheta'_1) + (\vartheta'_2 - \vartheta_2). \quad (3)$$

После подстановки углов из (2) в (3) получим

$$\alpha = (n - 1)\theta.$$

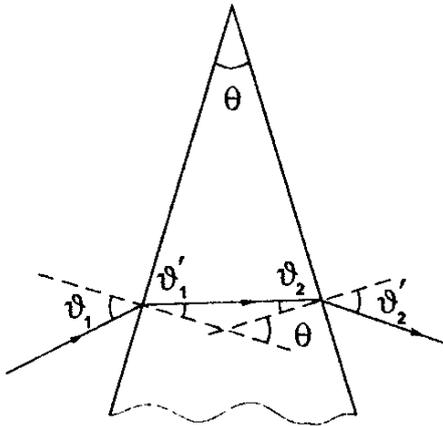


Рис. 6

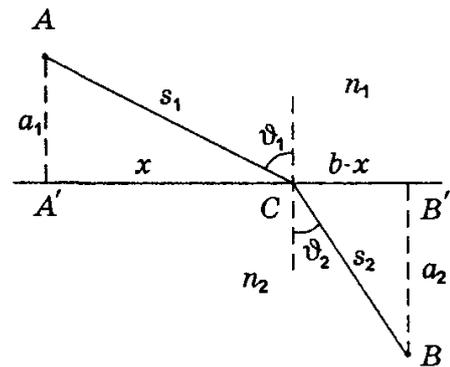


Рис. 7

Задача 15. Принцип Ферма. Вывести с помощью этого принципа закон преломления света на границе раздела двух прозрачных диэлектриков с показателями преломления n_1 и n_2 .

Решение

Найдем точку C (рис.7), в которой должен преломиться луч, распространяясь от A к B , чтобы оптическая длина пути L была экстремальной. Пусть отрезок $A'B' = b$, тогда, как видно из рисунка,

$$L = n_1 s_1 + n_2 s_2 = n_1 \sqrt{a_1^2 + x^2} + n_2 \sqrt{a_2^2 + (b - x)^2}.$$

Продифференцируем это выражение по x и приравняем производную нулю:

$$\frac{dL}{dx} = \frac{n_1 x}{\sqrt{a_1^2 + x^2}} - \frac{n_2 (b - x)}{\sqrt{a_2^2 + (b - x)^2}} = n_1 \frac{x}{s_1} - n_2 \frac{b - x}{s_2} = 0.$$

7

$$n_1 \sin \vartheta_1 = n_2 \sin \vartheta_2$$

Множители при n_1 и n_2 равны соответственно $\sin \vartheta_1$ и $\sin \vartheta_2$. Таким образом, получаем

$$n_1 \sin \vartheta_1 = n_2 \sin \vartheta_2,$$

что и требовалось.

Задача 16. Вывести с помощью принципа Ферма формулу преломления параксиальных лучей на сферической поверхности радиуса R , разделяющей среды с показателями преломления n и n' :

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{R}.$$

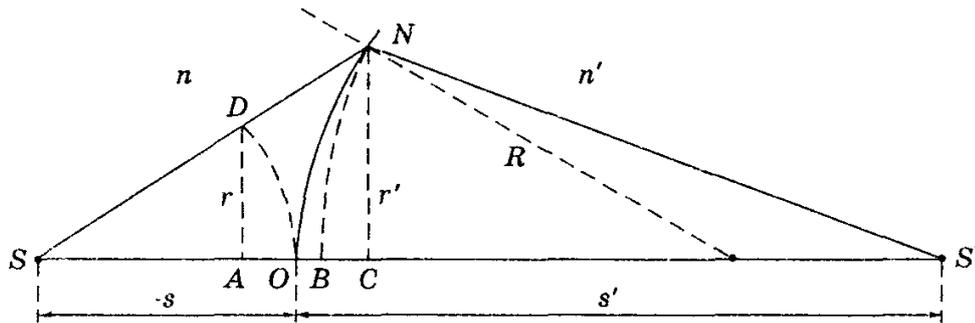


Рис. 8

Решение

Пусть S — точечный источник света и S' — его изображение (рис. 8). По принципу Ферма оптические длины всех лучей, вышедших из S и собравшихся в S' , должны быть одинаковы. Проведем дуги окружностей из центров S и S' радиусами SO и $S'O$. Тогда оптические пути DN и OB должны быть равны:

$$n \cdot DN = n' \cdot OB. \quad (4)$$

Для параксиальных лучей $DN \approx AO + OC$. Найдем последние два отрезка. Сначала AO : из рисунка видно, что

$$r^2 = (SD)^2 - (SA)^2 = (SD + SA)(SD - SA) \approx 2(-s)AO,$$

откуда

$$AO = \frac{r^2}{(-2s)}.$$

Аналогично

$$OC = \frac{r'^2}{2R}.$$

Отсюда находим сумму $AO + OC$, т. е. DN . В свою очередь

$$OB = OC - BC = \frac{r'^2}{2R} - \frac{r'^2}{2s'}.$$

Подставив это выражение в (4) и имея в виду, что $r' \approx r$, получим искомое соотношение.

Задача 17. Тонкая линза. Найти с помощью формулы преломления на сферической границе раздела (см. предыдущую задачу) формулу тонкой линзы в воздухе.

Решение

Применим указанную формулу последовательно для передней и задней поверхностей линзы. Для передней поверхности (рис.9), полагая, что за ней всюду среда с показателем преломления n , запишем:

$$\frac{n}{d + s_0} - \frac{1}{s} = \frac{n - 1}{R_1}.$$

Для задней поверхности линзы источник S_0 находится справа (он мнимый), и мы имеем:

$$\frac{1}{s'} - \frac{n}{s_0} = \frac{1 - n}{R_2},$$

где $s_0 > 0$, а $R_2 < 0$ (в соответствии с правилом знаков).

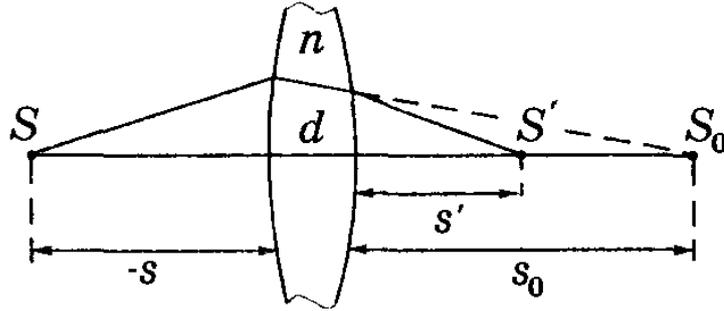


Рис. 9

Сложив отдельно левые и правые части этих равенств с учетом того, что толщина линзы d пренебрежимо мала, получим:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Задача 18. Свет интенсивности I_0 падает нормально на идеально прозрачную пластинку. Считая, что коэффициент отражения каждой поверхности ее $\rho = 0,05$, найти интенсивность I прошедшего через пластинку света с учетом:

- а) только однократных отражений;
- б) многократных отражений.

Решение

- а) После первой поверхности интенсивность будет равна $I_0(1 - \rho)$, после второй поверхности

$$I = I_0(1 - \rho)^2 \approx I_0(1 - 2\rho) = 0,9I_0.$$

- б) После прохождения двух поверхностей интенсивность равна $I_0(1 - \rho)^2$. При этом часть $I_0(1 - \rho)\rho$ отражается от второй поверхности и затем, отразившись от первой поверхности, станет равной $I_0(1 - \rho)\rho^2$. И световая волна при прохождении второй поверхности будет иметь интенсивность $I_0(1 - \rho)^2\rho^2$ — это после двукратного отражения. Следующая волна испытает четырехкратное отражение и выйдет из пластинки с интенсивностью $I_0(1 - \rho)^2\rho^4$. Затем надо учесть вклады от шести-, восьми- и т. д. кратных отражений.

В сумме интенсивность проходящего света можно представить как

$$I = I_0(1 - \rho)^2(1 + \rho^2 + \rho^4 + \dots) = I_0 \frac{(1 - \rho)}{(1 + \rho)} \approx 0,9I_0,$$

где учтено, что сумма геометрической прогрессии

$$1 + \rho^2 + \rho^4 + \dots = \frac{1}{(1 - \rho^2)}.$$

Полученный результат практически совпадает с найденным в предыдущем пункте (отличие составляет всего $\frac{\Delta I}{I} \approx \rho^2 = 0,25\%$). Поэтому, как правило, многократными отражениями пренебрегают.

3 Волновая оптика

3.1 Интерференция света

Задача 19. Убедимся, что для получения интерференционной картины с шириной полос, например, $\Delta x = 0,5$ мм при размерах установки $a = 50$ см, $b = 100$ см преломляющий угол бипризмы Θ должен быть весьма малым.

Решение

Будем считать, что показатель преломления стекла $n = 1,5$, и длина волны света $\lambda = 0,5$ мкм. Из (Лекция 9, формула (26))⁸ следует, если учесть, что угол $\alpha = (n - 1)\Theta$:

$$\Theta = \frac{\lambda \left(1 + \frac{b}{a}\right)}{2(n - 1)\Delta x} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ рад} \approx 10 \text{ угл. мин.}$$

Найдем, кстати, и ширину зоны интерференции на экране:

$$x = b \cdot 2\alpha = 2(n - 1)\Theta b = 3 \text{ мм.}$$

Видно, что $x \ll b$. Это характерно для многих интерференционных схем, что мы ранее и учитывали, упрощая некоторые расчеты.

Задача 20. Зеркало Ллойда. В этой интерференционной схеме интерферируют световая волна 1, исходящая непосредственно из источника S (узкой ярко освещенной щели), и волна 2, отраженная от зеркала 3 (рис. 15). На экране \mathcal{E} образуется система интерференционных полос. Найти длину волны света, если известно, что расстояние от источника до экрана равно ℓ , ширина интерференционной полосы Δx , а после того, как источник S отодвинули от плоскости зеркала на Δd , ширина полос уменьшилась в η раз.

Решение

Согласно (Лекция 7, формула (10))⁹, расстояние d между источником S и его мнимым изображением S' равно $d = \frac{\lambda \ell}{\Delta}$. После отодвигания источника S это расстояние стало

$$d + 2\Delta d = \frac{\lambda \ell}{\left(\frac{\Delta x}{\eta}\right)} = \frac{\eta \lambda \ell}{\Delta x}.$$

⁸

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2\alpha} \left(1 + \frac{b}{a}\right) \quad (\text{Лекция 9, формула (26)})$$

⁹

$$\Delta x = \frac{\lambda \ell}{d} \quad (\text{Лекция 7, формула (10)})$$

Вычтя первое равенство из второго, получим:

$$\lambda = \frac{2\Delta x \Delta d}{\ell(\eta - 1)}$$

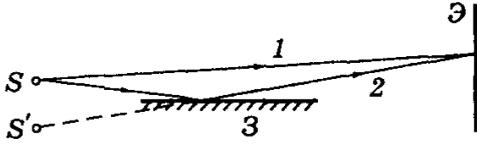


Рис. 10

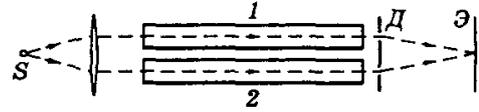


Рис. 11

Задача 21. Интерферометр Рэлея. Его схема показана на рис. 11. Здесь S — узкая щель, освещаемая монохроматическим светом с длиной волны λ , 1 и 2 — две одинаковые трубки с воздухом, длина каждой из которых равна ℓ , торцы — прозрачные, D — диафрагма с двумя щелями. Когда воздух в трубке 1 постепенно заменили газом X , то интерференционная картина на экране \mathcal{E} сместилась вверх на N полос. Зная показатель преломления n_0 воздуха, определить показатель преломления n газа X .

Решение

Смещение на N полос означает, что оптическая разность хода Δ лучей, падающих на щели, стала равной $N\lambda$, т. е. $\ell n - \ell n_0 = N\lambda$. Отсюда

$$n = n_0 + \frac{N\lambda}{\ell}.$$

Смещение полос вверх свидетельствует о том, что и максимум нулевого порядка сместился вверх. При этом увеличение геометрической длины луча 2 компенсируется увеличением оптической длины луча 1.

Интерферометр Рэлея используется для измерения малых разностей показателей преломления прозрачных веществ (газов и жидкостей).

Задача 22. Бипризма Френеля. Найти выражения, определяющие условия для ширины s щели и степени монохроматичности $\frac{\lambda}{\Delta\lambda}$, которые обеспечивали бы получение интерференционной картины на всей ширине зоны интерференции (в месте расположения экрана), причем с достаточно хорошей видностью. Расстояния от бипризмы до щели и экрана равны соответственно a и b , преломляющий угол бипризмы θ , показатель преломления стекла n .

Решение

Для выполнения указанных требований следует, согласно формулам

$$\ell_{\text{ког}} \geq 2\Delta \quad \text{и} \quad h_{\text{ког}} \geq 2d,$$

обеспечить должные значения длины и ширины когерентности, $\ell_{\text{ког}}$ и $h_{\text{ког}}$. Для получения интерференционных полос надо, чтобы $h_{\text{ког}}$ в месте расположения бипризмы (где волна расщепляется на две части) превышала вдвое расстояние d' между лучами, которые затем сходятся вблизи центра интерференционной картины на экране. В этом случае складываемые колебания будут достаточно когерентны для создания интерференционных полос с хорошей видностью. Итак, надо чтобы $h_{\text{ког}} \geq 2d'$. Здесь

$$h_{\text{ког}} \approx \frac{\lambda}{\varphi} = \frac{\lambda}{\left(\frac{s}{a}\right)},$$

s — искомая ширина щели. Расстояние же d' найдем с помощью рис. 12, откуда следует, что

$$\frac{d'}{d} = \frac{b}{(a+b)},$$

где $d = a \cdot 2\alpha$, α — угол отклонения луча, после прохождения через бипризму — он одинаков для всех лучей: $\alpha = (n-1)\theta$ (см. задачу 14).

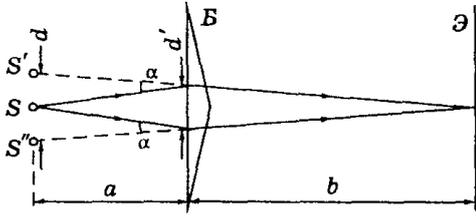


Рис. 12

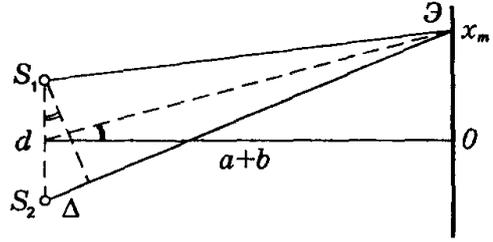


Рис. 13

После подстановки выражений для $h_{\text{ког}}$ и d' в исходную формулу получим

$$\frac{\lambda\alpha}{s} \geq 2 \frac{b}{a+b} a \cdot 2\alpha,$$

откуда

$$s \leq \frac{\lambda}{4\alpha} \left(1 + \frac{a}{b}\right).$$

Теперь второе условие — относительно $\frac{\lambda}{\Delta\lambda}$. Необходимо, чтобы $l_{\text{ког}} \geq 2\Delta$. Здесь

$$l_{\text{ког}} \approx \frac{\lambda}{\Delta\lambda},$$

а Δ — оптическая разность хода, которая должна соответствовать получению максимума наибольшего порядка — на краю зоны интерференции в месте расположения экрана. Пусть полуширина зоны интерференции в этом месте равна x_m , тогда с помощью рис. 13 из подобия треугольников получим:

$$\frac{\Delta}{d} = \frac{x_m}{(a+b)},$$

где $d = a \cdot 2\alpha$, $x_m = b \cdot \alpha$ (см.рис. 14). После подстановки выражений для $l_{\text{ког}}$ и Δ в исходную формулу получим:

$$\frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \geq 2 \frac{x_m d}{a+b} = 4 \frac{ab}{a+b} \alpha^2,$$

откуда

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} \geq \frac{4\alpha^2}{\lambda} \frac{ab}{a+b}.$$

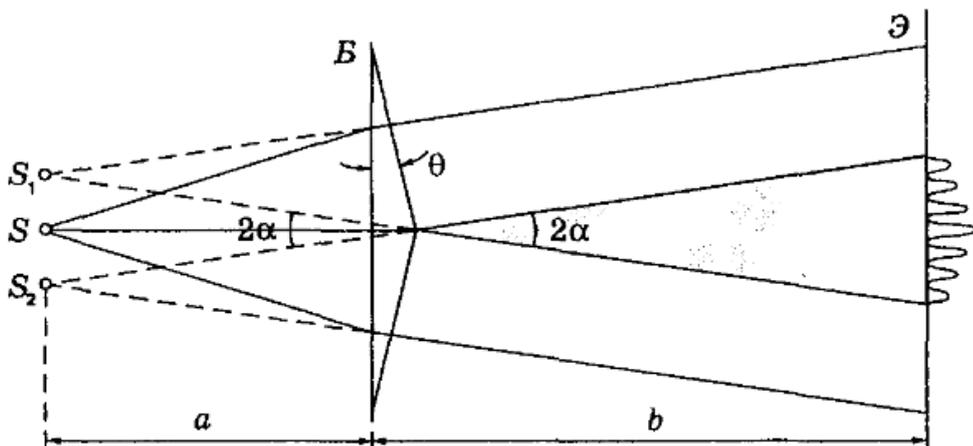


Рис. 14

Задача 23. Интерференция от клина. Свет с длиной волны λ от удаленного точечного источника падает нормально на поверхность стеклянного клина с малым углом раствора. В отраженном свете наблюдают систему интерференционных полос. Расстояние между соседними максимумами на поверхности клина равно Δx . Найти:

- угол между гранями клина;
- длину когерентности, если исчезновение интерференционных полос наблюдается на расстоянии ℓ от вершины клина ($\ell \gg \Delta x$).

Решение

- При переходе к соседнему максимуму оптическая разность хода Δ должна равняться λ , т. е.

$$2\Delta x \theta n = \lambda.$$

Здесь учтено, что угол клина весьма мал. Отсюда

$$\theta = \frac{\lambda}{2n\Delta x}.$$

- Запишем условие исчезновения интерференционной картины ($\ell_{\text{ког}} \leq \Delta$), пренебрегая “потерей” полуволны, поскольку в нашем случае $\ell \gg \Delta x$. Тогда

$$\ell_{\text{ког}} \approx 2\ell\theta n.$$

Подставив в эту формулу выражение для θ из предыдущего пункта, получим:

$$\ell_{\text{ког}} \approx \frac{\lambda\ell}{\Delta x}.$$

Задача 24. Найдем радиус 5-го светлого кольца, если радиус кривизны выпуклой поверхности линзы $R = 16$ см и контакт ее с плоской поверхностью стекла идеальный (в точке).

Решение

Длина волны света $\lambda = 0,50$ мкм. Условие максимумов в данном случае имеет вид

$$2b + \frac{\lambda}{2} = m\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

где b — толщина зазора в месте m -го максимума (заметим, что если бы мы взяли $-\frac{\lambda}{2}$, то значения m надо было начинать с нуля). Согласно (Лекция 9, формула (38))¹⁰,

$$2b = \frac{r_m^2}{R}.$$

Из этих двух соотношений следует, что искомый радиус

$$r_m = \sqrt{\left(m - \frac{1}{2}\right) \lambda R} = 0,6 \text{ мкм}.$$

¹⁰

$$r^2 = 2bR$$

(Лекция 9, формула (38))

Задача 25. Плосковыпуклая линза, радиус кривизны сферической поверхности которой $R = 60$ мм, соприкасается со стеклянной пластинкой. Оценим радиус наблюдаемой в отраженном свете интерференционной картины, если длина волны света $\lambda = 0,60$ мкм и $\Delta\lambda = 0,06$ мкм.

Решение

Свет падает практически нормально. При нормальном падении света ограничивать интерференционную картину будет только длина когерентности $l_{\text{ког}}$. Кольца исчезают при условии $2b \approx l_{\text{ког}}$, где b — ширина зазора в месте исчезновения колец. Согласно (Лекция 9, формула (38)), $r^2 = 2bR$, а $l_{\text{ког}} \approx \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$. Из этих формул получим

$$\frac{r^2}{R} \approx \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda},$$

откуда

$$r \approx \lambda \sqrt{\frac{R}{\Delta\lambda}} = 0,6 \text{ мм.}$$

Число видимых колец равно $m = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \approx 10$. Этот результат можно получить и с помощью (Лекция 9, формула (39))¹¹.

3.2 Дифракция света

Задача 26. Плоская световая волна с $\lambda = 0,64$ мкм и интенсивностью I_0 падает нормально на круглое отверстие радиуса $r = 1,2$ мм. Найти интенсивность в центре дифракционной картины на экране, отстоящем от отверстия на расстояние $b = 1,5$ м.

Решение

Прежде всего вычислим число m зон Френеля, укладывающихся в данном отверстии. Согласно формуле (Лекция 11, формула (23))¹²

$$m = \frac{r^2}{\lambda b} = 1,5.$$

Это значение соответствует вектору A на рис. 15, где приведена “действующая” часть первого витка спирали Френеля. Из этого рисунка сразу видно, что $A\sqrt{2}A_0$, а значит интенсивность $I = 2I_0$.

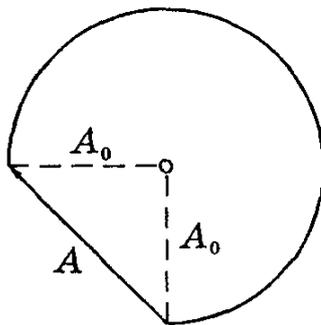


Рис. 15

¹¹

$$r_m = \sqrt{m\lambda R}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{Лекция 9, формула (39)})$$

¹²

$$r_m = \sqrt{m\lambda b}. \quad (\text{Лекция 11, формула (23)})$$

Задача 27. На круглое отверстие радиуса $r = 1,0$ мм нормально падает плоская световая волна с $\lambda = 0,50$ мкм. Определим число зон Френеля, которые укладываются в этом отверстии для точки наблюдения P , расположенной на оси отверстия и отстоящей от него на расстоянии $b = 80$ см.

Решение

Поскольку падающая волна плоская, следует воспользоваться формулой (Лекция 11, формула (23)), откуда находим

$$m = \frac{r^2}{\lambda b} = \frac{(10^{-3})^2}{0,5 \cdot 10^{-6} \cdot 0,8} = 2,5.$$

т.е. в данном случае в отверстии укладывается две с половиной зоны Френеля.

Площади зон (при достаточно малых m) $\Delta S = \pi r_m^2 - \pi r_{m-1}^2$, или

$$\Delta S = \pi \lambda \frac{ab}{a+b}, \quad (5)$$

т.е. практически одинаковы. Но амплитуды колебаний, приходящих в точку P от этих зон, монотонно и слабо убывают из-за увеличения расстояния r до точки P от каждой следующей зоны и роста угла ϑ между нормалью к элементам зоны и направлением на точку P .

Фазы колебаний, возбуждаемых в точке P соседними зонами, отличаются на π , поэтому векторы-амплитуды нечетных зон противоположны по направлению векторам-амплитудам от четных зон. И результирующая амплитуда, а значит и интенсивность, зависит от того, четное или нечетное число m зон Френеля уместится в отверстии — для точки наблюдения P . Если число зон нечетное, в точке P наблюдается максимум, если же число зон четное, то — минимум.

Число зон m в отверстии мы можем изменять. Например, для увеличения числа зон надо или расширить отверстие, или приблизить экран к нему, или то и другое вместе. Это непосредственно вытекает из формулы (Лекция 11, формула (22))¹³, если под r_m понимать радиус отверстия.

Задача 28. Спираль Френеля. Плоская световая волна интенсивности I_0 падает нормально на экран, в котором для точки наблюдения P открыты только внутренняя половина 1-й зоны Френеля и вторая (внешняя) половина 2-й зоны Френеля. Найдем интенсивность света в точке P .

Решение

Принимая первый виток спирали Френеля за окружность, построим соответствующие векторы \vec{A}_1 и \vec{A}_2 (рис. 16),

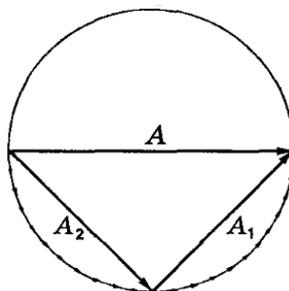


Рис. 16

и ответ очевиден: $A = 2A_\infty$, откуда $I = 4I_0$.

¹³

$$r_m = \sqrt{m\lambda \frac{ab}{a+b}}$$

(Лекция 11, формула (22))

Задача 29. Плоская световая волна интенсивности I_0 падает нормально на экраны, показанные на рис. 17. Найдем интенсивность света в точке P , расположенной за экранами, если в случае а) открыто $\frac{3}{4}$ волновой поверхности, а в случае б) закругленная часть экрана является границей 1-й зоны Френеля для точки P .

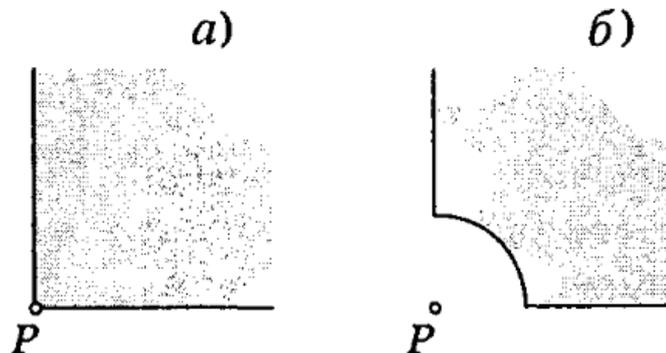


Рис. 17

Решение

Прежде всего ясно, что в этих случаях дифракционная картина (чередующиеся светлые и темные полосы) не будет обладать круговой симметрией, она значительно сложнее. Но расчет для указанной точки P оказывается достаточно простым. Действительно, в случае а) от каждой зоны Френеля будет действовать только $\frac{3}{4}$ ее части, следовательно, амплитуда в точке P будет $A = \left(\frac{3}{4}\right) A_\infty$ и интенсивность $I = \left(\frac{3}{4}\right)^2 I_0$.

В случае же б) результирующая амплитуда A в точке P будет равна разности амплитуды от первой зоны Френеля A_1 и амплитуды от всех остальных зон $\left(\frac{3}{4}\right) A_{\text{ост}}$, где $A_{\text{ост}} \approx A_\infty$. Подчеркнем: именно разности, поскольку обеим амплитудам на спирали Френеля (см. рис. 18) соответствуют векторы, противоположно направленные, т. е. имеющие разность фаз π . Итак, результирующая амплитуда в точке P равна

$$A = A_1 - \left(\frac{3}{4}\right) A_{\text{ост}} = 2A_\infty - \left(\frac{3}{4}\right) A_\infty = \left(\frac{5}{4}\right) A_\infty.$$

Отсюда интенсивность $I = \left(\frac{5}{4}\right)^2 I_0$.

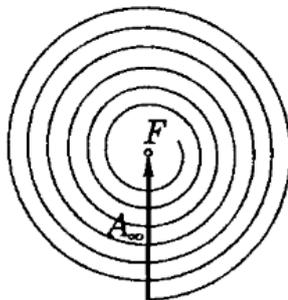


Рис. 18

Задача 30. Дифракцию плоской волны от края непрозрачной полуплоскости наблюдают на экране \mathcal{E} , отстоящем от полуплоскости N на расстояние $\ell = 100$ см. Длина волны света $\lambda = 500$ нм. Найдем расстояние Δx между первыми двумя максимумами на экране \mathcal{E} и интенсивность первого максимума, если интенсивность падающего света равна I_0 .

Решение

Согласно формуле (Лекция 12, формула (26))¹⁴

$$\Delta x = x_2 - x_1 = (s_2 - s_1) \sqrt{\frac{\ell \lambda}{2}} = (2,3 - 1,2) \sqrt{\frac{1 \cdot 500 \cdot 10^{-9}}{2}} = 5,5 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,55 \text{ мм}.$$

С помощью рис. 19 и линейки находим, что отношение амплитуды 1-го максимума, т. е. расстояния между точками G и F_2 , к амплитуде падающего света $F_1 F_2$ равно $\eta \approx 1,175$. Следовательно, интенсивность 1-го максимума

$$I_1 = \eta^2 I_0 = 1,37 I_0.$$

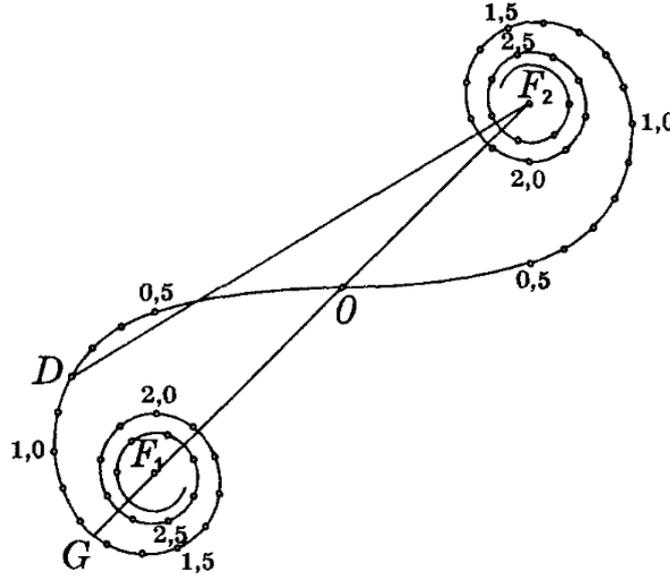


Рис. 19

Задача 31. На прямолинейную щель в непрозрачной преграде падает нормально плоская световая волна (рис. 20). Длина волны $\lambda = 0,60 \text{ мкм}$. Расстояние от щели до экрана \mathcal{E} равно $\ell = 50 \text{ см}$. Найдем минимальную ширину b щели, при которой в точке P интенсивность будет максимальной.

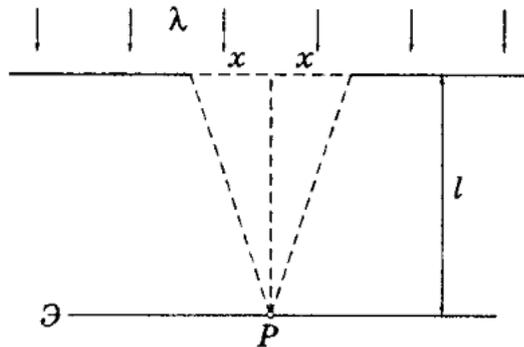


Рис. 20

Решение

Это означает, что амплитуда колебаний в точке P должна быть максимальной, т. е. соответствующей рис. 21, а. При этом параметр s должен быть равным (см. рис. 19)

¹⁴

$$s = x \sqrt{\frac{2}{\ell \lambda}}$$

(Лекция 12, формула (26))

$s \approx 1,3$. Согласно формуле (Лекция 12, формула (26)) этому значению параметра s отвечает расстояние $x = s\sqrt{\frac{\ell\lambda}{2}} = 0,5$ мм. Значит, искомая ширина щели $b = 2x = 1$ мм.

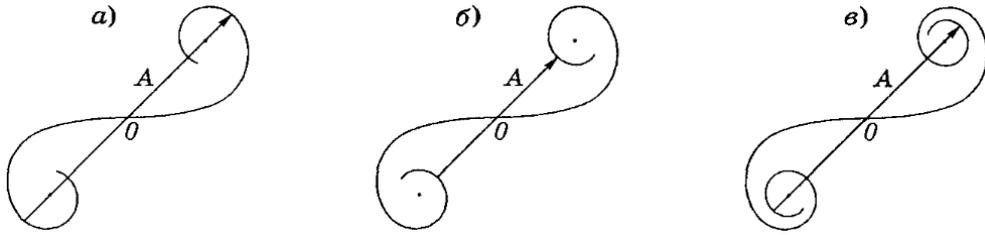


Рис. 21

Задача 32. Дифракция Фраунгофера от щели. Плоская световая волна с $\lambda = 0,60$ мкм падает нормально на грань стеклянного клина с углом раствора $\theta = 15^\circ$ и показателем преломления $n = 1,5$. На противоположной непрозрачной грани клина имеется прозрачная щель шириной $b = 10$ мкм, параллельная ребру клина. Пренебрегая отражениями, найти:

- угол ϑ_0 между направлением на центральный фраунгоферов максимум и направлением падающего света;
- угловую ширину центрального максимума.

Решение

- Для центрального максимума (максимума порядка $m = 0$) оптические пути всех лучей от одной пунктирной прямой до другой (рис. 11) должны быть одинаковы. Это значит, что оптическая длина ломаного отрезка AB не должна зависеть от x , т.е.

$$n \cdot x \sin \theta + (b - x) \sin \varphi = \text{const.}$$

Сгруппируем слагаемые, содержащие x , тогда

$$(n \cdot \sin \theta - \sin \varphi)x + b \sin \varphi = \text{const.}$$

Чтобы левая часть этого равенства не зависела от x , выражение в скобках перед x должно быть равно нулю. Отсюда

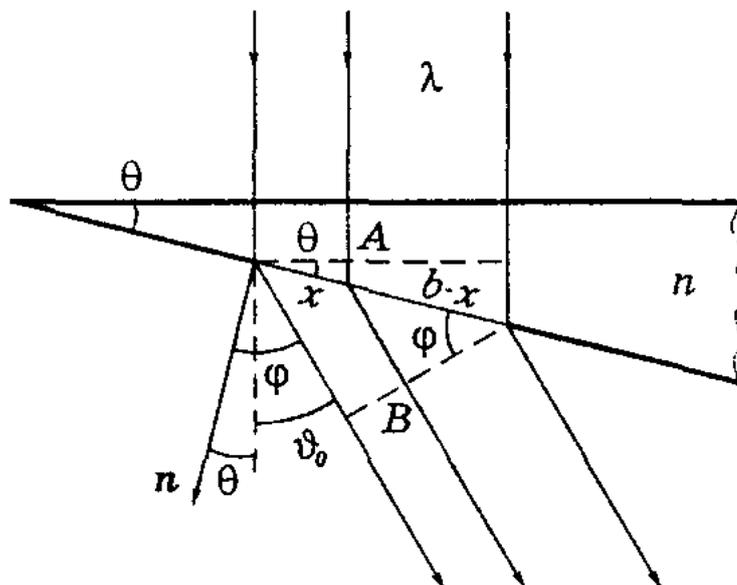


Рис. 22

$$n \sin \theta = \sin \varphi.$$

Так как $\varphi = \theta + \vartheta_0$, то искомый угол

$$\vartheta_0 = \arcsin(n \sin \theta) - \theta \approx 8^\circ.$$

- б) Условие минимумов, ближайших к максимуму нулевого порядка, должно соответствовать разности хода колебаний от краев щели в одну длину волны, или согласно рис. 24

$$b(\sin \varphi - n \sin \theta) = \pm \lambda.$$

Отсюда при знаке “+” находим φ_+ , а при знаке “-” φ_- , и значит

$$\Delta\varphi = \varphi_+ - \varphi_- = \vartheta_+ - \vartheta_- = \Delta\vartheta = 7,3^\circ.$$

Задача 33. Выясним, с каким видом дифракции (френелевой или фраунгоферовой) мы имеем дело, если параллельный пучок света с длиной волны $\lambda = 0,6$ мкм падает нормально на круглое отверстие диаметром $D = 1,0$ мм, образуя дифракционную картину на экране, отстоящем от отверстия на расстояние $\ell = 50$ см.

Решение

В этом случае параметр

$$p = \frac{D^2}{\ell\lambda} = \frac{(10^{-3})^2}{0,5 \cdot 0,6 \cdot 10^{-6}} \approx 3$$

Согласно критерию (Лекция 12, формула (28))¹⁵ это соответствует дифракции Френеля. И расчет дифракционной картины будет правильным, если его проводить по формулам дифракции Френеля.

Задача 34. Найдем диаметр d в мм центрального светлого пятна на экране, если диаметр отверстия $D = 1,0$ мм, фокусное расстояние $f = 50$ см и длина волны света $\lambda = 0,5$ мкм. Экран находится в фокальной плоскости линзы.

Решение

Освещенность светлого центрального пятна по мере увеличения угла дифракции ϑ монотонно падает (см. рис. 23) и при визуальном наблюдении по контрасту это пятно кажется меньше. Его «диаметр» d приближенно можно считать равным радиусу первого темного кольца, т. е. $d \approx f\vartheta$. Воспользовавшись формулой (Лекция 12, формула (29))¹⁶, получим

$$d \approx 1,22 \frac{\lambda f}{D} = 1,22 \frac{0,5 \cdot 10^{-6} \cdot 0,5}{10^{-3}} \approx 0,3 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,3 \text{ мм}.$$

¹⁵

$p \ll 1$ – дифракция Фраунгофера,
 $p \sim 1$ – дифракция Френеля, (Лекция 12, формула (28))
 $p \gg 1$ – приближение геометрической оптики.

¹⁶

$$\vartheta_1 = 1,22 \frac{\lambda}{D}$$

(Лекция 12, формула (29))

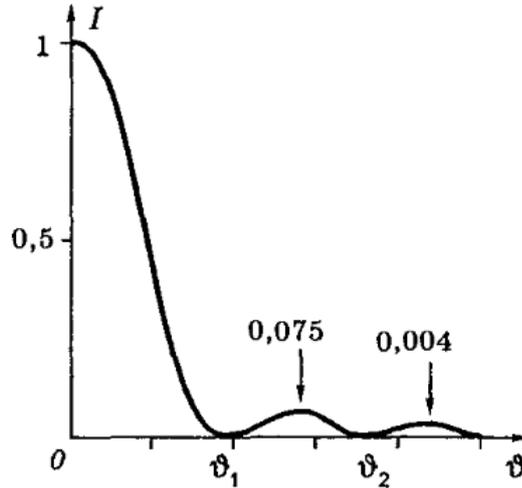


Рис. 23

Задача 35. Оценим дифракционное уширение «параллельного» лазерного пучка с исходным диаметром $D_0 = 2$ мм на расстоянии $\ell = 100$ м от лазера, если длина волны света $\lambda = 0,60$ мкм.

Решение

Из-за дифракционной расходимости интересующий нас диаметр пучка оказывается равным

$$D \approx \ell \delta\Theta \approx \frac{\ell \lambda}{D_0} = \frac{100 \cdot 0,6 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-3}} = 30 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 30 \text{ мм}.$$

Как видно, дифракционное уширение весьма значительно.

Задача 36. Свет с длиной волны $\lambda = 0,53$ мкм падает на прозрачную дифракционную решетку с периодом $d = 1,50$ мкм. Найти угол с нормалью к решетке, под которым образуется максимум *наибольшего* порядка, если свет падает на решетку под углом $\vartheta_0 = 60^\circ$ к нормали.

Решение

Максимуму наибольшего порядка должна отвечать максимальная разность хода Δ между соответствующими лучами 1 и 2 от соседних щелей, как показано на рис. 24. Для этого надо, чтобы

$$\Delta = AB + BC = d(\sin \vartheta_0 + \sin \vartheta_m) = m\lambda. \quad (6)$$

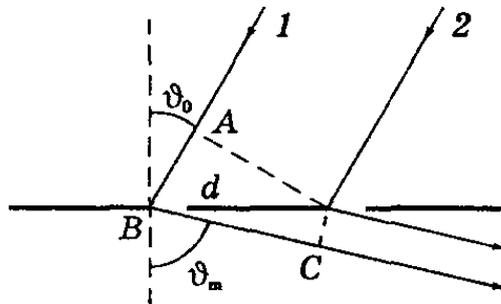


Рис. 24

Сначала найдем максимальное значение m . Учитывая, что ϑ_m не может превосходить $\frac{\pi}{2}$, положим $\sin \vartheta_m = 1$. Тогда

$$m_{\text{макс}} = \left[\frac{d}{\lambda} (\sin \vartheta_0 + 1) \right] = [5,3] = 5, \quad (7)$$

где квадратные скобки означают, что от полученного числового значения надо взять только целую часть. Остается подставить $m_{\text{макс}}$ в (6), и мы получим:

$$\sin \vartheta_m = \frac{m\lambda}{d} - \sin \vartheta_0 = 0,9.$$

Откуда $\vartheta_m = 64^\circ$.

Задача 37. Найдем отношение периода решетки к ширине щели, $\frac{d}{b}$, при котором пропадает главный максимум 3-го порядка.

Решение

В этом направлении — под углом дифракции ϑ — должны выполняться два условия:

$$d \sin \vartheta_x = \pm 3\lambda, \quad b \sin \vartheta_x = \pm \lambda.$$

Из отношения этих двух равенств находим: $\frac{d}{b} = 3$. Это значит, что в пределах основного дифракционного максимума мы будем наблюдать два главных максимума. Третий попадет на дифракционный минимум и, значит, пропадет.

Задача 38. Разрешающая способность и угловая дисперсия решетки. Свет падает нормально на дифракционную решетку, ширина которой $h = 20$ мм. При достаточно малых углах дифракции, когда $\cos \vartheta \approx 1$, угловая дисперсия решетки $D = 5,0$ угл. мин/нам. Найти (согласно критерию Рэлея) максимально возможную разрешающую способность решетки в этих условиях.

Решение

В соответствии с критерием Рэлея разрешающая способность

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN.$$

Угловая же дисперсия

$$D = \frac{d\vartheta}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos \vartheta}.$$

Поскольку в нашем случае $\cos \vartheta \approx 1$, то дисперсия

$$D = \frac{m}{d}.$$

Из этих двух формул находим

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{m}{d}Nd = Dh = \frac{5 \cdot 10^9}{60 \cdot 57,3} 20 \cdot 10^{-3} = 3 \cdot 10^4.$$

Задача 39. Дебайграмма. При прохождении узкого пучка рентгеновских лучей с длиной волны $\lambda = 17,8$ пм через поликристаллический образец, на экране, расположенном на расстоянии $\ell = 15$ см от образца, возникает система концентрических дифракционных колец-максимумов. Определить радиус светлого кольца, соответствующего второму порядку отражения от системы плоскостей с межплоскостным расстоянием $d = 155$ пм.

Решение

Согласно формуле Брэгга-Вульфа

$$2d \sin \alpha = \lambda. \quad (8)$$

Угол скольжения α найдем с помощью рис. 25, откуда видно, что

$$r = \ell \operatorname{tg} 2\alpha. \quad (9)$$

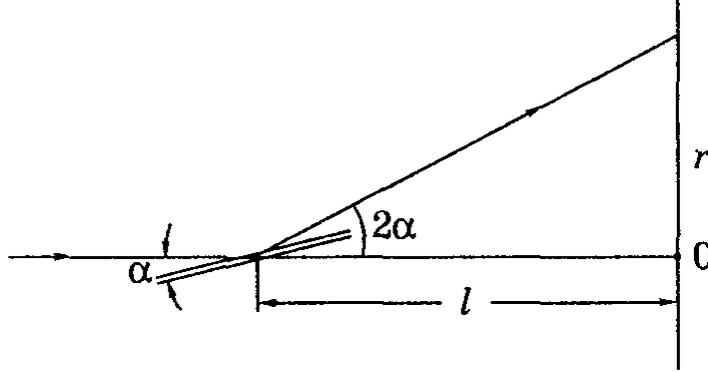


Рис. 25

Преобразуем $\operatorname{tg} 2\alpha$ через $\sin \alpha$:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 2}}, \quad (10)$$

где $\sin \alpha$ определяется уравнением (8).

Решив совместно эти три уравнения, получим:

$$r = \frac{\ell}{\sqrt{\left(\frac{d}{m\lambda}\right)^2 - \frac{1}{2}}} = 3,5 \text{ см},$$

где $m = 2$.

3.3 Поляризация

Задача 40. Закон Малюса. Линейно-поляризованный световой пучок падает на поляризатор, плоскость пропускания которого вращается вокруг оси пучка с угловой скоростью ω . Найти световую энергию W , проходящую через поляризатор за один оборот, если поток энергии в падающем пучке равен Φ_0 .

Решение

Согласно закону Малюса $\Phi = \Phi_0 \cos^2 \omega t$. Тогда энергию, проходящую через поляризатор за один оборот, т. е. за период $T = \frac{2\pi}{\omega}$, определим следующим выражением:

$$W = \int_0^T \Phi_0 \cos^2 \omega t \, dt = \frac{\Phi_0}{\omega} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi.$$

Здесь введено обозначение $\varphi = \omega t$. Имея в виду, что

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi = \langle \cos^2 \varphi \rangle \cdot 2\pi = \pi,$$

получим в результате

$$W = \frac{\pi\Phi_0}{\omega}.$$

Задача 41. Закон Брюстера. Естественный свет падает под углом Брюстера на поверхность воды. При этом ρ -часть падающего света отражается. Найдём степень поляризации P преломленного света.

Решение

Пусть световой поток падающего света равен Φ_0 . Степень поляризации преломленного света, по определению

$$P = \frac{\Phi_{\text{пол}}}{\Phi_{\text{прел}}} = \frac{\rho\Phi_0}{\Phi_0 - \rho\Phi_0} = \frac{\rho}{1 - \rho},$$

где $\Phi_{\text{прел}}$ — световой поток преломленного света.

Задача 42. Закон Брюстера. Частично-поляризованный свет падает под углом Брюстера на поверхность прозрачного диэлектрика так, что ρ -часть света отражается, и преломленный свет оказывается естественным. Найдём степень поляризации падающего света.

Решение

Обозначим падающий частично-поляризованный световой поток через Φ_0 . Его степень поляризации можно представить следующим образом:

$$P = \frac{\Phi_{\text{п}}}{\Phi_{\text{чп}}} = \frac{\rho\Phi_0}{\Phi_0} = \rho,$$

где $\Phi_{\text{п}}$ — поляризованная часть падающего светового потока, $\Phi_{\text{чп}}$ — световой поток падающего частично-поляризованного света.

Задача 43. Степень поляризации. На пути частично-поляризованного света поместили поляризатор. При повороте плоскости пропускания поляризатора из положения, соответствующего максимуму пропускания, на угол φ интенсивность прошедшего света уменьшилась в η раз. Найти степень поляризации падающего света.

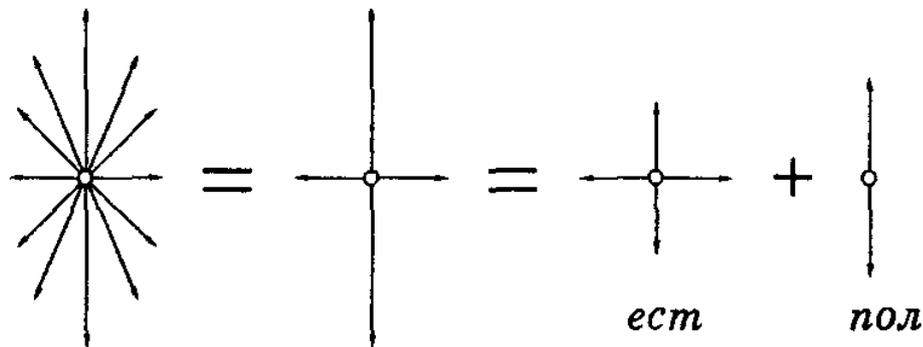


Рис. 26

Решение

Представим частично-поляризованный свет как сумму естественного и поляризованного (см. рис. 26). Тогда степень поляризации этого света

$$P = \frac{I_{\text{п}}}{I_{\text{п}} + I_{\text{е}}} = \frac{1}{1 + \frac{I_{\text{е}}}{I_{\text{п}}}}, \quad (11)$$

где I_e и I_n — интенсивности естественной и поляризованной составляющих. Найдем отношение $\frac{I_e}{I_n}$. Согласно условию и закону Малюса

$$\eta = \frac{I_n + \frac{I_e}{2}}{I_n \cos^2 \varphi + \frac{I_e}{2}}.$$

Отсюда

$$\frac{I_e}{I_n} = \frac{2(1 - \eta \cos^2 \varphi)}{(\eta - 1)}.$$

После подстановки последнего выражения в (11) получим:

$$P = \frac{\eta - 1}{1 + \eta(1 - 2 \cos^2 \varphi)} = \frac{\eta - 1}{1 - \eta \cos 2\varphi}.$$

Задача 44. Коэффициент отражения. Определить с помощью формул (Лекция 4, формула (29))¹⁷ коэффициент отражения естественного света при нормальном падении на поверхность прозрачного диэлектрика с показателем преломления n .

Решение

По определению, коэффициент отражения

$$\rho = \frac{I'_\perp + I'_\parallel}{I_\perp + I_\parallel}. \quad (12)$$

Теперь учтем, что $I_\perp + I_\parallel = I_0$ — интенсивность падающего света, причем $I_\perp = I_\parallel = \frac{I_0}{2}$, так как падающий свет естественный. Поэтому формулу (12) можно записать так:

$$\rho = \frac{I'_\perp}{2I_\perp} + \frac{I'_\parallel}{2I_\parallel}. \quad (13)$$

Перепишем это соотношение с помощью формул (Лекция 4, формула (29)) в следующем виде

$$\rho = \frac{1}{2}(\rho_\perp + \rho_\parallel) = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin^2(\varphi - \psi)}{\sin^2(\varphi + \psi)} + \frac{\operatorname{tg}^2(\varphi - \psi)}{\operatorname{tg}^2(\varphi + \psi)} \right].$$

При малых значениях ν выражения в квадратных скобках упрощаются:

$$\rho = \frac{1}{2} \left[\frac{(\varphi - \psi)^2}{(\varphi + \psi)^2} + \frac{(\varphi - \psi)^2}{(\varphi + \psi)^2} \right] = \left(\frac{\varphi - \psi}{\varphi + \psi} \right)^2. \quad (14)$$

Остается учесть закон преломления: при малых φ имеем $\varphi = n\psi$. Подстановка этого равенства в (14) приводит к окончательному результату:

$$\rho = \left(\frac{n - 1}{n + 1} \right)^2.$$

17

$$\left. \begin{aligned} E'_p &= E_p \cdot \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \psi)}{\operatorname{tg}(\varphi + \psi)}; & E''_p &= E_p \cdot \frac{2 \sin \psi \cos \varphi}{\sin(\varphi + \psi) \cos(\varphi - \psi)}; \\ E'_s &= -E_s \cdot \frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)}; & E''_s &= E_s \cdot \frac{2 \sin \psi \cos \varphi}{\sin(\varphi + \psi)}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{Лекция 4, формула (29)})$$

Этот результат полностью совпадает с формулой (Лекция 4, формула (35))¹⁸.

Задача 45. Найти с помощью соотношения (Лекция 4, формула (29)) коэффициент отражения ρ естественного света, падающего под углом Брюстера на прозрачный диэлектрик с показателем преломления n .

Решение

Пусть φ и ψ — углы падения и преломления. Здесь $\varphi = \varphi_{\text{Бр}}$, значит $\varphi + \psi = \frac{\pi}{2}$ и в (Лекция 4, формула (29)) отлично от нуля будет только ρ_{\parallel} . Падающий свет естественный, это значит, что у него $I_{\perp} = I_{\parallel}$ и $I_{\perp} = \frac{I_0}{2}$, где I_0 — интенсивность падающего света. Искомый коэффициент

$$\rho = \frac{I'_{\perp}}{I_0} = \frac{I'_{\perp}}{2I_{\perp}} = \frac{\rho_{\perp}}{2}. \quad (15)$$

В нашем случае $\sin(\varphi + \psi) = 1$, поэтому

$$\rho_{\perp} = \sin^2(\varphi - \psi). \quad (16)$$

Преобразуем (16) так, чтобы представить его через $\text{tg } \varphi$, который по условию равен n . Разность углов в скобках с учетом того, что $\varphi + \psi = \frac{\pi}{2}$, запишем так:

$$\varphi - \psi = \varphi - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = 2\varphi - \frac{\pi}{2}. \quad (17)$$

Тогда выражение (16) можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \sin^2(\varphi - \psi) &= \sin^2\left(2\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \cos^2 2\varphi = (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)^2 = (1 - 2\sin^2 \varphi)^2 = \\ &= \left(1 - 2\frac{1}{1 + \text{tg}^2 \varphi}\right)^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Заменив в (18) $\text{tg } \varphi$ через n , и учитывая (16), представим искомое ρ , т. е. (15), в окончательном виде:

$$\rho = \frac{1}{2} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}\right)^2. \quad (19)$$

Напомним, ρ — это та доля падающего света, которая при отражении под углом Брюстера превращается в полностью плоскополяризованный свет.

Задача 46. На поверхность прозрачного диэлектрика с показателем преломления n падает под углом Брюстера линейно-поляризованный свет, плоскость поляризации которого а) перпендикулярна плоскости падения; б) лежит в плоскости падения. Найдем коэффициенты отражения света в обоих случаях.

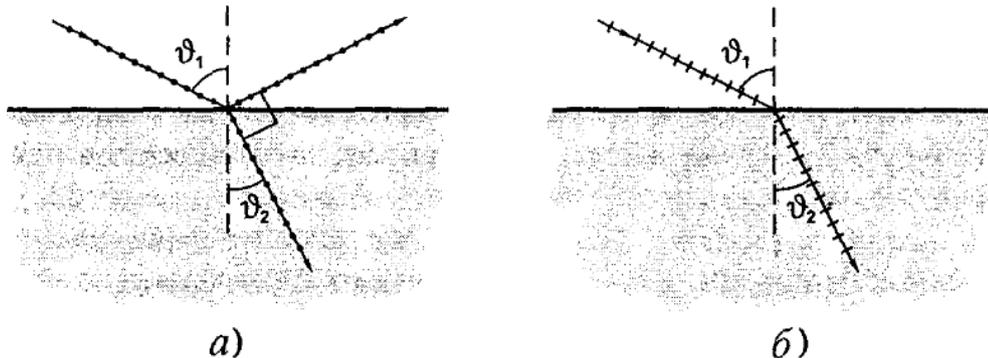


Рис. 27

¹⁸

$$\rho = \frac{I'}{I} = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 \quad (\text{Лекция 4, формула (35)})$$

Решение

Прежде всего представим себе, как будут выглядеть отраженный и преломленный лучи в этих случаях (рис. 27).

В случае а) согласно третьей формуле Френеля (Лекция 4, формула (29))¹⁹ коэффициент отражения $\rho_{\perp} = \sin^2(\varphi - \psi)$, где φ — угол Брюстера, определяемый формулой $\operatorname{tg} \varphi = n$, а угол ψ связан с углом φ законом преломления: $\sin \varphi = n \sin \psi$. Определив φ и ψ , мы найдем и ρ_{\perp} . В случае же б) при падении под углом Брюстера тангенс в знаменателе первой формулы Френеля (Лекция 4, формула (29)) обращается в ∞ , поскольку $\varphi + \psi = \frac{\pi}{2}$. Это значит, что в данном случае $\rho_{\parallel} = 0$, т. е. отраженный луч отсутствует (но это только при падении под углом Брюстера).

Задача 47. Свет проходит через систему из двух скрещенных поляризаторов, между которыми расположена кварцевая пластинка. Ее оптическая ось составляет угол 45° с плоскостями пропускания поляризаторов. При какой минимальной толщине пластинки свет с длиной волны $\lambda_1 = 643$ нм будет проходить сквозь эту систему с максимальной интенсивностью, а свет с $\lambda_2 = 564$ нм будет практически задержан, если для обеих длин волн $n_e - n_o = 0,0090$?

Решение

Согласно формуле разности хода для пластинки в полволны (Лекция 16)²⁰

$$h = \frac{m\lambda}{2(n_e - n_o)}.$$

Для максимума пропускания эта пластинка должна быть пластинкой $\frac{\lambda}{2}$, т. е. m_1 должно быть нечетным, а для минимума — пластинкой в целую волну, т. е. m_2 должно быть четным. Из приведенной формулы следует, что $m_1\lambda_1 = m_2\lambda_2$. Отсюда

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 1,14.$$

Полученное значение 1,14 надо представить как отношение наименьших значений четного числа m_2 к нечетному m_1 . Легко убедиться (например, подбором), что это будут 8 и 7, т. е. $m_2 = 8$ и $m_1 = 7$. Возвращаясь к первой формуле, находим

$$h_{\text{мин}} = \frac{m_1\lambda_1}{2(n_e - n_o)} = 0,25 \text{ мм}.$$

¹⁹

$$\left. \begin{aligned} E'_p &= E_p \cdot \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \psi)}{\operatorname{tg}(\varphi + \psi)}; & E''_p &= E_p \cdot \frac{2 \sin \psi \cos \varphi}{\sin(\varphi + \psi) \cos(\varphi - \psi)}; \\ E'_s &= -E_s \cdot \frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)}; & E''_s &= E_s \cdot \frac{2 \sin \psi \cos \varphi}{\sin(\varphi + \psi)}. \end{aligned} \right\} \text{ (Лекция 4, формула (29))}$$

²⁰

$$(n_o - n_e)d = m\lambda_0 + \frac{\lambda_0}{2} = (2m + 1)\frac{\lambda_0}{2}, \quad \text{(Лекция 16)}$$

3.4 Взаимодействие света с веществом

Задача 48.

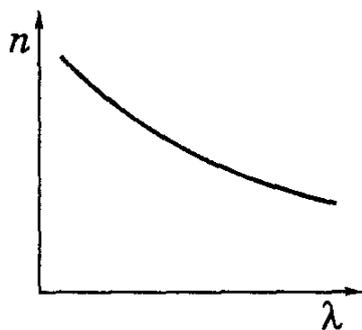


Рис. 28

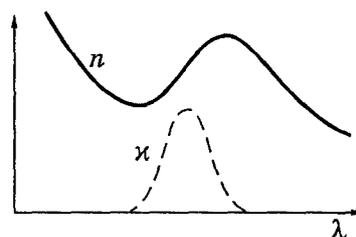


Рис. 29

На рис. 28 и 29 изображены графики зависимости показателя преломления вещества от длины волны $n(\lambda)$. Изобразим соответствующие графики зависимостей $n(\omega)$, где ω — циклическая частота света.

Решение

Поскольку $\omega \sim \frac{1}{\lambda}$, легко проверить, что графики $n(\omega)$, соответствующие указанным рисункам, таковы, как показано на рис. 30 и 31. Причем, в случае графика, приведенного на рис. 30, закон дисперсии в соответствии с формулой (Лекция 17, формула (16))²¹ принимает вид

$$n = a + b'\omega^2, \quad \text{где постоянная} \quad b' = \frac{b}{(2\pi c)^2}.$$

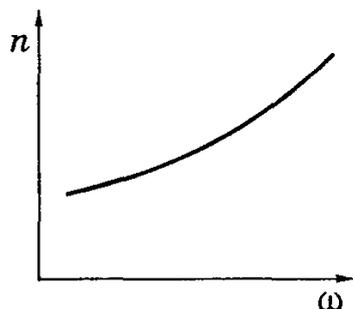


Рис. 30

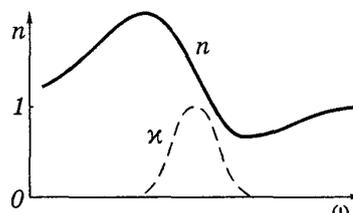


Рис. 31

Задача 49. При зондировании разреженной плазмы радиоволнами различных частот обнаружили, что радиоволны с частотами, меньшими, чем $\nu_0 = 400$ МГц не проходят через плазму. Найдём концентрацию свободных электронов в этой плазме.

Решение

Радиоволны не проходят через плазму, а отражаются от нее, как мы выяснили, при мнимом показателе преломления, т. е. при значении диэлектрической проницаемости $\varepsilon \ll 0$. Имея в виду (Лекция 17, формула (25))²² и учитывая, что для

²¹

$$n = a + \frac{b}{\lambda^2}, \quad (\text{Лекция 17, формула (16)})$$

²²

$$\varepsilon = 1 + \frac{b}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \text{где} \quad b = \frac{N_0 \cdot \varepsilon^2}{\varepsilon_0 \cdot m_e} \quad (\text{Лекция 17, формула (25)})$$

свободных электронов $\omega_0 = 0$, получим:

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{N_0 e^2}{\varepsilon_0 m_e \omega^2} \leq 0.$$

Отсюда находим искомую концентрацию свободных электронов:

$$N_0 = \frac{\varepsilon_0 m_e \omega^2}{e^2} = \frac{4\pi^2 \varepsilon_0 m_e \nu^2}{e^2} = 2,0 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3}.$$

Задача 50. Найдем выражение для групповой скорости в среде с известной зависимостью показателя преломления от частоты электромагнитной волны, $n(\omega)$.

Решение

Будем исходить из определения групповой скорости — формулы (Лекция 17, формула (27))²³. Принимая во внимание, что фазовая скорость $v = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n}$, получим

$$k = \frac{\omega n}{c}.$$

Теперь возьмем производную $\frac{dk}{d\omega}$:

$$\frac{dk}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\omega n}{c} \right) = \frac{1}{c} \left(n + \omega \frac{dn}{d\omega} \right).$$

Подстановка обратного значения этой величины, т. е. $\frac{d\omega}{dk}$, в (Лекция 17, формула (27)) приводит к искомому результату:

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{n + \omega \left(\frac{dn}{d\omega} \right)}.$$

Задача 51. Дисперсия света. Электромагнитная волна распространяется в разреженной плазме, концентрация свободных электронов которой равна N_0 . Пренебрегая взаимодействием волны с ионами плазмы, найти зависимость фазовой скорости волны от ее частоты ω .

Решение

В случае плазмы (электроны свободные) собственная частота колебаний электронов $\omega_0 = 0$, поэтому согласно (Лекция 17, формула (25)) диэлектрическая проницаемость

$$\varepsilon = 1 - \frac{b}{\omega^2},$$

где $b = \frac{N_0 e^2}{\varepsilon_0 m_e}$, m_e — масса электрона. Следовательно, фазовая скорость

$$\nu = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{b}{\omega^2}}}.$$

Задача 52. Найти концентрацию свободных электронов ионосферы, если для радиоволн с частотой $\nu = 100$ МГц ее показатель преломления $n = 0,90$.

²³

$$u = \frac{d\omega}{dk}$$

(Лекция 17, формула (27))

Решение

Согласно (Лекция 17, формула (25)): для плазмы ($\omega_0 = 0$)

$$n^2 = 1 - \frac{b}{\omega^2}, \quad (20)$$

где $b = \frac{N_0 e^2}{\varepsilon_0 m_e}$, $\omega = 2\pi\nu$. После подстановки выражений для b и ω в (20) получим:

$$N_0 = \frac{4\pi^2 \varepsilon_0 m_e \nu^2}{e^2} (1 - n^2) \approx 2,4 \cdot 10^7 \text{ см}^{-3}.$$

Задача 53. Групповая скорость. Найти зависимость между групповой u и фазовой v скоростями для следующих законов дисперсии:

а) $v \propto k$; б) $v \propto \frac{1}{\omega^2}$.

Здесь k и ω — волновое число и циклическая частота.

Решение

а) По определению, $u = \frac{d\omega}{dk}$, где $\omega = vk$. Тогда

$$u = \frac{d}{dk}(vk) = v + k \frac{dv}{dk}. \quad (21)$$

Пусть $v = ak$, где a — некоторая постоянная. В этом случае (21) примет вид

$$u = v + ak = 2v.$$

б) Пусть $v = \frac{\alpha}{\omega}$, α — некоторая постоянная. Тогда

$$\frac{dk}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\omega}{v} \right) = \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\omega^3}{\alpha} \right) = \frac{3}{v}.$$

Поэтому групповая скорость

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{v}{3}.$$

Задача 54. Поглощение света. Из некоторого прозрачного вещества изготовили две пластинки: одну толщиной h_1 , другую толщиной h_2 . Введя поочередно эти пластинки перпендикулярно в пучок монохроматического света, обнаружили, что первая пластинка пропускает τ_1 светового потока, а вторая — τ_2 . Пренебрегая вторичными отражениями, найти коэффициент поглощения α этого вещества.

Решение

В условии этой задачи описан обычный метод измерения коэффициента поглощения в случае, когда неизвестен коэффициент отражения от каждой поверхности пластинки. В этом случае поступают так. Сначала запишем выражения для интенсивности света, прошедшего через первую и вторую пластинки:

$$I_1 = I_0(1 - \rho)^2 e^{-\alpha h_1}, \quad (22)$$

$$I_2 = I_0(1 - \rho)^2 e^{-\alpha h_2},$$

где I_0 — интенсивность падающего света, ρ — неизвестный коэффициент отражения (одинаковый для обеих поверхностей пластинки). Имея в виду, что $\frac{I_1}{I_0} = \tau_1$ и

$\frac{I_2}{I_0} = \tau_2$, найдем отношение обеих формул (22) и тем самым исключим неизвестное ρ . В результате получим:

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = e^{\alpha(h_2 - h_1)},$$

откуда, потенцируя, находим:

$$\alpha = \frac{\ln\left(\frac{\tau_1}{\tau_2}\right)}{h_2 - h_1}.$$

3.5 Теория относительности и оптика движущихся сред

Задача 55. Можно ли с помощью фотоаппарата зафиксировать сокращение Лорентца по изменению формы предмета, пролетающего мимо точки фотографирования с релятивистской скоростью? Рассмотреть случай куба и шара, летящих на большом расстоянии от точки фотографирования.

Решение

Фотоаппарат фиксирует лучи, которые приходят в него одновременно. Поэтому, вследствие конечности скорости света, точки предмета, лежащие дальше от фотоаппарата, чтобы дать вклад в изображение, должны испустить лучи раньше, чем более близкие точки.

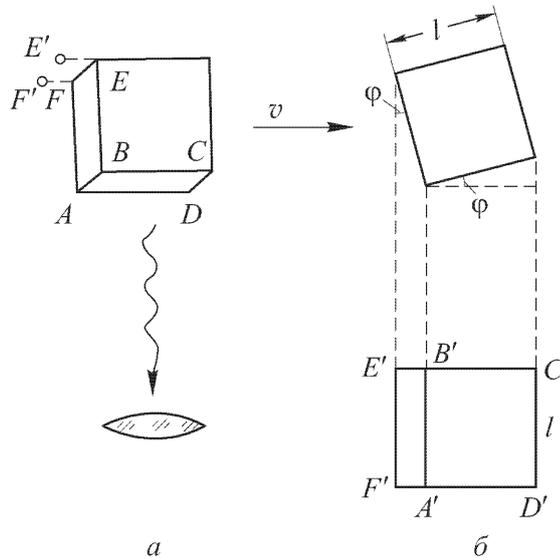


Рис. 32

Рассмотрим, например, светящийся предмет кубической формы со стороной ℓ , пролетающий на большом расстоянии от точки фотографирования со скоростью v перпендикулярно к лучу света, направленному на фотоаппарат (рис. 32 а). Вследствие движения тыльная грань $ABEF$, невидимая при неподвижном кубе, становится видимой при движении, так как из точек E и F свет излучился на время $\frac{\ell}{c}$ раньше, чем с грани $ABCD$, когда точки E и F находились в положении E' и F' . На фотографии (рис. 32 б) грань $ABEF$ выйдет в виде прямоугольника $A'B'E'F'$ со стороной $A'F' = \left(\frac{v}{c}\right) \ell$ (Лекция 18, формула (39))²⁴.

С другой стороны, грань $ABCD$ вследствие сокращения Лорентца будет сжатой в направлении движения в $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ раз так, что ее изображение $A'B'C'D'$ на фото-

24

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v}{c}.$$

(Лекция 18, формула (39))

графией получится в виде прямоугольника со стороной $A'D' = \ell \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Нетрудно видеть, что на фотографии общая форма движущегося куба не искажается, так как он кажется повернутым на угол $\varphi = \arcsin\left(\frac{v}{c}\right)$ при сохранении своих пропорций (рис. 32 б).

Аналогично, для движущегося шара вследствие совместного действия запаздывания света и сокращения Лорентца видимая форма шара не искажается: на фотографии он получается в форме круга. Чтобы наблюдать при помощи фотоаппарата сокращение Лорентца в чистом виде, нужно воспользоваться внешним источником освещения, например, лампой-вспышкой, который исключает кажущийся поворот движущихся предметов.

Задача 56. Два шарика диаметром d_0 (в системе покоя) приведены в движение навстречу друг другу с релятивистской скоростью v . После лобового столкновения в определенных условиях можно считать, что шарики мгновенно останавливаются, а затем происходит их разлет. Каков размер системы l в момент остановки? (Таковыми шариками в некотором приближении можно считать, например, протоны, в результате соударения которых образуются новые частицы — пионы и пр.)

Решение

Размер системы в направлении движения (Лекция 18, формула (51))²⁵

$$l_{\parallel} = \frac{2d_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

а в перпендикулярном направлении $l_{\perp} = d_0$.

Задача 57. Какова максимальная плотность тока, который может течь в полностью ионизованной водородной плазме с электронной концентрацией n (при неизменном значении e)?

Решение

Плотность тока

$$j = ne(v_e - v_i)$$

(e — заряд электрона, v_e — средняя скорость электронов, v_i — средняя скорость ионов). Ее максимальное значение

$$j_{\max} = 2nec,$$

поскольку абсолютные значения v_e и v_i не превосходят скорости света.

²⁵

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y &= y', \\ z &= z', \\ t &= \frac{t + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned} \right\} \quad \text{(Лекция 18, формула (51))}$$

Задача 58. Оптический эффект Доплера отличается от акустического в двух отношениях.

I. В акустике есть среда (воздух), относительно которой могут двигаться источник и наблюдатель. В оптике, когда речь идет о распространении света в вакууме, подобной среды не существует — имеет смысл говорить только об относительном движении источника и наблюдателя.

II. При больших скоростях источников света в оптике надо считаться с эффектом теории относительности «замедления хода движущихся часов».

Учитывая эти два отличия, получить формулу для оптического эффекта Доплера. За систему отсчета принять ту, относительно которой наблюдатель неподвижен. Рассмотреть частные случаи:

1) источник движется вдоль луча зрения, в направлении которого его видит наблюдатель;

2) источник движется перпендикулярно к этому лучу.

Решение

Систему отсчета, относительно которой наблюдатель покоится, условимся считать неподвижной, а систему, в которой покоится источник, — движущейся. Полагая (см. Лекция 1, формула (36))²⁶ $\nu \equiv \nu_{\text{набл}}$, $v_{\text{набл}} = 0$, $v_{\text{ист}} = v$, $\theta_{\text{ист}} = \theta$ и что $v_x = v \cdot \cos \theta$, получим

$$\frac{\nu}{\nu_1} = \frac{c}{c + v \cos \theta},$$

где ν_1 — частота световой волны в месте нахождения источника, измеренная с помощью неподвижных часов. Если ее измерить с помощью движущихся часов (т.е. часов, неподвижных в системе источника), то благодаря замедлению хода последних мы получим вместо ν_1 частоту (Лекция 18, формула (57))²⁷

$$\nu_0 \equiv \nu_{\text{ист}} = \nu_1 \sqrt{1 - \beta^2}, \quad \beta = \frac{v}{c},$$

и следовательно (Лекция 1, формула (34))²⁸,

$$\frac{\nu}{\nu_0} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta \cos \theta} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \theta}.$$

1) При $\theta = 0$ (Лекция 1, формула (33))²⁹

$$\frac{\nu}{\nu_0} = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}.$$

26

$$\nu = \frac{\nu_0}{\left(1 - \frac{v_x}{c}\right)} \approx \nu_0 \left(1 + \frac{v_x}{c}\right) \quad (\text{Лекция 1, формула (36)})$$

27

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) \quad (\text{Лекция 18, формула (57)})$$

28

$$\nu = \nu_0 \cdot \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{v_x}{c}} \quad (\text{Лекция 1, формула (34)})$$

29

$$\nu = \nu_0 \cdot \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{v}{c}} = \nu_0 \cdot \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{v}{c}} \quad (\text{Лекция 1, формула (33)})$$

2) При $\theta = \frac{\pi}{2}$ (поперечный эффект Доплера, см. Лекция 1, формула (35))

$$\nu = \nu_0 \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Задача 59. Расчет релятивистского эффекта Доплера и абберации света проще всего произвести, пользуясь инвариантностью фазы волны относительно преобразования Лорентца (Лекция 18, формула (51))³⁰. Согласно этой инвариантности в плоской волне справедливо соотношение

$$\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} = \omega' t' - \mathbf{k}'\mathbf{r}',$$

где t, \mathbf{r} и t', \mathbf{r}' — время и координаты одного и того же события в «неподвижной» и «движущейся» системах отсчета, связанные между собой преобразованием Лорентца. Доказать это соотношение и, пользуясь им, получить релятивистские формулы для эффекта Доплера и абберации света.

Решение

Пусть в момент $t = t'$ начала обеих координатных систем совпадают между собой. В этот момент поставим отметку в той точке распространяющегося ряда плоских волн, которая проходит через начало координат.

Произвольный наблюдатель A , находящийся в «неподвижной» системе отсчета, начинает счет проходящих мимо него волн в тот момент, когда мимо него проходит сделанная отметка. К моменту времени t он насчитает

$$n = \frac{\Phi}{(2\pi)}$$

волн, где $\Phi = \omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}$ — фаза проходящей мимо него волны в момент t .

Наблюдатель A' в «движущейся» системе отсчета производит такой же счет волн и к моменту t' насчитает

$$N' = \frac{\Phi'}{(2\pi)}$$

волн, где $\Phi' = \omega' t' - \mathbf{k}'\mathbf{r}'$.

К моменту встречи мимо обоих наблюдателей пройдут одни и те же волны. Поэтому в момент встречи наблюдателей $N = N'$, а следовательно, $\Phi = \Phi'$. Это и доказывает требуемое соотношение, так как из рассуждения ясно, что t, \mathbf{r} и t', \mathbf{r}' означают время и координаты одного и того же события в «неподвижной» и «движущейся» системах отсчета.

30

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y &= y', \\ z &= z', \\ t &= \frac{t + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned} \right\} \quad \text{(Лекция 18, формула (51))}$$